МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

+ 1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии. 1

+ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан. 74

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

+ 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

+ 5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

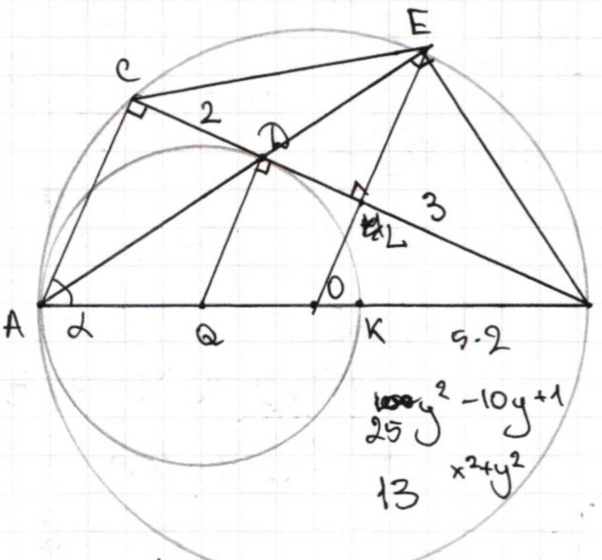
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$R, r - ?$

$S_{BACE} - ?$

$CD = 2$

$BD = 3$

$\frac{1}{0,2} = \frac{10}{2} = 5$

$3^2 = BK \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$

$\frac{2R - r}{3} = \frac{2R}{2+3}$ $\quad \frac{10-6}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{5}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \sin\alpha = 10R$

$25y^2 - 10y + 1$

$13 \quad x^2 + y^2$

$AC = AB\cos\alpha$

$S_{ABC} = \frac{5AC}{2}$

$14 \cdot \frac{1}{2} - 1 =$

$= 7 - 1 = 6$

$-L + 1$

$\frac{KL}{QD} = \frac{R}{2R - r} \Rightarrow KL$

$QD = r$

$EL = R - KL$

$\boxed{R = \frac{3}{2}\sqrt{5} \quad r = \frac{6}{5}\sqrt{5}}$

$8x - 6|2x - 1| \le ax + b$

$(x-6) + (6 - 6y)$

$x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

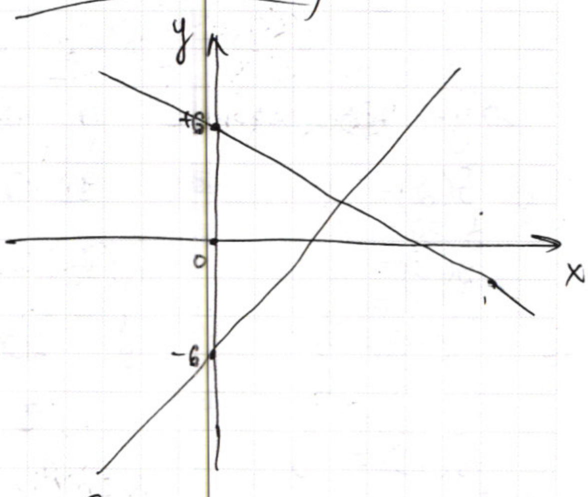
$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 8x - 6 + 12x \le ax + b \end{cases}$

$2x - 1 \geq 0$

$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 8x - 12x + 6 \le ax + b \end{cases}$

$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 20x - 6 \le ax + b \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -4x + 6 \le ax + b \end{cases}$



$x_B = \frac{3}{8}$

$y_B = -8 \cdot \frac{9}{8^2} + \frac{3 \cdot 6}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 =$

$= \frac{9}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$

$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12xy = xy + 6y + x - 6 \end{cases}$

$x^2 + 2xy + y^2$

$2x^2 + 36y^2 + 2y^2 - 13xy - 11x + 2y + 14 = 0$

$36y^2 + 36 - 72y - y^2 - 4 + 4y - y^2 + 20 =$

$= 34y^2$

$-12 \quad -1$

$k^2 = 20 - y^2 - (y-2)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$(x-6)^2+(y-6)^2-2(x-6)(y-6)=(x-6)(y-1)$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$xy-6y-x+6 \geq 0$

$x-6y \geq 0$

$(x-6)^2+(y-2)^2+y^2-20 \geq 6y$

$x^2-12x+36+y^2-4y+4+y^2-20=0$

$(x-6)^2+(y-2)^2+y^2-20=0$

$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$

$(x-6y)^2=2y(2-y)$

$\frac{y-1}{x-6}=\frac{(x-6y)^2}{2-y}$

$x-6y=(x-6)+(6-y)$

$((x-6)-(y-6))^2=(x-6)^2+(y-6)^2-$

$-2(x-6)(y-6)$

$(y-6)^2-2(x-6)(y-6)=(x-6)(y-1)-2y(2-y)$

$(y-6)^2=(x-6)(3y-7)-2y(2-y)$

$(x-6)^2+(y-2)^2+y^2-20=0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

$19-4=15$

9

$2 \leq xy \leq 22$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$\forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) \geq 0$

$f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

1 1 2 2 2 3 3 2 3

3 6 4 3 4 8 3 9

4 4 6

$f(x)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(3)+f\left(\frac{1}{3y}\right)=1+f\left(\frac{1}{3y}\right)=1+f\left(\frac{1}{2y}\right)$

$f\left(\frac{1}{3y}\right)=f\left(\frac{1}{2y}\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)-1$

$2+\cancel{4}+\cancel{6}+4+$

Если $y=1$, то $f\left(\frac{1}{2y}\right)=-1$, $\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$

$+1+2+1+1$

21 $\quad 38$

$+118$

54

172

$f(x)<f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{p}{py}\right)=f(p)+f\left(\frac{1}{py}\right)$

10 $\quad 80+38=118$

$0=f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right)=-f(p)$

$22-2+1=21$

$\Rightarrow y$ — ~~произведение~~ p_i.

$\sum f(p_i)<11$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(5)=2$

$f(7)=3$

$f(11)=5$

$f(13)=6$

$f(17)=8$

$f(19)=9$

$49-36=13$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=\sum f(p_i)-\sum f(p_j)$

$-28y+12y=-16y$

$\frac{13}{3}$

9 1 1

8 2

7

$2\cdot 3^2=$

$y-6+y-1=2y-7$

$(x-6)^2-(x-6)(2y-7)+(y-6)^2=0$

$3y^2-16y+13=0$

$d=64-39=25$

$y=\frac{8\pm 5}{3}$

$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\frac{13}{3} \end{array}\right.$

$d=(2y-7)^2-(y-6)^2=4y^2-y^2+13-16y=$

$=3y^2-16y+13$

$127+54=$

$x-6=\frac{2y-7\pm(y-1)(y-\frac{13}{3})}{}$

$(2y-7)^2+$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 a

$b = ad$

$c = ad^2$

$-16 - 4$

$(y-4)(y+4) +$

$+ (y-4)($

$\cancel{ax^2+bx+c=0}$

$D = b^2 - 4ac = a^2d^2 - 4a^2d^2 = -3a^2d^2$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$ad^3 = \dfrac{-ad \pm \sqrt{a^2d^2 - 4a^2d^2}}{2a}$

$d^3 = -d \pm$

$\times 169 \cdot 9 = 1521$

$ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 + (a-6)x + b - 7 \le 0$

$D = (a-6)^2 - 32(b-7)$

$2(y+2) \quad -8$

$2(y-4)$

$(y-4)(y+4)$

$(y-2-2)(y-2+2)$

$(y-4)6y$

$2(y-4)(y+2)$

2

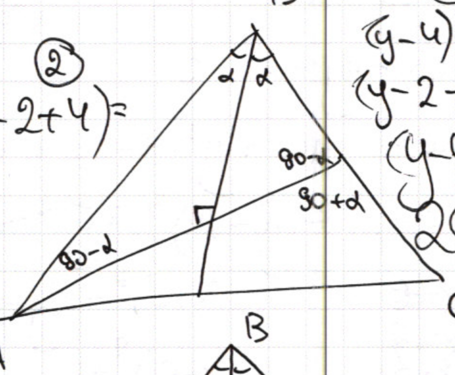
$(y-2-4)(y-2+4) = (y-6)(y-2)$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$\cancel{a}x^2 - 2\cancel{a}dx + \cancel{a}d^2 = 0$

$x^2 - 2dx + d^2 = 0$

$\cancel{\frac{D}{4} = d^2 - d^2}$



$x-6 \qquad (x-d)^2 = 0 \Rightarrow x = d$

$x_4 = d$

$d = ad^3$

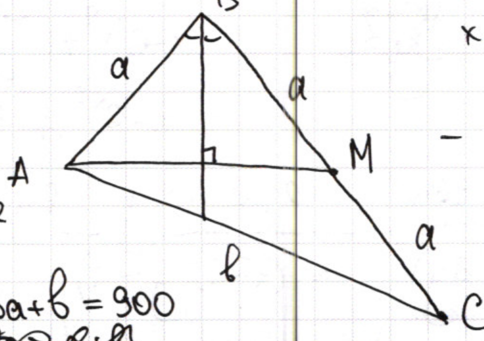
$1 = ad^2 \Rightarrow x_3$

$x > 6y$

$x > 0$

$y > 0$

$x^2 > (6y)^2$



$\times 189 \cdot 2 = 378$

$378 - 169 = 209$

$612 + 1521 = 2133$

$x = -\sqrt{20 - (y-2)^2 - y^2} + 6$

$x^2 \le 20 - (y-2)^2 - y^2 + 36$

$-36y^2$

$\begin{cases} 3a+b = 900 \\ a+b > 2a \\ 2a+b > a \\ 3a > b \end{cases} \Rightarrow b > a$

$3a > b > a$

$25 \cdot 9 = 180 + 45 = 225$

$20 - y^2 - 4 + 4y - y^2 \ge 0$

$-2y^2 + 4y + 16 \ge 0$

$2y^2 - 4y - 16 \le 0$

$4 + 36$

$900 < 3a + b > 2b$

$900 > 2b \Rightarrow b > 450$

$900 = 3a + b > 4a$

$a < \dfrac{900}{4} = 225$

$3a > b > 450$

$a > 150$

$225 - 151 = 74$

$151 \le a \le 224$

$224 - 151 + 1 = 225 - 151 = 74$

$18a^2 + 36b^2 - 12^2 = 0$

$17a^2 - 18^2 - 13ab$

$17 \times 18 = 136 + 17 = 306$

$17 \times 17 = 119 + 17$

189

$13 \times 13 = 39 + 13$

169

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$AD : AC = 1:3$

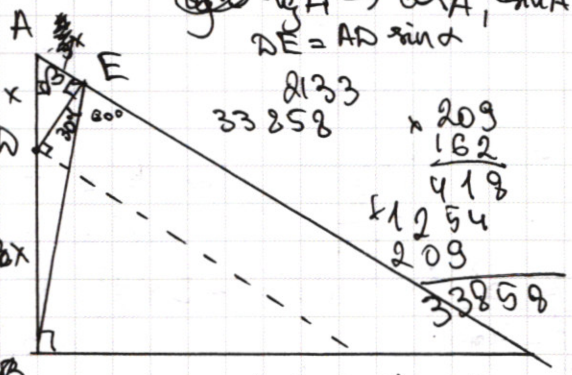
$\angle CED = 30^\circ$

$tg \angle BAC - ?$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$tg A \Rightarrow \cos A, \sin A \Rightarrow AE = \frac{AC}{3}$

$DE = AD \sin\alpha$



$\frac{2x}{\sin 30^\circ} = \frac{DE}{\sin\alpha}$

$4x = \frac{DE}{\sin\alpha}$

$\angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ - \alpha = 60^\circ - \alpha$

$DE = x\sin(60^\circ - \alpha)$

2133

33858

$\times 209$, 162, 418, 1254, 209, 33858

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB}$

$\frac{AE}{3x} = \frac{x}{AB}$

$\frac{\sqrt3}{2} tg\alpha - \frac{1}{2}$

2420000 2200^2

121   $11^2 \cdot 2^2 \cdot 100^2$

$4 = \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 60 \cos\alpha - \cos 60 \sin\alpha}{\sin\alpha} =$

$AE \cdot AB = 3x^2$

$\frac{x}{AB} = \frac{DE}{CB}$

$\frac14 + \frac12 = \frac34$

$\frac34 \cdot \frac{2}{\sqrt3}$

$\beta = 60^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 60^\circ - \beta$

$4 = \frac{\sin\beta}{\sin(60^\circ - \beta)}$

$\frac14 = \frac{\sqrt3}{2} tg\beta - \frac12$

$tg\beta = \left(\frac14 + \frac12\right)\frac{2}{\sqrt3} = \frac{3}{2\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{2}$

3) $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36 - 16 + y^2 - 4y + 4 + y^2 = 0$

$\cancel{(x-6)^2 + (y-2)^2 + y^2 = 0}$

$\cancel{x=6}$, $\cancel{y=2}$, $\cancel{y=0}$

$(y-2)(y+2)$

$(x-6)^2 + (y-2)^2 + \cancel{(y-2)(y+2)} = 0$

$(x-6)^2 + (y-2)(y - 2 + y + 2) = 0$

$(x-6)^2 + 2y(y-2) = 0$

$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6 = y(x-6) - (x-6) = (x-6)(y-1)$

$\boxed{\begin{cases} (x-6y)^2 = (x-6)(y-1) \\ (x-6)^2 + 2y(y-2) = 0 \end{cases}}$

$\frac{(x-6)^2}{(x-6)(y-1)} = \frac{2y(2-y)}{(x-6y)^2}$

$(x-6)(x-6y)^2 = 2y(2-y)(y-1)$

$2y^2 - 2y + (x-6)^2 = 0$

$d = 1 - 2(x-6)^2 \geq 0$

$1 \geq 2(x-6)^2$

$\frac12 \geq (x-6)^2$

$\sqrt{\frac12} \geq |x-6|$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2(x-6)^2}}{2}$

$- 225$, 151, 74

$100 : 4 = 25$

$25 \cdot 9 = 180 + 45 = 225$

$300 < 2a$

$150 < a$

$x^2 - 12x + 36 + x^2 + 36y^2$

$\begin{cases} x^2 + 36y^2 - 12y - xy + 6y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$34y^2 - 12y - xy + 6y + x - 6 + 12x + 4y - 20 = 0$

$34y^2 - 2y - xy + 13x - 20 = 0$

$2x^2 + 38y^2 - 12x - 12y + 2y - xy + x + 14 = 0$

$2x^2 + 38y^2 - 12x - 10y - xy + x + 14 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{\text{Задача 7}}$.

$\forall y \in \mathbb{N}$ $\forall$ простого p $\quad f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{p}{py}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{py}\right)$

$f(1) = f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

Если $y = 1$, то $0 = f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p)$

Любое натуральное число x, y можно представить в виде произведения простых чисел. Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$.

Первое слагаемое равно сумме функций от всех простых делителей x, второе – сумме функций от всех простых делителей y со знаком минус.

Каждое из чисел x, y не превосходит 22. Выпишем все $f(p)$, где p – простое число ≤ 22

$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(5) = 2$
$f(7) = 3$
$f(11) = 5$
$f(13) = 6$
$f(17) = 8$
$f(19) = 9$

Рассмотрим все ~~задачи~~ варианты для x, y:

$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 2f(2) = 2$
$f(5) = 2$
$f(6) = f(2) + f(3) = 2$
$f(7) = 3$
$f(8) = 3f(2) = 3$
$f(9) = 2f(3) = 2$
$f(10) = f(2) + f(5) = 3$
$f(11) = 5$
$f(12) = 2f(2) + f(3) = 3$
$f(13) = 6$
$f(14) = f(2) + f(7) = 4$
$f(15) = f(3) + f(5) = 3$
$f(16) = 4f(2) = 4$
$f(17) = 8$
$f(18) = f(2) + 2f(3) = 3$
$f(19) = 9$
$f(20) = 2f(2) + f(5) = 4$
$f(21) = f(3) + f(7) = 4$
$f(22) = f(2) + f(11) = 6$

Сумма	Кол-во чисел с этой суммой
1	2
2	4
3	6
4	4
5	1
6	2
8	1
9	1

Всего чисел: 21

Продолжение на стр. № 6

Теперь для всех x посчитаем кол-во y с большей суммой. Это и будет кол-во подходящих пар.

$2\cdot(21-2)+4\cdot(21-2-4)+6\cdot(21-2-4-6)+4(21-2-4-6-4)+$
$+1\cdot(21-2-4-6-4-1)+2(21-2-4-6-4-1-2)+$
$+1(21-2-4-6-4-1-2-1)+1\cdot(21-2-4-6-4-1-2-1-1)=$
$=2\cdot19+4\cdot15+6\cdot9+4\cdot5+1\cdot4+2\cdot2+1\cdot1+1\cdot0=$
$=38+60+54+20+4+4+1=118+54+9=172+9=181$

Ответ: 181.

Задача 3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$\boxed{x-6y\geq0}$

$$\begin{cases} (x-6+6-6y)^2=\cancel{xy-6y-x+6}\ y(x-6)-(x-6) \\ x^2-12x+36+y^2-4y+4+y^2-20=0 \end{cases}$$

$(x-6)^2+36(1-y)^2+12(x-6)(1-y)=(x-6)(y-1)$

$$\begin{cases} (x-6)^2+36(y-1)^2-13(x-6)(y-1)=0 \\ (x-6)^2+(y-2)^2+y^2-20=0 \end{cases}$$

~~Пусть $k=x-6$. Тогда $k^2=20-(y-2)^2-y^2\geq0$~~

~~$k=\pm\sqrt{20-(y-2)^2-y^2}$~~

~~$20-(y-2)^2-y^2$~~

~~Тогда $36(y-1)^2-13k(y-1)=-(y-2)^2-y^2+20=0$~~

~~$k=\frac{36(y-1)^2-(y-2)^2-y^2+20}{13(y-1)}$~~

$(x-6)^2+(y-2)^2+y^2-4-16=0$

$(x-6)^2+\cancel{(y-2-2)(y-2+2)}+(y-2-4)(y-2+4)+(y-2)(y+2)=0$

$(x-6)^2+(y-6)(y+2)+(y-2)(y+2)=0$

$(x-6)^2+2(y+2)(y-4)=0$

Продолжение на стр. N 7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}(x-6)^2+36(y-1)^2-13(x-6)(y-1)=0\\(x-6)^2+2(y+2)(y-4)=0\end{cases}$$

Пусть $a=x-6$, $b=y-1$.

$$\begin{cases}a^2+36b^2-13ab=0\\a^2+2(b+3)(b-3)=0\end{cases} \longrightarrow a^2+2b^2-\cancel{b}\,18=0$$

$$a^2=18-2b^2 \Rightarrow 18-2b\geq 0,\quad a=\pm\sqrt{18-2b^2}$$

$$\cancel{18-2b^2+36b^2-13ab=0}$$
$$\cancel{18+34b^2-13ab=0}$$

$$\left[\begin{aligned}&18+34b^2-13\sqrt{18-2b^2}\,b=0 \quad (1)\\&18+34b^2+13\sqrt{18-2b^2}\,b=0 \quad (2)\end{aligned}\right.$$

1) $(18+34b^2)^2=13^2b^2(12-2b^2)$

$$\cancel{\ldots}\,4(9+17b^2)^2=13^2b^2\,2(9-b^2)$$

$$2(81+189b^{\cancel{2}4}+306b^2)=\cancel{12}\,169(b^4-9b^2)$$

$$(2\cdot189\,\cancel{b^4}-169)b^4+(2\cdot306+\cancel{13}\,169\cdot9)b^2+2\cdot81=0$$

$$209b^4+2133b^2+162=0$$

$$D=2133^2-4\cdot209\cdot162$$

$\boxed{\text{Задача 6.}}$

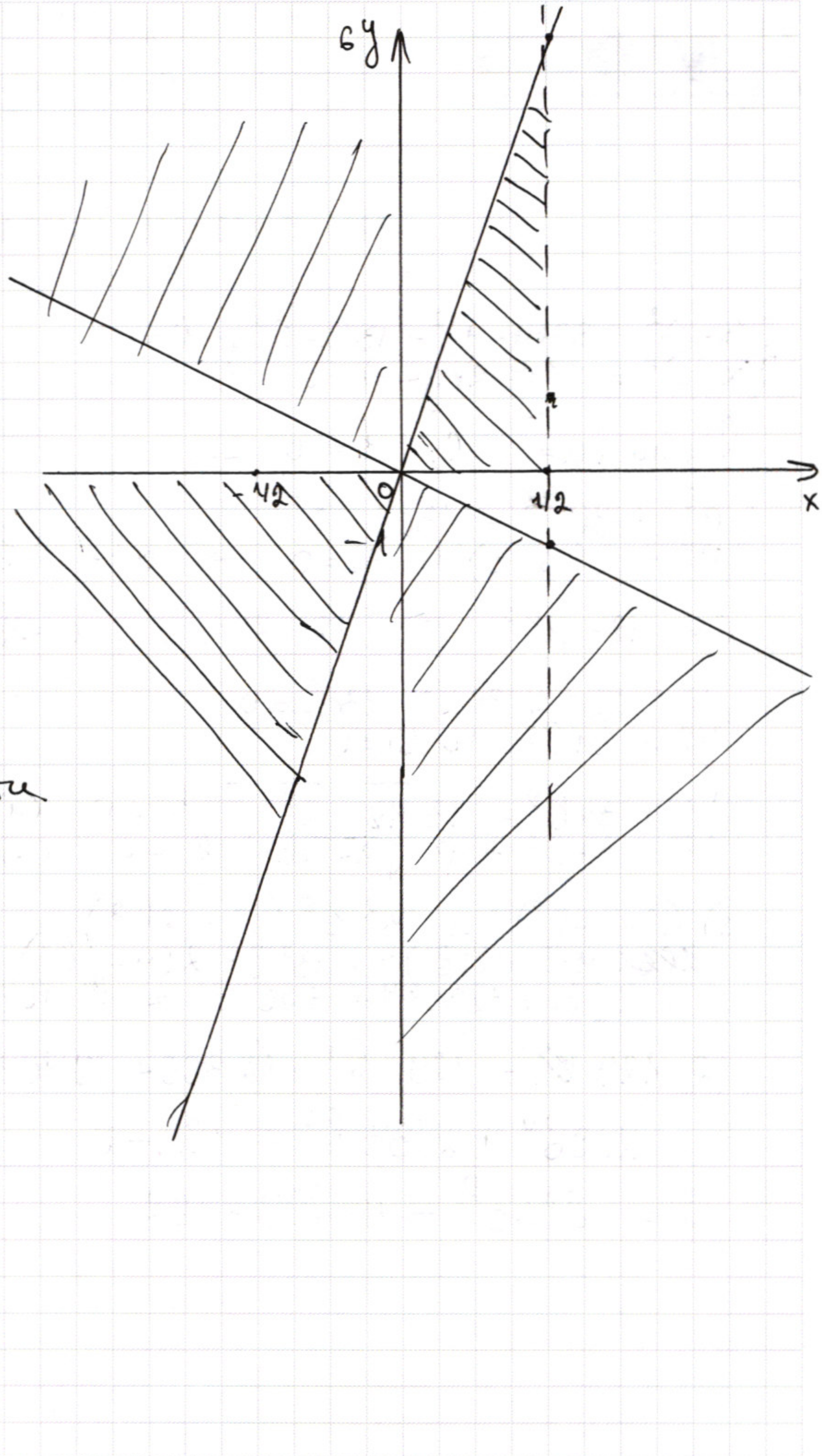
$x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$8x - 6|2x-1| \le ax+b$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8x - 12x + 1 \le ax+b \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 8x + 6x - 1 \le ax+b \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

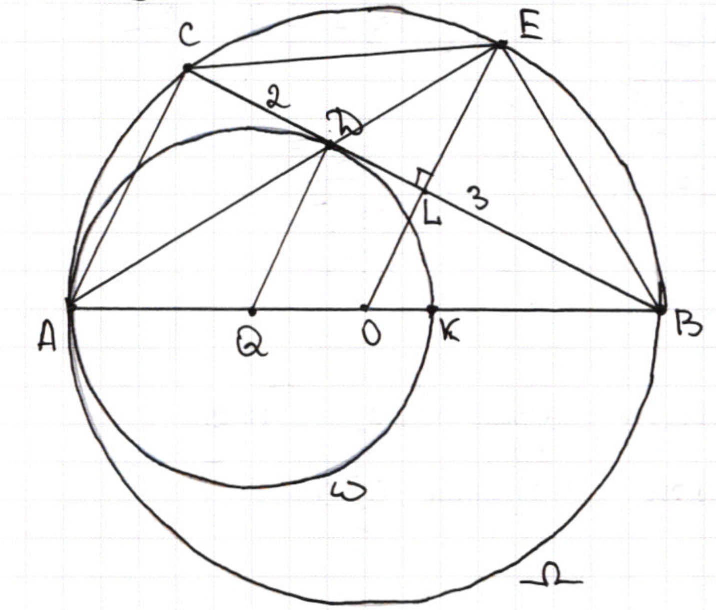
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4x + 1 \le ax+b \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 14x - 1 \le ax+b \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Заштрихованы не подходящие области



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



Пусть O – центр Ω, Q – центр ω, R – радиус Ω, r – радиус ω. $K = \omega \cap AB$, $L = OE \cap BC$

① 1) $BD^2 = BK \cdot BA$ – как степень т. B отн. окр. ω

$9 = (2R-2r)\cdot 2R$

2) $\angle QDB = 90^\circ$, т.к. BD – касательная к ω, QD – её радиус. $\angle ACB = 90^\circ$, как впис., опир. на диаметр.

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle QBD$ по двум углам ($\angle B$ – общ., $\angle QDB = \angle ACB = 90^\circ$)

$\Rightarrow \frac{BQ}{BA} = \frac{3}{5}$, т.е. $\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{5}$

$10R - 5r = 6R \Rightarrow r = \frac{4}{5}R = 0{,}8R$

Подставим в уравнение 1: $9 = (2R - 1{,}6R)\cdot 2R$

$9 = 2\cdot 0{,}4R^2 \rightarrow R = \sqrt{\frac{9}{2\cdot 0{,}4}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{0{,}2}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

$\Rightarrow r = \frac{3}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

② $S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BEC}$

1) Найдём S_{ABC}.

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{45-25} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ – по т. Пифагора.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

2) Найдём S_{BEC}.

$\angle DAQ = \angle ADQ = \angle AEO$ (т.к. $AQ = DQ = r$, $AO = EO = R$)

т.е. $\angle ADQ = \angle AEO$, а они соответств. при (DQ) и (EO) и сек. $DE \Rightarrow DQ \parallel EO$

$\Rightarrow OL \perp BC$ (т.к. $QD \perp BC$)

Продолжение на стр. № 2

Рассмотрим $\triangle BLO$ и $\triangle BDQ$:

$\begin{cases} \angle QDB = \angle KLB = 90^\circ \\ \angle B - \text{общ.} \end{cases} \Rightarrow \triangle BLO \sim \triangle BDQ$

$\Rightarrow \frac{OL}{QD} = \frac{BO}{BQ} = \frac{R}{2R-r} = \frac{\frac{3}{2}}{3-\frac{6}{5}} = \frac{3}{6-\frac{12}{5}} = \frac{15}{30-12} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow OL = \frac{5}{6} QD = \frac{5}{6} r = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5}\sqrt{5} = \sqrt{5}$

EL (высота в $\triangle CEB$) $= OE - OL = R - OL = \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{2}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$S_{BEC} = \frac{1}{2} BC \cdot EL = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

3) $S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BEC} = 5\sqrt{5} + \frac{5}{4}\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; $r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

Задача 1

Пусть знаменатель геом. прогрессии равен q. Тогда $b = qa$, $c = q^2 a$, четвёртый член г.п. равен $q^3 a$.

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$ax^2 - 2qax + q^2 a = 0 \rightarrow x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x - q)^2 = 0$

$x = q$

$q^3 a = q \Rightarrow q^2 a = 1$

Третий член прогрессии $c = 1$. $\boxed{c = 1}$

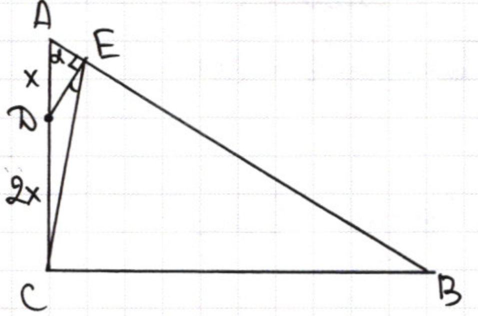
Ответ: 1.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



а) Пусть $AD = x$, $\angle A = \alpha$. Тогда $CD = 2x$.

По т. синусов для $\triangle CED$:

$$\frac{CD}{\sin\angle CED} = \frac{DE}{\sin\angle DCE}$$

$$\frac{2x}{\sin 30^\circ} = \frac{DE}{\sin(180^\circ - 90^\circ - 30^\circ - \alpha)} = \frac{DE}{\sin(60^\circ - \alpha)}$$

В $\triangle ADE$: $AD \sin\alpha = DE$

$$x \sin\alpha = DE$$

$$\frac{2x}{\sin 30^\circ} = \frac{x\sin\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)}$$

$$4 = \frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ-\alpha)} \to \frac{1}{4} = \frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 60^\circ \cos\alpha - \sin\alpha\cos 60^\circ}{\sin\alpha} =$$

$$= \sin 60^\circ \operatorname{ctg}\alpha - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

б) $3x = AC = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha = 1$$

$$\frac{7}{4}\sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$DE = AD\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{3}$$

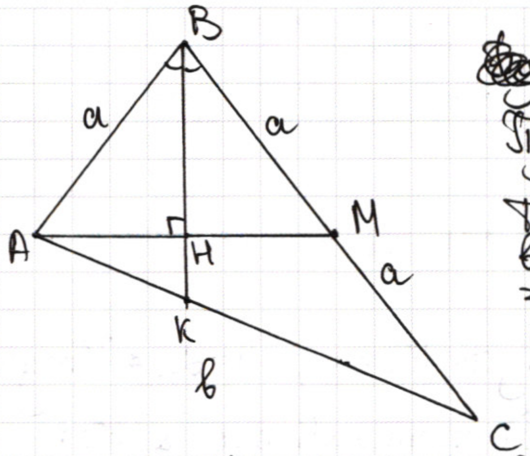
По т. синусов для $\triangle ACE$: $\frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\angle AEC} = \frac{AC}{\sin(\frac{\pi}{2}+30^\circ)} = \frac{AC}{\cos 30^\circ}$

$$CE = AC\sin\alpha\cos 30^\circ = \sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_{CED} = \frac{1}{2}ED\cdot EC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{CED} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 2



~~Рассм ABC~~

Пусть BK – бисс., AM – медиана.

Тогда в $\triangle ABM$ BH – бисс., высота ($H = BK \cap AM$)

$\Rightarrow \triangle ABM$ – р/б : $BA = BM$ (по признаку)

AM – медиана $\Rightarrow MC = BM$

Пусть $AB = BM = MC = a$, $AC = в$. $P_{ABC} = 3a + в = 900$

Т.к. ABC – треугольник: $\begin{cases} 2a < a + в \\ в < 3a \\ a < 2a + в \text{ – всегда верно} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a < в \\ в < 3a \end{cases}$

$\Rightarrow 900 = 3a + в > 3a + a = 4a \Rightarrow 900 > 4a \Rightarrow a < 225;$

$900 = 3a + в < 3a + 3a = 6a \Rightarrow 900 < 6a \Rightarrow a > 150.$

$в = 900 - 3a \Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} \; \exists! в \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Кол-во треугольников задаёт кол-во подходящих a.

$\begin{cases} 150 < a < 225 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 151 \le a \le 224 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Число возможных a равно $224 - 151 + 1 = 74$.

Ответ: 74.