МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

$x(y-1) - 6(y-1)$

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$(x-6)(y-1)$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

$\begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 1 \end{cases}$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Т.к. a, b, c - члены геометрической прогрессии, то пусть $a=k$; $b=kq$; $c=kq^2$; $k,q\neq 0$ (q - знаменатель геометрической прогрессии)

$ax^2-2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac$

$x_1=\frac{2b+\sqrt{4(b^2-ac)}}{2a}$ $x_2=\frac{2b-\sqrt{4(b^2-ac)}}{2a}$

$x_1=\frac{2b+2\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ $x_2=\frac{2b-2\sqrt{b^2-ac}}{2a}$

$x_1=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$ $x_2=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$

Учитывая, что $a=k$; $b=kq$; $c=kq^2$

$x_1=\frac{kq+\sqrt{k^2q^2-k^2q^2}}{k}$ $x_2=\frac{kq-\sqrt{k^2q^2-k^2q^2}}{k}$

$x_1=q$ $x_2=q$

Т.е. $4^{ый}$ член прогрессии - q. $(k; kq; kq^2; q)$

Значит, $\frac{kq}{k}=\frac{q}{kq^2}$

$k^2q^3=kq \quad |:kq$

$kq^2=1$; $kq^2=c$, т.е. $3^{ий}$ член прогрессии 1.

Ответ: 1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$$

$* \quad x-6y \geq 0; \quad xy-6y-x+6 \geq 0$

$x \geq 6y; \quad x(y-1)-6(y-1) \geq 0$

$(y-1)(x-6) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Решим (1):

$(x-6y)^2 = xy-6y-x+6$

$x^2-12xy+36y^2 = xy-6y-x+6$

$x^2-13xy+x+36y^2+6y-6=0$

$x^2-x(13y-1)+6(6y^2+y-1)=0$

$D=(13y-1)^2-4\cdot 6(6y^2+y-1)=$

$=169y^2-26y+1-144y^2-24y+24=$

$=25y^2-50y+25=(5y-5)^2$

$x_1=\frac{1-13y+5y-5}{2} \qquad x_2=\frac{1-13y-5y+5}{2}$

$x_1=-4y-2 \qquad x_2=-9y+3$

Подставим x_1 в (2):

$(-4y-2)^2+2y^2-12(-4y-2)-4y+20=0$

$16y^2+16y+4+2y^2+48y+24-4y+20=0$

$18y^2+60y+48=0 \quad |:2$

$9y^2+30y+24=0 \quad |:3$

$3y^2+10y+8=0$

$D=100-4\cdot 3\cdot 8=100-96=4$

$y_1=\frac{-10+2}{6} \qquad y_2=\frac{-10-2}{6}$

$y_1=-\frac{8}{6} \qquad y_2=-2$

$y_1=-\frac{4}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.е имеем

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{4}{3} \\ x_1 = -4y-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = -2 \\ x_2 = -4y-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{4}{3} \\ \cancel{\ldots} \\ x_1 = \frac{10}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = -2 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Подставим x_2 в (2):

$$(-9y+3)^2 + 2y^2 - 12(-9y+3) - 4y + 20 = 0$$

$$(3-9y)^2 + 2y^2 + 108y - 36 - 4y + 20 = 0$$

$$9 - 54y + 81y^2 + 2y^2 + 108y - 36 - 4y + 20 = 0$$

$$83y^2 + 50y - 7 = 0$$

$$D = 2500 + 4\cdot 7\cdot 83 = 2500 + 28\cdot 83 = 2500 + 2324 =$$

$$= 4824$$

$$y_1 = \frac{-50+\sqrt{4824}}{2\cdot 83} \qquad y_2 = \frac{-50-\sqrt{4824}}{2\cdot 83}$$

$$y_1 = \frac{-50+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 67}}{2\cdot 83} \qquad y_2 = \frac{-50-2\cdot 3\cdot\sqrt{2\cdot 67}}{2\cdot 83}$$

$$y_1 = \frac{-25+3\sqrt{2\cdot 67}}{83} \qquad y_2 = \frac{-25-3\sqrt{134}}{83}$$

т.е имеем

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-25+3\sqrt{134}}{83} \\ x_2 = -9y+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = \frac{-25-3\sqrt{134}}{83} \\ x_2 = -9y+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-25+3\sqrt{134}}{83} \\ x_2 = \dfrac{9\cdot25-9\cdot3\sqrt{134}}{83}+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = \dfrac{-25-3\sqrt{134}}{83} \\ x_2 = \dfrac{9\cdot25+9\cdot3\sqrt{134}}{83}+3 \end{cases}$$

Необходимо проверить условие $x \geq 6y$

$$\frac{9\cdot25-9\cdot3\sqrt{134}}{83}+3 \geq \frac{-6\cdot25+3\cdot6\sqrt{134}}{83}$$

$$\frac{225-27\sqrt{134}+150-18\sqrt{134}}{83}+3 \geq 0$$

$$\frac{375-45\sqrt{134}}{83}+3 \geq 0 \qquad (\sqrt{134}<12) \quad \sqrt{134}\approx 12$$

$$-\frac{165}{83}+3 \geq 0 \text{ (верно)}$$

$$45\cdot12 = 540 \qquad 540-375=165$$

Значит, верно и для $(x_2; y_2)$, т.к. $y\downarrow$; $x\uparrow$

~~Ответ:~~ $\cancel{\left(\frac{10}{3}; -\frac{4}{3}\right); (6; -2); \left(\frac{474-27\sqrt{134}}{83}; \frac{-25+3\sqrt{134}}{83}\right); \left(\frac{474+27\sqrt{134}}{83}; \frac{-25-3\sqrt{134}}{83}\right)}$

Рассмотрим подкоренное выражение

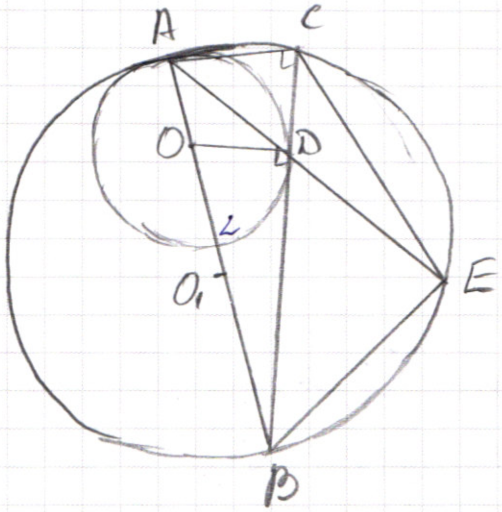
$$\sqrt{xy-6y-x+6}\;; \quad \sqrt{(y-1)(x-6)} \geq 0$$

тогда $x_2 > 6$, но $y_2 = \dfrac{-25-3\sqrt{134}}{83} < 1$, т.е. $x_2; y_2$ корнями не являются

Ответ: $\left(\frac{10}{3}; -\frac{4}{3}\right); (6; -2); \left(\frac{474-27\sqrt{134}}{83}; \frac{-25+3\sqrt{134}}{83}\right)$

№5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано:

окр. Ω касается окр. ω внутр. обр. в т. A

AB - диаметр окр. Ω

BC - хорда окр. Ω

BC касается окр. ω в т. D

$AD \cap$ окр $\Omega = E$

$CD = 2$

$BD = 3$

Найти: радиусы окр.; S_{BACE}

Решение

1) т. O; O_1 и A лежат на 1 прямой (как линия центров окр. и т. касания);

Пусть окр. Ω - окр $(O_1; R)$; окр. ω - окр $(O; r)$

2) $\angle ACB$ - вписанный в окр $(O_1; R)$, опирается на диаметр, т.е. $\angle ACB = 90°$

3) $OD \perp BD$ (по св-ву радиуса, проведённого в т. касания)

4) Рассмотрим $\triangle BOD$ и $\triangle BAC$:

$\angle ABC$ - общий

$\angle BDO = \angle BCA = 90°$

Значит, $\triangle BOD \sim \triangle BAC$ (по двум углам), т.е

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BO}{BA}=\frac{OD}{AC}.$$

$BD=3$ (по усл.); $CD=2$, т.е. ~~BR=5~~ $BC=5$

$BO=2R-r$; $BA=2R$, т.е

$$\frac{2R-r}{2R}=\frac{3}{5}$$

$$10R-5r=6R$$

$$4R=5r; \quad r=\frac{4R}{5}$$

5) BD - касательная к окр. $(O;r)$, т.е

$BD^2=BL\cdot BA$; $AB\cap$ окр $(O;r)=L$

$$9=(2R-2r)\cdot 2R$$

$$9=4R^2-4rR$$

$$9=4R^2-\frac{4\cdot 4R^2}{5}$$

$$4R^2-\frac{16}{5}R^2=\frac{20R^2-16R^2}{5}=\frac{4R^2}{5}$$

$$9=\frac{4R^2}{5}$$

$$45=4R^2$$

$$R=\sqrt{\frac{45}{4}}=\sqrt{\frac{5\cdot 9}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$$

т.е т. O_1 лежит вне окр $(O;r)$, т.к.

иначе $9=(R-2r)\cdot 2R$

$$9=2R^2-4rR; \quad 9=2R^2-\frac{4\cdot 4R}{5}=\frac{10R^2-16R^2}{5}=9,$$

$-\frac{6R^2}{5}=9$ (неверно), т.е

$$r=\frac{4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

6) $S_{ACEB}=S_{ACB}+S_{CEB}$

$$S_{ACB}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC$$

7) ΔACB - прямоугольный

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По т. Пифагора

$AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB = 2R$; $AB = 3\sqrt{5}$

$9 \cdot 5 = AC^2 + 25$

$AC^2 = 20$; $AC = 2\sqrt{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 = 5\sqrt{5}$

8) $S_{CEB} = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot BC \cdot \sin CBE$

$\angle CBE = \angle CAE$ (вписанные, опираются на 1 дугу)

9) ~~$\triangle AF$~~ $\triangle ACD$ - прямоугольный, по т. Пифагора $AD^2 = AC^2 + CD^2$

$AD^2 = 20 + 4$

$AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

10) $\sin CAD = \sin CAE = \frac{CD}{AD}$

$\sin CAE = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$; $\sin CBE = \frac{\sqrt{6}}{6}$

11) $CD \cdot DB = AD \cdot DE$ (как отрезки пересекающихся хорд)

$2 \cdot 3 = 2\sqrt{6} \cdot DE$

$DE = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

12) $\angle AEB$ - вписанный, опирается на диаметр окр $(O_1; R)$, т.е. $\angle AEB = 90°$

13) $\triangle DEB$ прямоугольный

$DB^2 = DE^2 + EB^2$ (по т. Пифагора)

$\cancel{9 = 16}$ $9 = \frac{6}{4} + EB^2$

$\frac{36-6}{4} = EB^2$

$EB^2 = \frac{\cancel{30}^{15}}{\cancel{4}_2} = \frac{15}{2}$

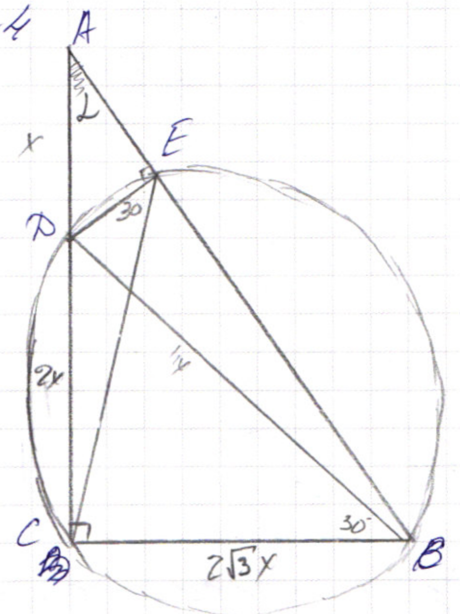
$EB = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}^{\backslash\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

14) $S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{5} \cdot \cancel{\sqrt{6}} \cdot 5 \cdot \cancel{\sqrt{6}}}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{6}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

15) $S_{ACEB} = 5\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $1{,}5\sqrt{5}$; $1{,}2\sqrt{5}$; $\frac{25\sqrt{5}}{4}$

№4



Дано:

$\triangle ACB$ - прямоугольный ($\angle ACB = 90°$)

$AD : AC = 1 : 3$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 30°$

а) $tg\, BAC$ - ?

б) $AC = \sqrt{7}$

S_{CED} - ?

Решение

1) $\angle DEB = 90°$; $\angle DCB = 90°$, т.е в 4-ёх угольнике $DEBC$ $\angle DCB + \angle DEB = 180°$, т.е около $CDEB$ можно описать окружность.

2) $\angle DEC$ - вписанный, опирается на $\smile DC$

$\angle DBC$ - вписанный, опирается на $\smile DC$, т.е

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle DBC = 30^\circ$

3) $\triangle DCB$ - прямоугольный, $\sin DBC = \frac{DC}{DB}$

Т.к. $AD : AC = 1:3$, то пусть $AD = x$, тогда $DC = 2x$

$\frac{1}{2} = \frac{2x}{BD}$; $BD = 4x$

4) $\triangle DBC$ - прямоугольный, по т. Пифагора

$BD^2 = BC^2 + CD^2$

$16x^2 = BC^2 + 4x^2$

$BC^2 = 12x^2$

$BC = x\sqrt{12} = x\sqrt{4 \cdot 3} = 2x\sqrt{3}$

5) $tg BAC = \frac{BC}{AC}$

$tg BAC = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

6) Т.к. $AC = \sqrt{7}$, то $AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $DC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, т.е

$AD = x = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $CB = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

7) Рассмотрим $\triangle DEA$ и ~~$\triangle ACB$~~ $\triangle BCA$:

$\angle BAC$ - общий

$\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$

Значит, $\triangle DEA \sim \triangle BCA$ (по двум углам),

т.е $\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

~~$\frac{DE \cdot 3}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$~~ $\triangle ABC$ - прямоугольный, по т. Пифагора $AB^2=AC^2+BC^2$

$AB^2=7^{\backslash 9}+\frac{4\cdot 21}{9}=\frac{63+84}{9}=\frac{\cancel{147}^{49}}{\cancel{9}_3}=\frac{49}{3}$

$AB=\frac{7^{\backslash\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$, т.с

$\frac{DE\cdot 3}{2\cdot\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 7\cdot\sqrt{3}}$

$DE\cdot 3=\frac{2\cdot\cancel{\sqrt{7}}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7}}{\cancel{7}\cdot\cancel{\sqrt{3}}}$

$DE=\frac{2}{3}$

14) $\sin\angle=\frac{DE}{AD}$ $(\triangle ADE)$

$\sin\angle=\frac{2\cdot 3}{3\cdot\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ $\quad 1-\frac{4\cdot 7}{49}=\frac{21}{49}$

15) $\angle CDE$ - внешний для $\triangle ADE$;

$\angle CDE=\angle DEA+\angle DAE$

$\angle CDE=90^\circ+\angle$ $\quad(\angle DAE=\angle)$

~~$\sin(90^\circ+\angle)=\sin 90^\circ\cos\angle+\sin\angle\cos 90^\circ$~~

$\sin(90+\angle)=\cos\angle$

16) $\triangle ADE$ - прямоугольный, по т. Пифагора

$AD^2=AE^2+DE^2$

$\frac{7}{9}=AE^2+\frac{4}{9}$

$\frac{3}{9}=AE^2$; $AE=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\angle=\frac{AE}{AD}$; $\cos\angle=\frac{\sqrt{3}\cdot 3}{3\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}^{\backslash\sqrt{7}}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

17) $S_{CDE}=\frac{1}{2}\cdot DE\cdot CD\cdot\sin CDE$; $\sin CDE=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$S_{CDE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{\sqrt{7}}\cdot\cancel{\sqrt{7}}\sqrt{3}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\cancel{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

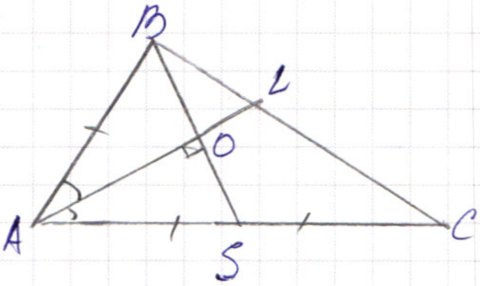
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№5~~

~~$8x+6|2x-1|+ax+b=0$ $-8x^2+6x+7$~~

~~Рассмотрим $y=8$~~

№2



△ABC

AL - биссектриса △ABC

BS - медиана △ABC

$BL \perp BS$

$BL \cap BS = O$

Т.к. ~~в~~ $AO \perp BS$ и AO - биссектриса △ABS то △BAS - р/б, т.е $AS=AB$

Т.е условию удовлетворяют △, у которых одна сторона в 2 раза больше другой, при этом выполняется нер-во △.

Пусть $AB=x$. Тогда $3x<900$ $(900=3x+BC)$
$x<300$

~~При этом $2x < x+BC$~~

$x>150$ (при $x=150$ $AB=150$; $AC=300$; $BC=450$, нер-во △ не выполняется)

При $x=151$ $AC=302$; $BC=447$

$x<250$ (при $x=250$ $AB=250$; $AC=500$; $BC=150$, нер-во △ не выполн.)

При $x=229$ нер-во △ не выполняется,

при $x=230$ нер-во Δ выполняется

т.с. ~~150<x~~ задача сводится к нахождению кол-ва целочисленных X.

$150 < x < 230$

x ~~78~~ $230-152=$

$$\begin{array}{r} 230 \\ -\,152 \\ \hline 78 \end{array}$$

Ответ: 78

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$2x-1 \ge 0$

$2x \ge 1$

$x \ge \frac{1}{2}$

$8x-12x+6 = -4x+6 = 0$

x	1	2
y	2	-2

$2x-1<0$

$8x-6+12x = 20x-6$

x	1	0
y	14	-6

$-8x^2+6x+7=0$

$D = 36+4\cdot 7\cdot 8 = 260$

$x_1 = \frac{-6+\sqrt{260}}{-16}$

$x_1 = \frac{-6+2\sqrt{65}}{-16}$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{65}}{-8}$

$x_2 = \frac{-3-\sqrt{65}}{-8}$

$x_0 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$30 : 8 = 0{,}375$

$-8 \cdot \frac{3\cdot 3}{8\cdot 8} + \frac{6\cdot 3}{8} + 7 =$

$-\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 =$

$= \frac{9}{8} + 7 =$

$\frac{-11}{-8} = 1\frac{3}{8}$ $1{,}375$

$= \frac{11}{8} + 7 = 8{,}125$

$56 \cdot 4 = 224$

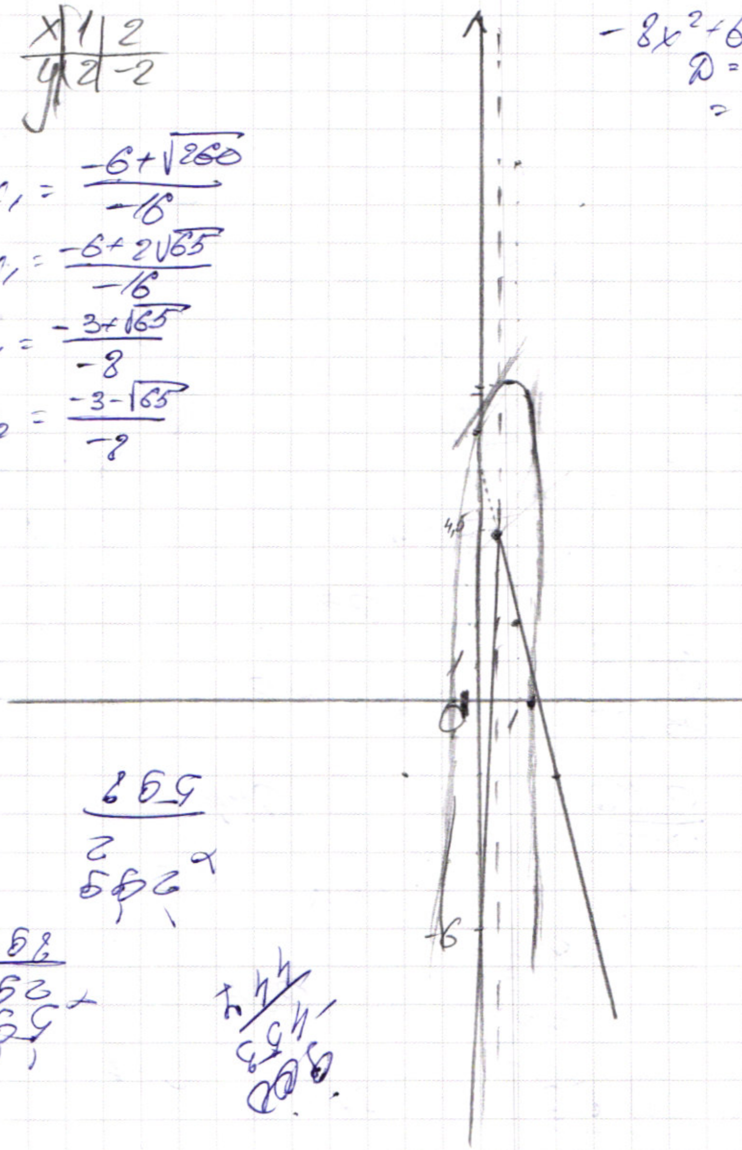
$224 + 36 = 260$

260	2
130	2
65	5
13	

$0{,}125 \cdot 3 = 0{,}375$

$\frac{5}{8}$

$0{,}125 \cdot 5 = 0{,}625$

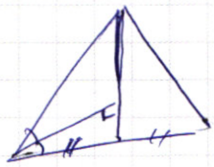


☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{x\cos\alpha}{AC} = \qquad \frac{x\cos\alpha}{3x} = \frac{x\sin\alpha}{CB} = \frac{x\cdot\cos\alpha}{3x}$$



CB ? $\sin\alpha = \frac{CB}{AB}$ $CB =$

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

$x \cdot 3x = x\cos\alpha \cdot$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) a, b, c - геом. пр. $a=k$ $b=kq$ $c=kq^2$

$ax^2-2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$

4-ый чл. пр.

$x_1=\frac{2b+2\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ $x_2=\frac{2b-2\sqrt{b^2-ac}}{2a}$

$x_1=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$ $x_2=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$x_1=\frac{kq+\sqrt{k^2q^2-k^2q^2}}{k}$ $x_2=\frac{kq-\sqrt{k^2q^2-k^2q^2}}{k}$

$\boxed{x_1=q}$ $\boxed{x_2=q}$

т.с. прогрессия вида

k ; kq ; kq^2 ; q

$\frac{kq}{k}=\frac{q}{kq^2}$

$q=\frac{1}{kq}$

$\boxed{kq^2=1}$ $x(y-1)-6(y-1)=(x-6)(y-1)$

3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$ * $x-6y\geq 0$

$x\geq 6y$

$xy-6y-x+6\geq 0$

~~$x-6y=\sqrt{y($~~ ~~$x^2-12x+2y^2-4y+20$~~ $=0$.

$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$ $\begin{cases} x\geq 6 \\ y\geq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x\leq 6 \\ y\leq 1 \end{cases}$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$.

~~$x^2-13xy+x+36y^2-6=0$~~

249
96

247
225

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x-6y)^2 = xy-6y-x+6$

$x^2-12xy+36y^2-xy+6y+x-6=0$

1) $x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$

2) $x^2+2y^2-12x-4y+20=0$ —

$x^2+2y^2-12x-4y+20-x^2+13xy-36y^2-6y-x+6=0$

$-34y^2-10y+13xy-13x+26=0$

$13x(y-1)$

$-34y^2-10y+26=0$

$34y^2+10y-26=0 \mid :2$

$17y^2+5y-13=0$

$D=25+4\cdot13\cdot17$

$13 \cdot 17 = 221$, $221 \cdot 4 = 884$, $884+25=909$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$x(x-12)$

$2y^2-4y+20=0$

$y^2-2y+10=0$

D

$y_1=$ $\quad y_2=$

$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$ $\quad D=$

$x^2-12x+(2y^2-4y+20)=0$

$D=144-4(2y^2-4y+20)=144-8y^2+16y-80=$

$=-8y^2+16y+64= \cancel{-(8y^2-16y+64)}=$

$=-8(y^2-2y+8)$

>0

$\cancel{y^2-2y+8=0}$

$D=$

Ещё раз: $x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$x^2-12x+(2y^2-4y+20)=0$

$D=144-4(2y^2-4y+20)=144-8y^2-16y-80=$

$=64-8y^2-16y=-8(y^2+2y-8)=$

$y^2+2y-8=0$

$D=4+32=36$

$=-8(y-2)(y+4)$

$y_1=\frac{-2+6}{2}\quad y_2=\frac{-2-6}{2}$

$y_1=2\quad y_2=-4$

$x_1=\dfrac{12\pm\sqrt{-8(y-2)(y+4)}}{2}$

$-8(y-2)(y+4)\geq0$

$(y-2)(y+4)\leq0$

$x=6\pm\sqrt{-2(y-2)(y+4)}$

$+ \quad - \quad +$

$-4 \quad 2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{9\cdot 25 - 9\cdot 3\sqrt{134}}{83} + 3 \geq$

$x^2 - 12xy + 36y^2 - xy + 6y + x - 6 = 0$

$x^2 - 13xy + x + 36y^2 + 6y - 6 = 0$

$x^2 - x(13y-1) + (36y^2 + 6y - 6) = 0$

$x^2 - x(13y-1) + 6(6y^2 + y - 1) = 0$

$D = (13y-1)^2 - 24(6y^2 + y - 1) =$

$= 169y^2 - 26y + 1 - 144y^2 - 24y + 24 =$

$= 25y^2 - 50y + 25 = (5y-5)^2$

$x_1 = \frac{1 - 13y \pm \sqrt{(5y-5)^2}}{2}$

$x_1 = \frac{1 - 13y + 5y - 5}{2}$ $\quad x_2 = \frac{1 - 13y - 5y + 5}{2}$

$x_1 = \frac{-8y - 4}{2}$ $\quad \boxed{x_2 = -9y + 3}$

$\boxed{x_1 = -4y - 2}$

4824	2
2412	2
1206	2
603	3
201	3
67	

$201 : 3 = 67$

I

$(-4y-2)^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$16y^2 + 16y + 4 + 2y^2 + 48y + 24 - 4y + 20 = 0$

$18y^2$

$68 \cdot 68 = 4624$

$62 \cdot 62 = 3844$

$68 \cdot 68 = 4624$

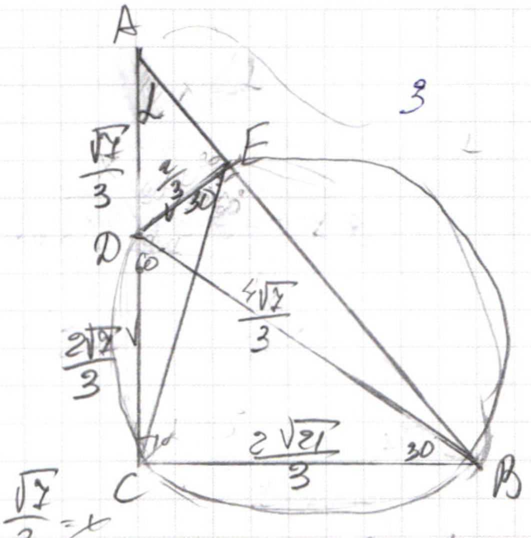
4824

$28 \cdot 83 = 2324$, $2324 + 2500 = 4824$

$28 \cdot 83 = 2324$, $2324 + 2500 = 4824$

$\cos\angle = \frac{3x}{AB}$ $tg\angle = \frac{\sin\angle}{\cos\angle}$

$\frac{3\cdot 2}{2\cdot 5}\sqrt{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$



$\frac{\sqrt{7}}{3} = x$

$180 - 60 - 90 + \angle$

$4\cdot 5 + 4$

$tgBAC$

$tgBAC = \frac{DE}{AE}$

$\Delta DEA \sim \Delta BCA$ $\frac{\cos\angle}{3} = \frac{x\cos\angle}{5x}$

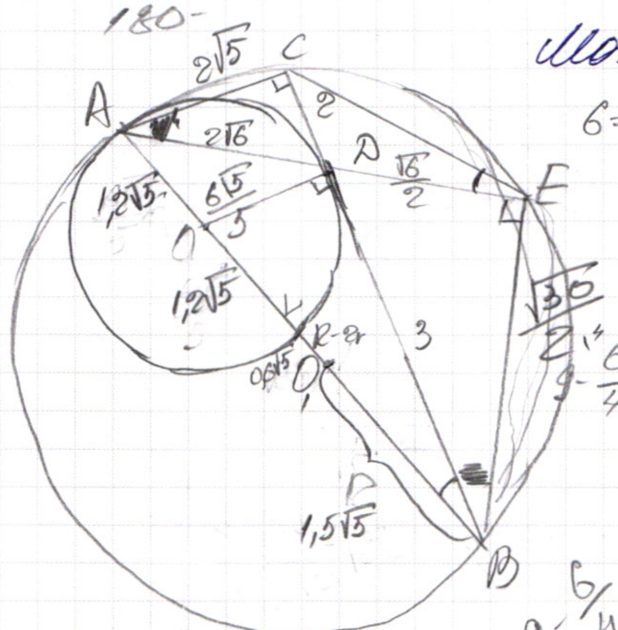
$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$ $\frac{DE}{BC} = \frac{\cancel{x\cos\angle}}{3x} = \frac{x}{AB}$

$AE \cdot AB = 8x^2$

$180 -$

Можно найти S_{DAB}



$6 = 2\sqrt{6}\cdot x$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$

2 случая

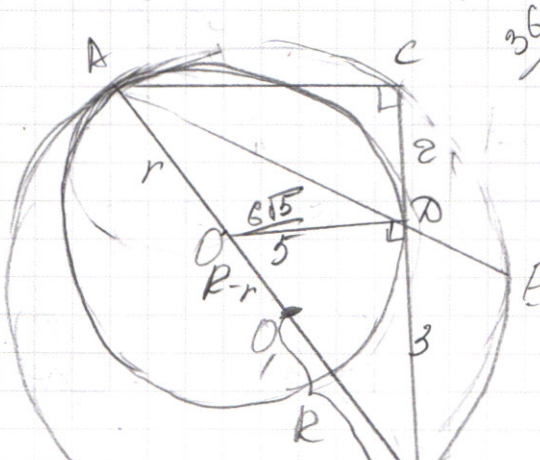
$9 - \frac{6}{4} = \frac{30}{4}$ $\frac{2R-r}{3} = \frac{2R}{5}$

$10R - 5r = 6R$

$4R = 5r$

$9 - \frac{6}{4} = \frac{30}{4}$ $9 = 2R\cdot(2R - 2r)$

$\frac{36-6}{4}$



$\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 1,2

$9 =$

$3\sqrt{5} - 2,4\sqrt{5}$

$9\cdot 5 = 25 + 20$

$3\sqrt{5}$

$45 - 25$

$\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{30}}{2}$ $5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

$5\sqrt{5}$

$\frac{-25 + 3\sqrt{134}}{83}\cdot 6 < \frac{9\cdot 25 + 33\sqrt{134}}{83}$

9 121 144 18 10 ближе к 12

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)