МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, b, c \leftarrow$ геом прогр.

$b = ak$

$c = bk = ak^2$

$b^2 = ak \cdot ak = ac$

$x_1 + x_2 = \frac{2b}{a}$

$ck + \frac{1}{ak} = \frac{2b}{a} \quad | \cdot ak$

$ack^2 + 1 = 2bk$

$ack^2 - 2bk + 1 = 0$

$D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac \Rightarrow D = 0$

$k_1 = \frac{+b + \sqrt{b^2 - ac}}{ac}$

$k_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{ac}$

$k = \frac{b}{ac}$

$c^2 = \frac{b}{a} \cdot b$

$c^2 = \frac{b^2}{a}$

$c^2 = \frac{ac}{a} \Rightarrow c^2 = c$

$c(c-1) = 0$

$c = 0 \qquad c = 1$

$f(22) = 6$, $f(21) = 4$, $f(20) = 4$, $f(19) = 9$, $f(18) = 3$, $f(17) = 8$, $f(16) = 4$, $f(15) = 3$, $f(14) = 4$, $f(13) = 6$, $f(12) = 3$, $f(11) = 5$, $f(10) = 3$

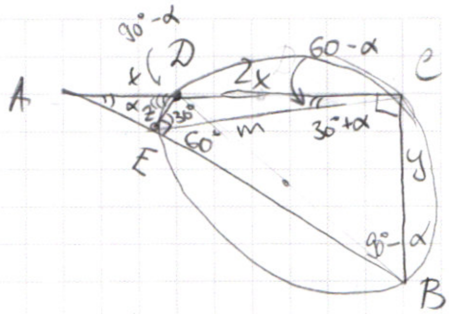
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$x^2 \overset{2\cdot 6}{-12x} + 2y^2 \overset{2\cdot 2}{-4y} + 20 = 0$$



$$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 36 - 2 + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(\quad -1)^2 \quad 36 + 2 - 20 = 18$$

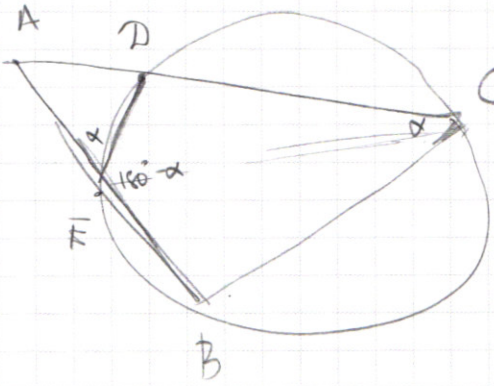
$$\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$\sqrt{(x-6)}$

$$4x^2 = z^2 + m^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

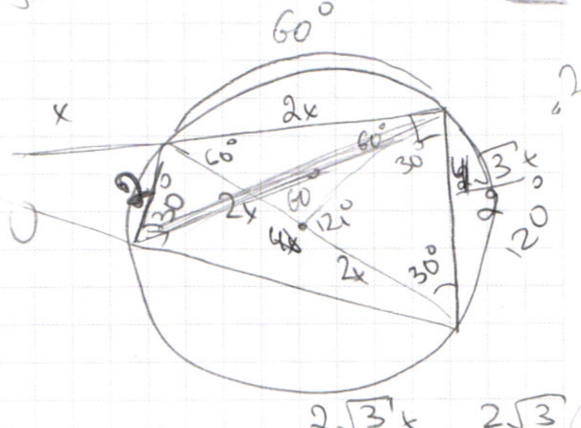
$\boxed{f(7)=3}$ $f(6)=3$ $f(10)=3$ $f(12)=3$ $f(15)=3$ $f(18)=3$

$f(21)=4$ $f(14)=4$ $f(16)=4$ $f(20)=4$



$f(4)=2$ $\boxed{f(5)=2}$ $f(6)=2$ $f(9)=2$

$= t - 6k$



$f(1)=0$ $f(2)=1$ $f(3)=1$

$f(11)=5$ $f(13)=6$ $f(17)=8$ $f(19)=9$ $f(22)$

$$t^2 + t \quad + 2k^2 - 6k + \ldots = 18 + \sqrt{tk}$$

$$\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2\left(k-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\cdot 2 = 18 + \sqrt{tk}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\operatorname{tg} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$2x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

по т. косинусов

$$\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2 = 4 + m^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot m$$

$$\frac{14}{9} = 4 + m^2 - 2\sqrt{3}m$$

$$\cos = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\sin^2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\sin = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{36-14}{9},\ \frac{22}{9}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{4}{3}} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

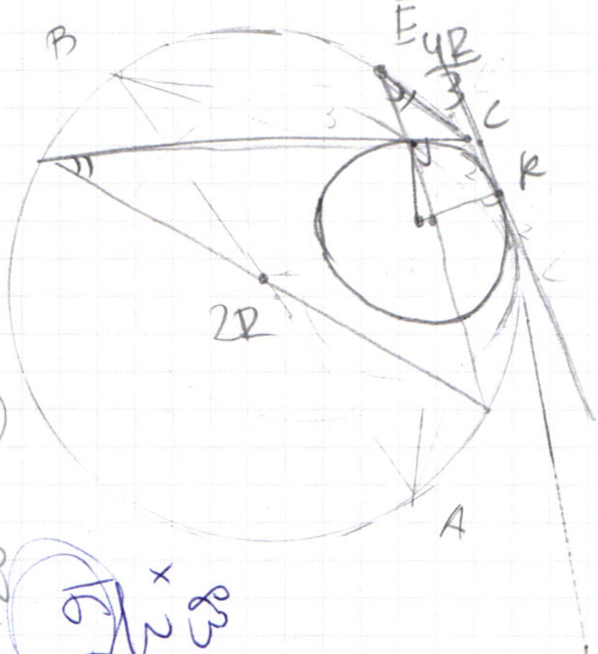
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

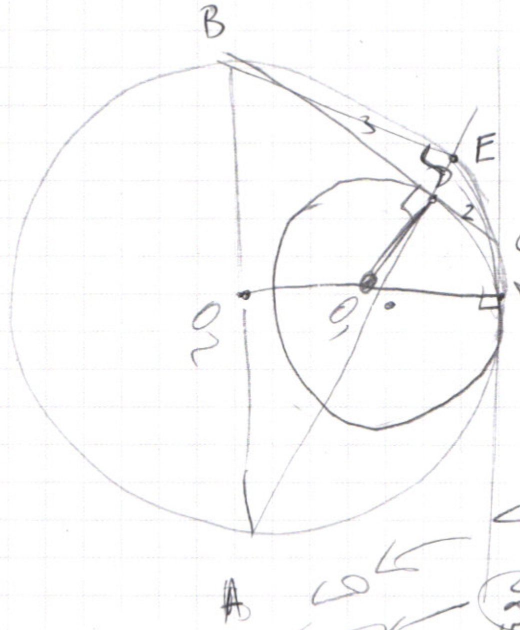
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$27\sqrt{\frac{2}{83}} - 6\cdot 3\sqrt{\frac{2}{83}} = 9\sqrt{\frac{2}{83}}$

$27\sqrt{\frac{2}{83}}$

$\sqrt{\frac{2}{83}}\cdot 3$

$\sqrt{\frac{2}{83}}$

$a = \sqrt{-276}$

$a = -24+20 = 0$

$\frac{a}{2}^{x} \; 83$

$8x - 6|2x-1| \le -8x^2 + 6x + 7$

$ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 + x(a-6) + (b-7) \le 0$

$6 - a - \sqrt{(a-6)^2 - 4\cdot 8(b-7)} \le -\frac{1}{2}$

$D = b^2 - ac = (a-6)^2 - 4(b-7)\cdot 8$

$\sqrt{} \geqslant 6\frac{1}{2} - a = \frac{13}{2} - a$

$\frac{6 - a - \sqrt{}}{16}, \quad \frac{6 - a + \sqrt{}}{16}$

$a^2 - 12a + 36 - 32b + 224 \geqslant \frac{169}{4} - 13a + a^2$

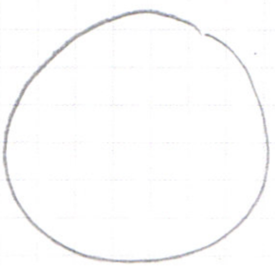
$260 - 32b \geqslant 42\frac{1}{4} - a$

$a < \frac{13}{2}$

$\frac{13}{2} > a \geqslant 32b - 217\frac{3}{4}$

$a > \frac{13}{2}$

$(a-6)^2 \geqslant 32(b-7)$



$32 \cdot 7 = 224$

$224 + 36 = 260$

$43\frac{3}{4} - 260$

$260 - 43 = 217$

$169 : 4 = 42$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

t и k одного знака

$$\begin{cases} t^2 + 2k^2 = 18 \\ t - 6k = \sqrt{tk} \end{cases}$$

$k = \pm 1$

$t - 6k = \sqrt{tk}$

$tk \neq 0$ т.к. если $k \neq 0$ иначе $0 - 6k = \sqrt{0} \Rightarrow k = 0$

$0 + 2 \cdot 0^2 = 18$ ✗

$k \neq 0$ аналогично

$\Rightarrow \sqrt{tk} \neq 0$

$6 \cdot 18 \cdot 18$: 144, 18, 324

$t^2 = 18 - 2k^2$

t

$\pm\sqrt{18 - 2k^2}$; $\Rightarrow k > 0$

$+\sqrt{\ }$ t

$\sqrt{18-2k^2} - 6k = \sqrt{\sqrt{18-2k^2}\,k}$

$18 - 2k^2 - 26k\sqrt{\ } + 36k^2 = \sqrt{18-2k^2}\,k$

$18 + 34k^2 = (k + 12k)\sqrt{18-2k^2}$ ($13k$)

$324 + 2 \cdot 18 \cdot 34k^2 + 34^2k^4 = 169k^2 \cdot (18 - 2k^2)$

$324 + 1224k^2 + 1156k^4 =$

$34 \cdot 36 = 204$, 102, 1224; $34 \cdot 34 = 136$, 102, 1156; $169 \cdot 18$

$\dfrac{t}{\sqrt{tk}} - 6\dfrac{k}{\sqrt{tk}} = \dfrac{\sqrt{tk}}{}$ $(k > 0)$

$$\boxed{\frac{t}{k} - 6 = \sqrt{\frac{tk}{k^2}}}$$

$\dfrac{-4}{-1} - 6$

$\dfrac{t}{k} - \sqrt{\dfrac{t}{k}} - 6 = 0$

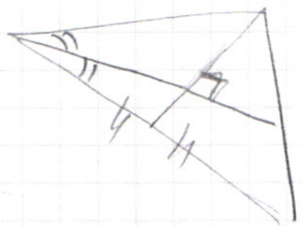
$p = \sqrt{\dfrac{t}{k}}$, $p > 0$

$p^2 - p - 6 = 0$

$$\begin{cases} p_1 p_2 = -6 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

$p_1 = -2$

$p_2 = 3$



$\Rightarrow \sqrt{tk} = 3$

$tk = 9$

$k = \dfrac{9}{t}$

$\cancel{t = \dfrac{9}{k}}$

$\sqrt{\dfrac{t}{k}} = 3$

$\dfrac{t}{k} = 3$

$t = 3k$

$t^2 + 2\left(\dfrac{9}{t}\right)^2 = 18$

$t^2 + \dfrac{162}{t^2} - 18 = 0 \quad | t^2$

$81 \cdot 2$

$(9 \cdot 18) = 3\cancel{3}$

$t^4 - 18t^2 + 162 = 0$

$n = t^2$, $n > 0$

$n^2 - 18n + 162 = 0$

$D = b^2 - 4ac$ ✗

$$\begin{cases} t = -4 \\ k = -1 \end{cases}$$

$-4 + 6 = \sqrt{4}$ +

$\dfrac{-4}{-1} - \sqrt{4} - 6 = 0$

$k < 0$

$\dfrac{t}{k} - 6 = -\sqrt{\dfrac{kt}{k^2}}$

$\dfrac{t}{k} + \sqrt{\dfrac{t}{k}} - 6 = 0$

$\dfrac{t}{k} = 4$

$t = 4k$

$(4k)^2 + 2k^2 = 18$

$18k^2 = 18$

$k = \pm 1$

$t = \pm 4$

$(3k)^2 + 2k^2 = 18$

$9k^2 + 2k^2 = 18$

$11k^2 = 18$

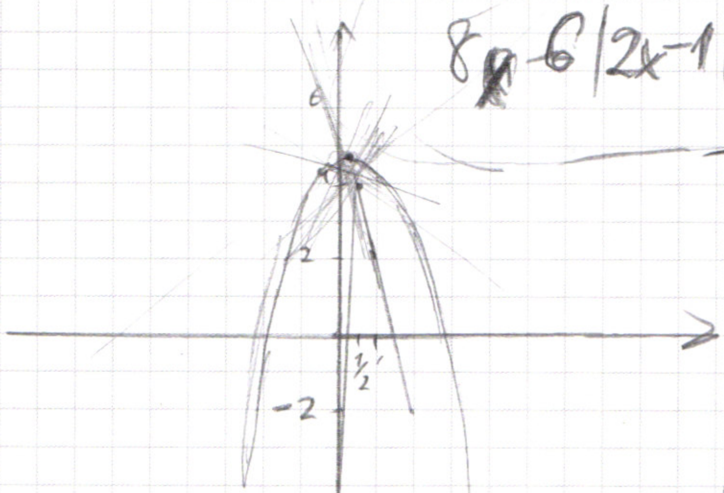
$k = \pm 3\sqrt{\dfrac{2}{11}}$

$t \ldots\ldots$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$8x - 6|2x-1| = ab$



$-\frac{1}{2}$

x	-1	0	1	2
y				

$-8-6|-2-1| =$

$= -8+18 = 10$

$8\cdot\frac{1}{2}$ $8-6|2\cdot1-1|$

$6-4x = ax+b$

$(a+4)x = 6-b$

$x_1 = \frac{6-b}{a+4}$

$ax+b \le -8x^2+6x+7$

2

$16-6|4-1| =$

$= -2$

функции непрерывны

$-8x^2+6x+7$

$ax+b \le -8x^2+6x+7$

$x_0 = \frac{-6}{-8\cdot2} = \frac{3}{8}$

$x > \frac{1}{2}$

$8x^2 + x(a-6) + b - 7 \le 0$

$D = (a-6)^2 - 32(b-7) \ge 0$

$-\frac{9}{8} + \frac{6\cdot3}{8} + 7 =$

$8x - 6\cdot 2x + 6 =$

$= 6-4x$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{16}$

$= -\frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 7 =$

$x < \frac{1}{2}$

$8x + 12x + 6 =$

$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{16}$

$= -\frac{27}{8} + 7 = 7 - 3\frac{3}{8} = 4\frac{5}{8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + m^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot m$$

$$\frac{28}{9} = \frac{4}{9} + m^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot m$$

$$m^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}m - \frac{24}{9} = 0$$

$$m^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}m - \frac{8}{3} = 0$$

по т., обр. т. Виета:

$$\begin{cases} m_1 m_2 = -\frac{8}{3} \\ m_1 + m_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad -\frac{8}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$m_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ (Ø), т.к. расстояние не может быть отрицательным

$$\Rightarrow EC = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot CE\cdot ED \cdot \sin\angle CED$$

$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sin 30^\circ = \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\boxed{S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

Ответ: а) $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6y = x-6+6-6y = (x-6)-6(y-1)$

$xy-6y-x+6 = y(x-6)-1(x-6) = (y-1)(x-6)$

$x^2+2y^2-12x-4y+20 = (x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)-36-2+20 =$

$= (x-6)^2+2(y-1)^2-18$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

Пусть $t=x-6$ $\quad$ t и k одного знака, т.к. $\sqrt{tk}$ существует

$k=y-1$

$$\begin{cases} t-6k=\sqrt{tk} \\ t^2+2k^2=18 \end{cases} \Rightarrow t\geqslant 6k, \text{ т.к } \sqrt{tk}\geqslant 0$$

$t-\sqrt{tk}-6k=0$

1) $k=0 \Rightarrow t=0$ $(t-0-0=0)$

(Ж), т.к. $0^2+2\cdot 0^2\neq 18$

2) $k>0$

$t-6k-\sqrt{tk}=0 \quad |:k$

$\frac{t}{k}-6-\sqrt{\frac{tk}{k^2}}=0$

$\frac{t}{k}-\sqrt{\frac{t}{k}}-6=0$

Пусть $g=\sqrt{\frac{t}{k}}$, $g\geqslant 0$

$g^2-g-6=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

по т., обр. к т. Виета

$\begin{cases} g_1 g_2 = -6 \\ g_1 + g_2 = 1 \end{cases}$ $\quad g_1 = 3$, $\quad g_2 = -2$ (W)

$\Rightarrow \sqrt{\frac{t}{k}} = 3 \Rightarrow t = 9k$

$t^2 + 2k^2 = 18$

$(9k)^2 + 2k^2 = 18$

$83k^2 = 18$

$k^2 = \frac{18}{83}$

$\Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{18}{83}}$

$k_1 = 3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$t_1 = 27\sqrt{\frac{2}{83}}$; $\quad 27\sqrt{\frac{2}{83}} > 6 \cdot 3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$k_2 = -3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$t_2 = -27\sqrt{\frac{2}{83}}$

(W), т.к. $t_2 \cancel{>} 6k_2$

$\left(-27\sqrt{\frac{2}{83}} < -18\sqrt{\frac{2}{83}}\right)$

$y - 1 = 3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$y = 3\sqrt{\frac{2}{83}} + 1 = \frac{3\sqrt{2 \cdot 83}}{83} + 1 = \frac{3\sqrt{166}}{83} + 1$

$x - 6 = 27\sqrt{\frac{2}{83}}$

$x = 27\sqrt{\frac{2}{83}} + 6 = \frac{27\sqrt{166}}{83} + 6$

3) $k < 0$

$t - \sqrt{tk} - 6k = 0 \; |: k$

$\frac{t}{k} + \sqrt{\frac{t}{k}} - 6 = 0$

$p = \sqrt{\frac{t}{k}}, \ p \geq 0$

$p^2 + p - 6 = 0$

$\begin{cases} p_1 p_2 = -6 \\ p_1 + p_2 = -1 \end{cases}$ $\begin{matrix} p_1 = -3 \ (x) \\ p_2 = 2 \end{matrix}$

$\sqrt{\frac{t}{k}} = 2$

$t = 4k$

$t^2 + 2k^2 = 18$

$(4k)^2 + 2k^2 = 18$

$18k^2 = 18$

$k = \pm 1$

$k_3 = 1$

$t_3 = 4$

$4 < 6 \cdot 1$

$\Rightarrow t_3 < 6k_3 \ (x)$

$k_4 = -1$

$t_4 = -4$; $-4 > 6 \cdot (-1)$

$\begin{cases} y - 1 = -1 \\ x - 6 = -4 \end{cases}$ $\begin{matrix} y = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$

Ответ. $(2; 0)$; $\left(\frac{27\sqrt{166}}{83} + 6; \ \frac{3\sqrt{166}}{83} + 1\right)$

№7

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(1) = f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(1/y)$

$f(1) = [\frac{1}{2}] = 0$

$\Rightarrow f(1/y) = -f(y)$

$\Rightarrow f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

Таким образом, получаю, что всего $31+60+69=160$ пар

Ответ: 16 пар.

№6

Построю графики данных функций

$y=-8x^2+6x+7$ граф. парабола ветви вниз

$x_0=\frac{-6}{-8\cdot 2}=-\frac{3}{8}$

$y_0=-8\left(-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{6\cdot 3}{8}+7=-\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+7=7-\frac{27}{8}=7-3\frac{3}{8}=$

$=3\frac{5}{8}$

$y=8x-6|2x-1|$; $x<\frac{1}{2}$ $y=8\cdot\frac{1}{2}-6\left(\frac{1}{2}\cdot 2-1\right)=4$

$x>\frac{1}{2}$

$2x-1>0$

$x=1$

$y=2$

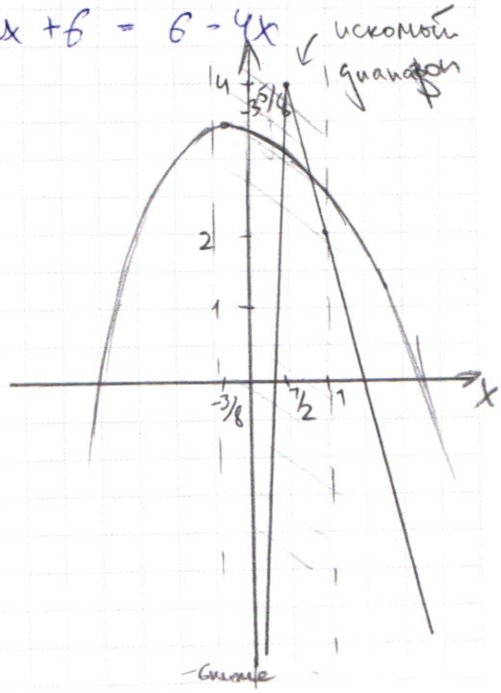
$8x-6|2x-1|=8x-6(2x-1)=8x-12x+6=6-4x$

$x<\frac{1}{2}$

$x=0; y=-6$

$|2x-1|=(1-2x)$

$8x-6(1-2x)=8x-6+12x=20x-6$



Как можно видеть из графиков, в части искомого диапазона

$8x-6|2x-1|>8x^2+6x+7$

$\Rightarrow$ таких чисел a и b нет

Ответ: таких пар не существует

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Т.к. a, b, c – члены геом. прогрессии, то $b^2 = ac$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = (2b)^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 0$, т.к. $b^2 = ac$

$\Rightarrow x = \dfrac{-(-2b)}{2a} = \dfrac{b}{a}$

$x = d$, где d – четвёртый член геом. прогрессии

$\Rightarrow d = \dfrac{b}{a}$

т.к. геом. прогрессия, то

$c^2 = db \Rightarrow c^2 = \dfrac{b}{a} \cdot b \Rightarrow c^2 = \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow c^2 = \dfrac{ac}{a}$ $(b^2 = ac)$

получается, что $c^2 = c$; $c^2 - c = 0$, $c(c-1) = 0$

$\Rightarrow$ либо $c = 0$, то есть все члены геом. прогрессии $= 0$,

либо $c = 1$.

Если $c = 0$, то корень уравнения $\forall x$, включая $x = 0 = d$

Ответ: 0; 1.

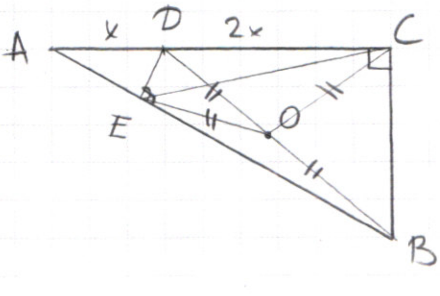
№4

Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг., $\angle C = 90°$ (AB – гипотенуза); $D \in AC$, $E \in AB$

$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{3}$, $DE \perp AB$; $\angle CED = 30°$, $AC = \sqrt{7}$

Найти: а) $tg \angle BAC$ – ?

б) $S_{\triangle CED}$ – ?



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

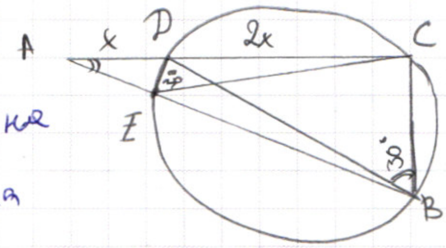
(Нумеровать только чистовики)

Решение: 1) Отмечу т. O – середину BD, тогда CO – медиана прямоуг. тр-ка $\triangle CBD$, $\angle C = 90^\circ$ $\Rightarrow CO = \frac{1}{2} BD$

$\triangle DEB$ – прямоуг., т.к $DE \perp AB$; EO – медиана $\Rightarrow EO = \frac{1}{2} BD = CO$

$EO = CO = BO = OD = \frac{1}{2} BD \Rightarrow$ через них (точки E, D, C, B) и могу провести окружность с центром в т. O и радиусом $R = OD$

$E, D, C, B \in$ Окр. $\Rightarrow \angle CED$ – вписанный, опирается на $\smile CD \Rightarrow$ впис. $\angle CBD$, опир. на дугу $\smile CD$, будет ему равен по св-ву впис. угла $\angle CBD = 30^\circ$



2) Пусть $AC = 3x$, тогда $AD = \frac{1}{3} AC = x \Rightarrow CD = AC - AD = 2x$

$\triangle CBD$ – прямоуг. $\Rightarrow CB = \frac{CD}{\sin 30^\circ} \cdot \cos 30^\circ = \frac{2x}{1/2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}x$

3) $\triangle ABC$ – прямоуг. $\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\boxed{tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

4) $\triangle ADE$ – прямоуг., т.к. $DE \perp AB \Rightarrow DE = AD \cdot \sin\angle BAC = \sin\alpha \cdot AD$

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha = 1 + \frac{1}{tg^2\alpha}$; $tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $ctg\,\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{7}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$AD = \frac{1}{3} AC = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow DE = AD \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{3}$

5) В $\triangle CED$ $ED = \frac{2}{3}$; $CD = AC - AD = \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $\angle CED = 30^\circ$

$\Rightarrow$ по т. косинусов $CD^2 = CE^2 + DE^2 - 2 \cdot \cos 30^\circ \cdot ED \cdot CE$

Пусть $CE = m$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x/y) = f(x) - f(y) < 0$

$\Rightarrow$ надо найти такие x и y, что $f(x) < f(y)$

$f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$

$f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = [\frac{5}{2}] = 2$

$f(6) = f(3) + f(2) = 2$

$f(7) = [\frac{7}{2}] = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(5) + f(2) = 3$

$f(11) = [\frac{11}{2}] = 5$

$f(12) = f(4) + f(3) = 3$

$f(13) = [\frac{13}{2}] = 6$

$f(14) = f(7) + f(2) = 4$

$f(15) = f(5) + f(3) = 3$

$f(16) = f(8) + f(2) = 4$

$f(17) = [\frac{17}{2}] = 8$

$f(18) = f(9) + f(2) = 3$

$f(19) = [\frac{19}{2}] = 9$

$f(20) = f(10) + f(2) = 4$

$f(21) = f(7) + f(3) = 4$

$f(22) = f(11) + f(2) = 6$

Несложно заметить, что $f(x) < f(y)$, если x – делитель y, т.е. $y \vdots x$

Для $x = 2$ таких чисел y 10 ($y = 4; 8; 6; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22$)

$x = 3$ – 6 чисел ($y = 6; 9; 12; 15; 18; 21$)

$x = 4$ – 4 числа ($y = 8; 12; 16; 20$)

$x = 5$ – 3 числа ($y = 10; 15; 20$)

$= 6$ – 2 числа ($y = 12; 18$)

$= 7$ – 2 числа ($y = 14; 21$)

$= 8$ – 1 число ($y = 16$)

для $x = 9; 10$ или 11 таких чисел по одному (18; 20 и 22 соотв.)

всего 31 пара делителей

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

еще можно заметить, что для любое простое число ~~для~~ ≥ 5

$f(y) > f(x)$, $x < y$ $(x > 1)$

для $y = 5$ это $x = 2; 3; 4$ – 3 пары
$y = 7$ это $x \in [2; 6]$ – 5 пар.
$y = 11$ – $x \in [2; 10]$ – 9 пар
$y = 13$ – $x \in [2; 12]$ – 11 пар
$y = 17$ – $x \in [2; 16]$ – 15 пар
$y = 19$ – $x \in [2; 18]$ – 17 пар.

всего 60 пар.

Так же есть случаи, которые нельзя отнести к этим двум группам

1) $x = 3$, $y = 4$ – 1 пара
2) $x = 3$, $y = 8, 10, 14, 16, 20, 22$ – 6 пар
3) $x = 4$, $y = 21, 10, 15, 18, 14, 22$ – 6 пар
4) $x = 5$, $y = 22, 21, 14, 16, 18, 8, 12$ – 7 пар
5) $x = 6$, $y = 8, 10, 15, 14, 16, 20, 22, 21$ – 8 пар
6) $x = 7$, $y = 16, 20, 22$ – 3 пары
7) $x = 8$, $y = 14, 20, 22, 21$ – 4 пары
8) $x = 9$, $y = 10, 12, 15, 14, 16, 20, 22, 21$ – 8 пар
9) $x = 10$, $y = 14, 16, 22, 21$ – 4 пары
10) $x = 12$, $y = 14, 16, 20, 22, 21$ – 5 пар
11) $x = 14$, $y = 22$ – 1 пара
12) $x = 16$, $y = 22$ – 1 пара
13) $x = 15$, $y = 16, 14, 20, 22, 21$ – 5 пар
14) $x = 18$, $y = 14, 16, 20, 22, 21$ – 5 пар
15) $x = 20$, $y = 22$ – 1 пара
16) $x = 21$, $y = 22$ – 1 пара
17) $x = 2$, $y = 9, 15, 21$ – 3 пары

всего 69 пар

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)