МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① a, b, c

$a = b_1$
$b = aq$ где q - множит. прогрессии
$c = aq^2$

$ax^2 + bx + c = 0$. Сделаем замену. $ax^2 + 2aq\,x + aq^2 = 0$

Пусть $a \neq 0$. Тогда $x^2 + 2qx + q^2 = 0$; $(x+q)^2 = 0 \Rightarrow x = -q \leftarrow$ корень ур-я.

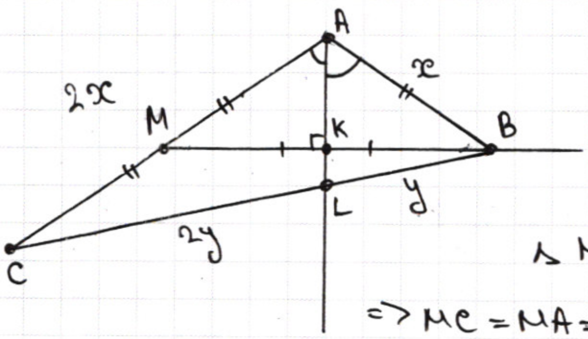
Значит, $aq^3 = -q$ $(q \neq 0) \to :q$: $aq^2 = -1 \Rightarrow c = -1$

Пусть $a = 0$. Тогда $a = b = c = 0$ Тогда четвертый член это $0 \Rightarrow$
0 является корнем ур-я $ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

Значит, $\begin{cases} c = -1, \text{ если } a \neq 0 \\ c = 0, \text{ если } a = 0 \end{cases}$

②

Рассмотрим один из таких Δ:



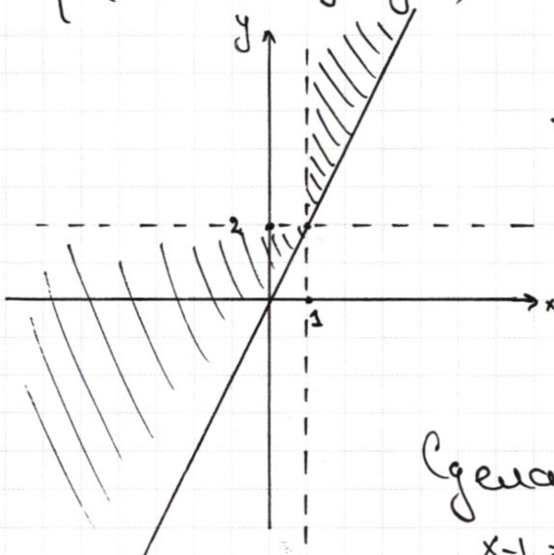
Пусть AL - бисс. $\angle CAB$; BM - медиана к стороне AC. По условию $AL \perp BM$. Тогда в ΔMAB: $AK \perp MB$ и AK - бисс. $\Rightarrow$ ΔMAB - равнобедр. $(AM = AB)$. M - сер. AB $\Rightarrow MC = MA = AB$. Пусть $AB = x$. Тогда $AC = 2x$

AL - бисс. $\Rightarrow$ по св-ву биссектрисы $\frac{LB}{AB} = \frac{LC}{CA} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{1}{2}$

Пусть $LB = y \Rightarrow LC = 2y$. Тогда периметр $P = 2x + x + 3y = 3(x+y) = 1200 \Rightarrow x + y = 400$. $x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N} \Rightarrow x$ принимает любое целое значение от 1 до 399 $\Rightarrow$ всего сущ. 399 таких Δ.

③ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)} \\ 2x^2-4x+2+y^2-4y+4-3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=3 \end{cases}$ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$



$\begin{cases} (x-1)(y-2)\geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x\geq 1;\ y\geq 2 \\ x\leq 1;\ y\leq 2 \end{matrix} \\ y-2x\geq 0 \Rightarrow y\geq 2x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (y-2x)^2=(x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$

Сделаем замену:

$x-1=a \quad y-2=b$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ ab=b-2a \end{cases}$ $\begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ b=2a+ab \end{cases}$ $\begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ b=a(2+b) \end{cases}$

$\begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ a=\frac{b}{2+b} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\cdot\left(\frac{b}{2+b}\right)^2+b^2=3 \\ a=\frac{b}{2+b} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{2b^2}{(2+b)^2}+b^2=3 \\ a=\frac{b}{2+b} \end{cases}$ $\begin{cases} 2b^2+b^2(2+b)^2=3(2+b)^2 \\ a=\frac{b}{2+b} \end{cases}$

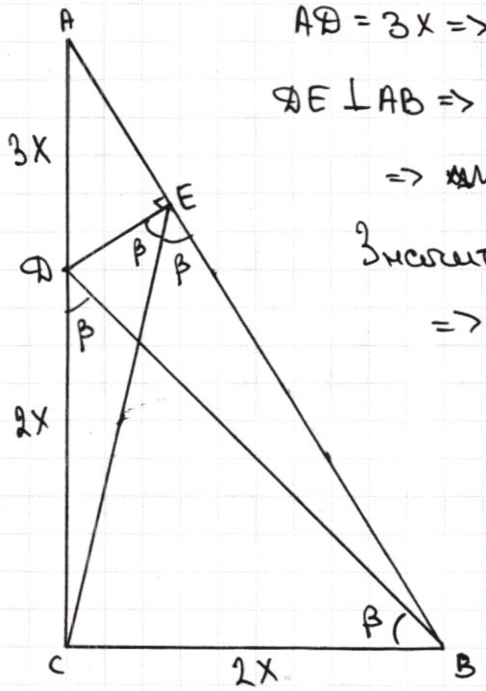
$2b^2+b^2(b^2+4b+4)=3(b^2+4b+4)$; $2b^2+b^4+4b^3+4b^2=3b^2+12b+12$

$b^4+4b^3+3b^2-12b-12=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

а) По условию: [redacted] $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ => Если $AC = 5X$, то $AD = 3X$ => $DC = 2X$. Проведём DB.



$DE \perp AB$ => => $\angle DEB = 90°$. По условию $\angle DCB = 90°$

=> четырёхуг. $CDEB$ - впис. в окр-ть.

Значит, если $\angle DEC = \beta = 45°$, то $\angle CEB = \beta = 45°$

=> $\angle CDB = \angle CEB = \beta$ (на дугу $\overset{\frown}{CB}$)

$\angle DEC = \angle DBC = \beta$ (на дугу $\overset{\frown}{DC}$)

Рассмотрим $\triangle DBC$: $\angle CDB = \angle CBD = 45°$

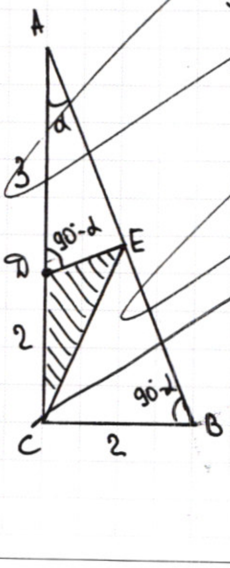
=> $DC = CB = 2X$

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда в $\triangle ABC$:

$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2X}{5X} = \frac{2}{5}$

~~б) $AC = \sqrt{29}$ По т. Пифагора: $BC^2 + AC^2 = AB^2$; $(2X)^2 + (5X)^2 = 29$~~

~~$29X^2 = 29$; $X^2 = 1$. Т.к. $X > 0$ => $X = 1$ => $AC = 5$; $BC = 2$~~



~~$S_{DEC} = S_{ABC} - S_{ADE} - S_{BEC}$~~

~~$tg\,\alpha = \frac{2}{5}$; $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$; $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$~~

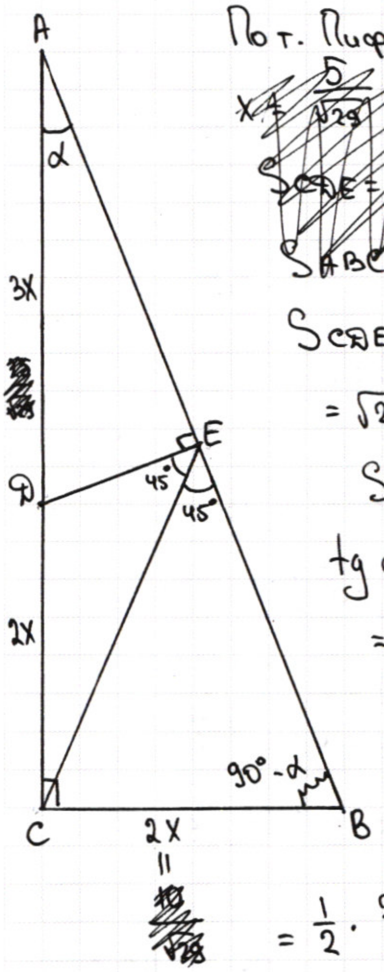
~~$S_{ADE} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{AD\sin\alpha \cdot AD\cos\alpha}{2} = AD^2 \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} = 29 \cdot \frac{2 \cdot 5}{29 \cdot 2} =$~~

~~$= 5$~~

~~$S_{BEC} = \frac{BE \cdot BC \cdot \sin(90° - \alpha)}{2} = \frac{BE \cdot BC \cdot \cos\alpha}{2}$; $BC = 2$~~

~~$BE = AB - AE = AB - AD\cos\alpha = \sqrt{29} -$~~

б) $AC = \sqrt{29} \to 5x = \sqrt{29} \to x = \cancel{\frac{5}{\sqrt{29}}}\ \frac{\sqrt{29}}{5}$



По т. Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2 \to AB^2 = (5x)^2 + (2x)^2 = 25x^2 + 4x^2 = 29x^2$

~~$x = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow AB^2 = 29 \cdot \frac{25}{29} = 25 \Rightarrow AB = 5$~~ $\to AB^2 = 29 \cdot \frac{29}{25} = \frac{29^2}{5^2} \Rightarrow$

~~$S_{CDE} = S_{ABC} - S_{ADE} - S_{CBE}$~~ $\Rightarrow AB = \frac{29}{5}$

~~$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{25}{\sqrt{29}} \cdot \frac{10}{\sqrt{29}}$~~

$S_{CDE} = S_{ABC} - S_{ADE} - S_{CBE}$; $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} =$

$= \sqrt{29} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 29}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{5}$

$S_{ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{AD\cos\alpha \cdot AD\sin\alpha}{2} = AD^2 \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{2}{5}$; $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{29} \cdot 5}{29} = \frac{5}{\sqrt{29}}$; $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} =$

$= \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{5}{29} = \frac{2}{\sqrt{29}}$; $AD = 3x = \frac{3\sqrt{29}}{5}$

$\Rightarrow S_{ADE} = \left(\frac{3\sqrt{29}}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9 \cdot \cancel{29}}{5 \cdot \cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{5}}{\cancel{29} \cdot \cancel{2}} =$

$= \frac{9}{5}$

$S_{CBE} = \frac{1}{2} CB \cdot BE \cdot \sin(90° - \alpha) = \frac{1}{2} CB \cdot BE \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot BE \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}$

$BE = AB - AE = \frac{29}{5} - AD\cos\alpha = \frac{29}{5} - \frac{3\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{29}{5} - 3 = \frac{29 - 15}{5} = \frac{14}{5}$

$\Rightarrow S_{CBE} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{29}}}{5} \cdot \frac{14}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{\sqrt{29}}} = \frac{14}{5}$

$\Rightarrow S_{CDE} = \frac{29}{5} - \frac{9}{5} - \frac{14}{5} = \frac{20 - 14}{5} = \frac{6}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

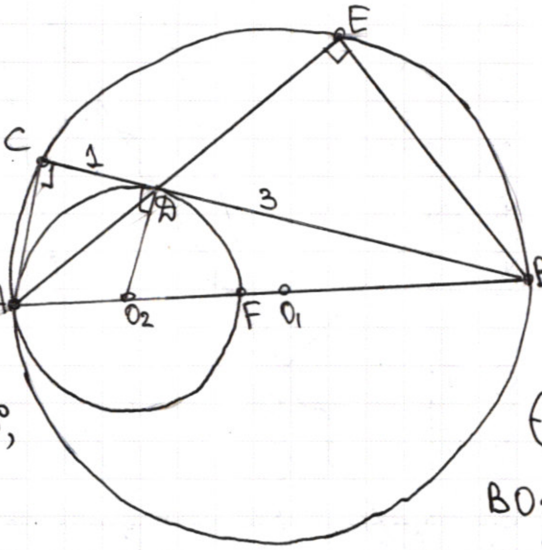
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$g_{\omega;\Omega}(X)$ – степень т. X

(ω) – r

(Ω) – R



$g_\omega(B) = BD^2 = BF \cdot BA =$
$= 2(R-r) \cdot 2R$

Пусть O_2 – центр ω; O_1 – ц. Ω.
Тогда т.к. BD – касат., то $O_2D \perp BC$. $\triangle CBA \sim \triangle DBO_2$

$(CA \parallel DO_2) \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB} = \frac{3}{4}$

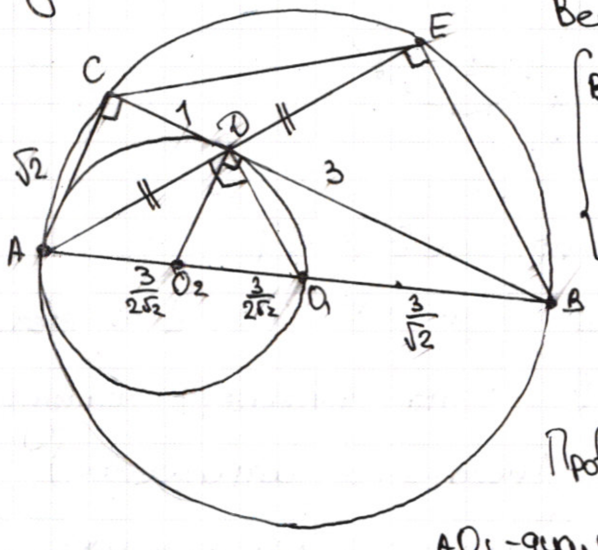
$\angle ACB = \angle AEB = 90°$, т.к. опир. на диаметр AB

$BO_2 = 2R - r$; $AB = 2R$

$\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 \cdot 2R = 4 \cdot (2R - r)$

$6R = 8R - 4r \Rightarrow 2R = 4r \Rightarrow R = 2r \Rightarrow F \equiv O_1$

Перерисуем чертёж:



Вернёмся к 1-й строчке:

$\begin{cases} BD^2 = 4R(R-r) \\ BD = 3 \\ R = 2r \end{cases} \Rightarrow 9 = 4R\left(R - \frac{R}{2}\right)$

$9 = 4R \cdot \frac{R}{2}$; $9 = 2R^2 \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Проведем O_1D ; $O_1D \perp AE$, т.к. для ω AO_1 – диаметр $\Rightarrow \angle ADO_1 = 90°$; $AO_1 : O_1B = 1:1$
$\Rightarrow$ D – сер. AE. $\Rightarrow AD : DE = 1:1$ Значит, $S_{CDE} = S_{ACD}$.

Найдём AC: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{36}{2} - 16} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{ACD} = CD \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ACE} = 2 S_{ACD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$S_{ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$; $S_{ACD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ADB} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

BD – медиана в $\triangle ABE \Rightarrow S_{ABE} = 2 S_{ADB} = 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow S_{ACEB} = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

⑥

Построим графики функций:
на нужном отрезке
$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

1) $x + |2x-1| = y$

Тогда $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3x-1$

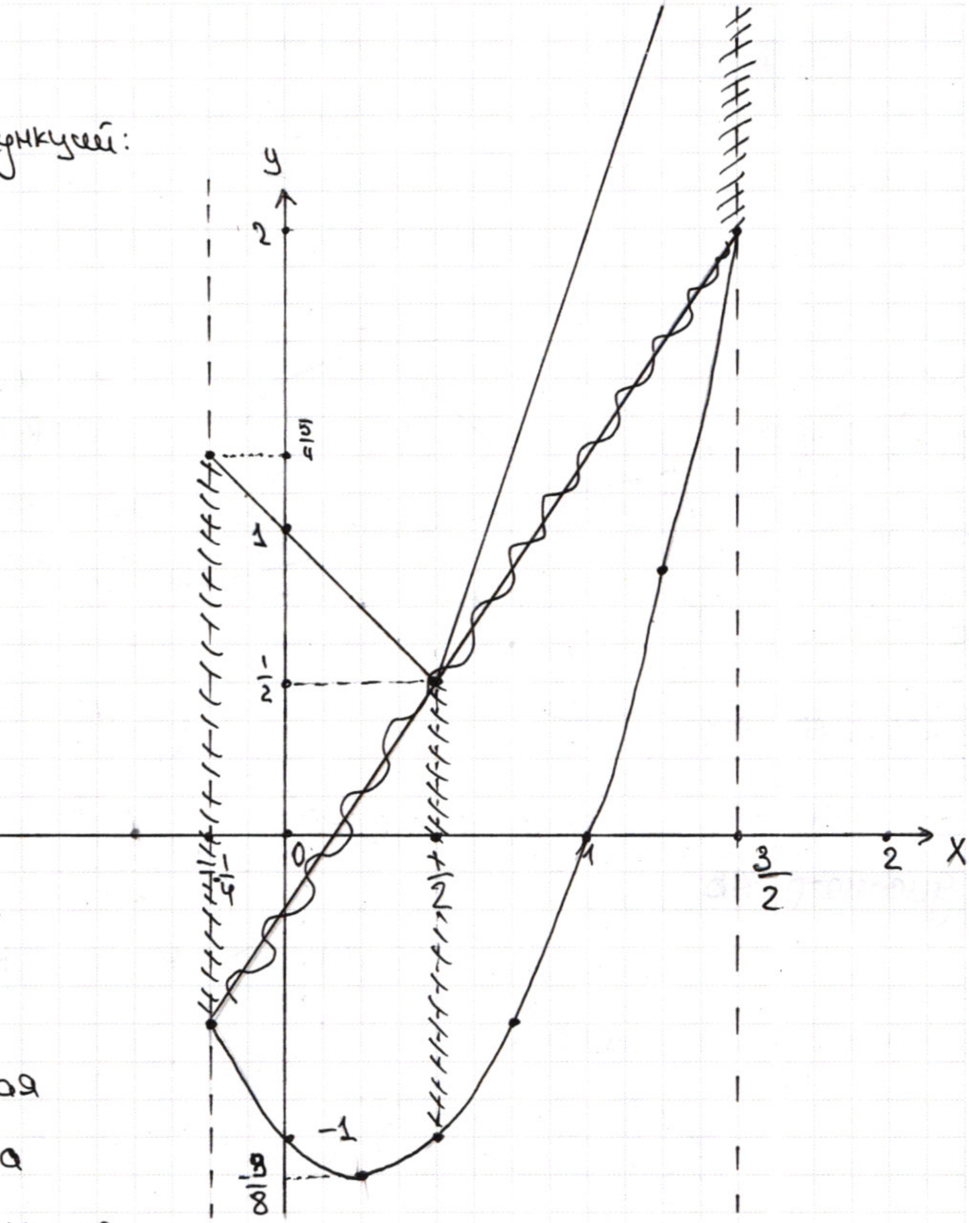
$x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1-x$

2) $2x^2 - x - 1$.

Вершина в т. $\left(\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$

Далее выберем некот.

точки:



x	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
y	-1	$-\frac{5}{8}$	-1	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{7}{8}$	2

Тогда $ax+b$ – некоторая прямая, кот. должна лежать выше параболы, но ниже функции $x+|2x-1|$ при $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

Парабола пересек. ограничение $\frac{3}{2}$ по Ox в т. $2 \Rightarrow$ ~~любая точка~~ при $x = \frac{3}{2}$: y у прямой $\geq 2 \Rightarrow$ эта прямая $\cap$ прямую $x = \frac{3}{2}$ в т. с координатой $\frac{7}{2} \geq y \geq 2$ (показано штриховкой).

Теперь рассмотрим $x = \frac{1}{2}$. Прямая должна лежать ниже, чем ф-я $x + |2x-1| \Rightarrow a \cdot \frac{1}{2} + b \leq \frac{1}{2}$, но $a \cdot \frac{1}{2} + b \geq -1$ (показано штриховкой). Также прямая $ax+b$ в точке $x = -\frac{1}{4}$ должна иметь координату по y : $-\frac{5}{8} \leq y_n \leq \frac{5}{4}$ (показано штриховкой)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

То есть получаем:

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a + b \le \frac{5}{4} \\ -1 \le \frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2} \\ 2 \le \frac{3}{2}a + b \le \frac{7}{2} \end{cases}$$

Заметим, что сущ. единственная пара чисел a, b, удовлетв. условиям:

$a = \frac{3}{2}$

$b = -\frac{1}{4}$ (Искомая прямая обознач. ∼∼ на графике)

Пусть сущ. ещё одна прямая. Рассмотрим её т. пересеч. с $x = -\frac{1}{4}$. Если она на том же месте, то при повороте одно из пересеч. $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{3}{2}$ будет вне границы (т.к. при найденном a мы находимся на границах возможных множеств точек). Если же она подвинута выше, то любая прямая, проход. через допустимую точку отрезка $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -1\right)\right]$ будет пересекать прямую $x = \frac{3}{2}$ вне допуст. мн-ва.

Значит, имеем единств. набор $a; b$

$a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$

(7) $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ $\quad 1 \le x \le 21 \quad 1 \le y \le 21 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

D_f = положит. рациональные

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ $\quad f(a \cdot b) = f(a) + f(b) \Rightarrow f\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

b – рац. $\Rightarrow b = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

Для любого простого p : $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ $\rightarrow$ если $p = 2$, то $f(p) = 1$

если $p > 2$, то $p \underset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow f(p) = \frac{p-1}{2}$

$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$: $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ Заметим, что $0 < \frac{1}{y} < 1$

$\forall (y \in \mathbb{N}$ и $y \in [1; 21])$

Заметим, что $x \ge 1$ и $x \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ всегда > 0, т.к.

Если x – простое, то ясно. Если x – не простое. Тогда

x можно разложить на простые множители :

$1 \le x \le 21 \Rightarrow$ наиб. простой множитель – 19

$\Rightarrow x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot 19^{\alpha_8}$, где $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Тогда $x = a \cdot b \rightarrow f(x) = f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$; $b = mn \Rightarrow$

$f(x) = f(a) + f(mn) = f(a) + f(m) + f(n)$ и так далее

Итого получим, что $f(x) = f(2) \cdot \alpha_1 + f(3) \cdot \alpha_2 + \ldots + f(19) \cdot \alpha_8$

Теперь рассмотрим след:

$f(2) = f(1 \cdot 2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0$

Т.к. $f(1) = 0$, то $f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

Тогда $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$. Найдем кол-во таких пар

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

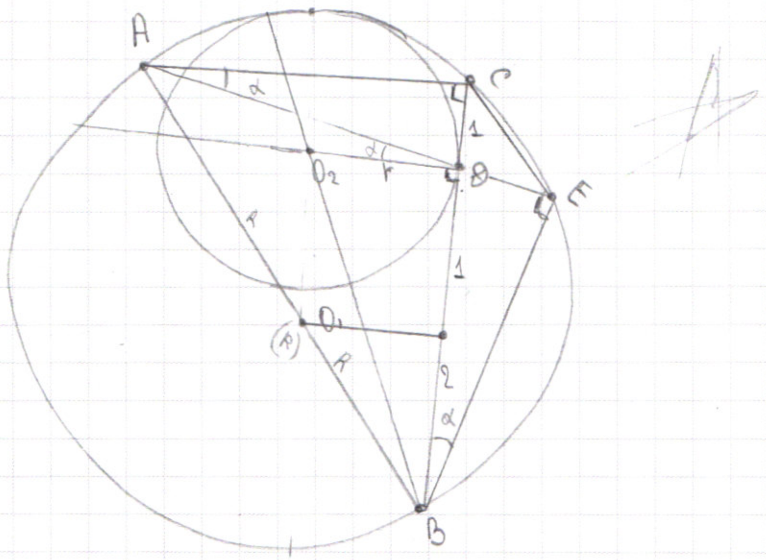
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

R, r, S_{ACEB}



$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$x(2x-1)-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$2x^2-x-1=y$ $\qquad$ $x+|2x-1|=y$

$-\frac{1}{22} = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1$

$2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 =$

$x+|2x-1|$

$2x-1$

$x+|2x-1|$ $\qquad$ $x+|y|$

$x(2x-1)-1$ $\qquad$ $xy-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

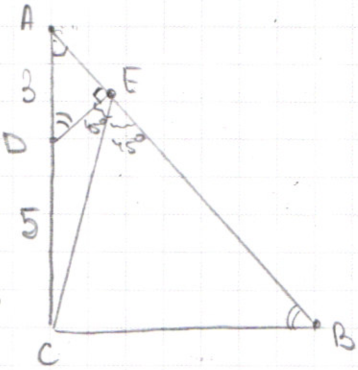
$(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$(y^2+4x^2)+(y+2x)-5xy-2=0$

t

$y+2x=t \Rightarrow t^2=y^2+4xy+4x^2-4xy$



$t^2-4xy+t-5xy-2=0$

$t^2+t-9xy-2=0$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{EA}{CA} \Rightarrow \frac{3}{AB}=\frac{EA}{8}$

$D=1^2+4(9xy-2)\geq 0$

$1+36xy-8\geq 0$

$36xy\geq 7$

$xy\geq\frac{7}{36}$

$(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-4xy \quad xy+2-(2x-y)$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$

$tg\alpha - v \Rightarrow \cos\alpha - v$

$(y-2x)^2=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

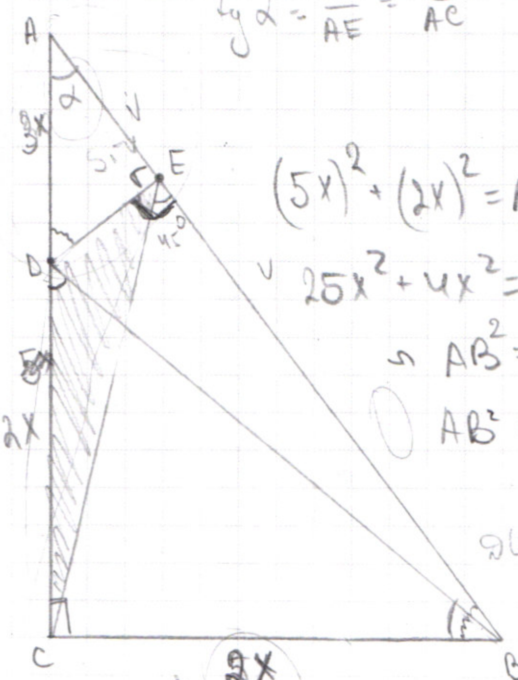
a b

$2x+y$

$(2x+y)^2=y^2+4x^2+4xy$

$-4xy$

$tg\,\alpha=\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{AC}$



$2a^2+b^2=3$

$(y-2x)^2=ab$

$(5x)^2+(2x)^2=AB^2$

$25x^2+4x^2=AB^2$

$\Rightarrow AB^2=29x^2$

$AB^2=29$

$\Rightarrow x=1$

$(2x+y)^2-4xy+(2x+y)-4xy-$

$-xy-2=0$

$(2x+y)^2-9xy-2=0$

$+(2x+y)$

$(2x+y)^2-9xy-2+(2x+y)=0$

$DE\cdot EB\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 45^\circ$

$t^2 \quad t$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(9xy+2)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+36xy+8}}{2}=$

S_{ABC}

$\frac{1}{2}AB\cdot ...$

$=\frac{-1\pm\sqrt{36xy+9}}{2}=\frac{-1\pm 3\sqrt{4xy+1}}{2}$

$S(CED)-?$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

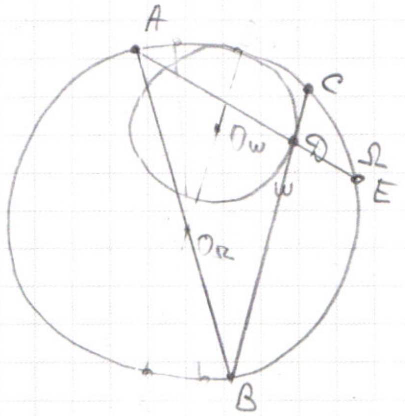
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$



$\cancel{2x^2+y^2-4x+4}$

$2x^2+y^2-4y+4-4x-1=0$

ур-я $(y-2)^2+2x^2-4x-1=0$

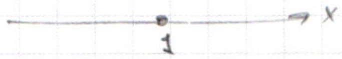
$(y-2)^2+2x^2-4x+2-3=0$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=1$

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)}$

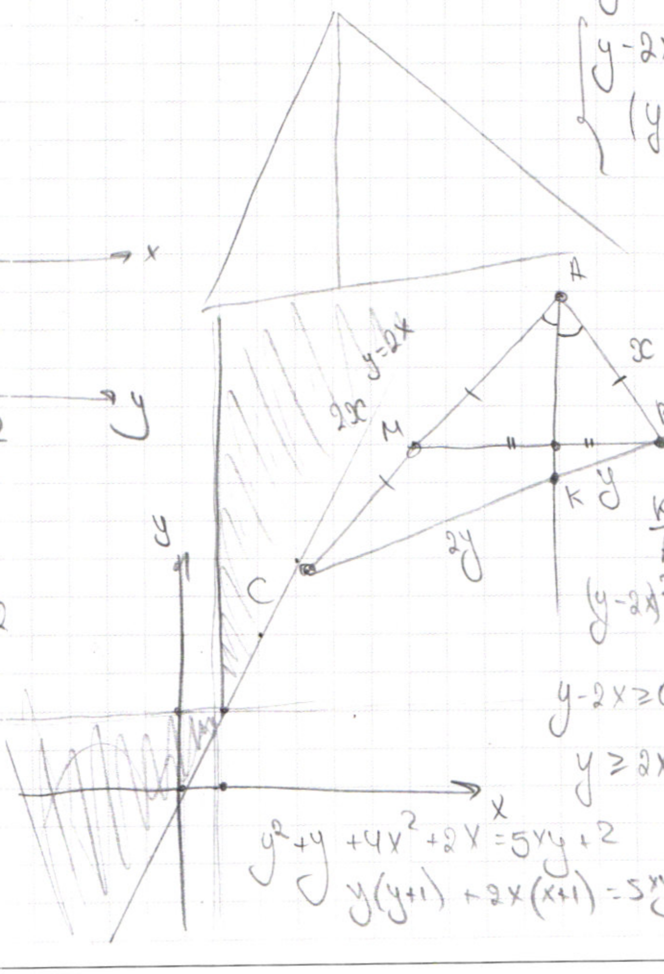
$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ (y-2)^2+2(x-1)^2=1 \end{cases}$$



y

$x\ge 1$ $y\ge 2$

$x\le 1$ $y\le 2$



$\Rightarrow P=3x+3y=3(x+y)$

$\Rightarrow x+y=400$

$\Rightarrow x\in \mathbb{N}, y\in N$

$\frac{KB}{AB}=\frac{y^2+2x^2}{y+2x}$ ⇒ Всего сущ. точек

399 треугольников

$(y-2x)^2+(y-2x)$

$y-2x$ $(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y-2x\ge 0$

$y\ge 2x$ $(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$ $y+2x$

$y^2+y+4x^2+2x=5xy+2$

$y(y+1)+2x(x+1)=5xy+2$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+4x^2$ $y-2x+2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

21 → $f(21)=f(3)+f(7)=1+3=4$
20 → $f(20)=f(2)\cdot 2+f(5)=2+2=4$
19 → $f(19)=9$
18 → $f(18)=2f(3)+f(2)=2+1=3$
17 → $f(17)=8$
16 → $f(16)=4f(2)=4$
15 → $f(15)=f(3)+f(5)=1+2=3$
14 → $f(14)=f(2)+f(7)=1+3=4$
13 → $f(13)=6$
12 → $f(12)=2f(2)+f(3)=2+1=3$
11 → $f(11)=5$
10 → $f(10)=f(2)+f(5)=1+2=3$
9 → $f(9)=2f(3)=2$
8 → $f(8)=3f(2)=3$
7 → $f(7)=3$
6 → $f(6)=f(2)+f(3)=1+1=2$
5 → $f(5)=2$
4 → $f(4)=2f(2)=2$
3 → $f(3)=1$
2 → $f(2)=1$
1 → $f(1)=0$

⇒ Мн-во значений:

$$\begin{matrix} 4, & 9, & 3, & 8, & 6, & 5, & 2, & 1, & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{matrix}$$

→ Кол-во таких пар $x;y$:

$f(y)=9$ → 20
$f(y)=8$ → 19
$f(y)=6$ → 18
$f(y)=5$ → 17
$f(y)=4$ → 13
$f(y)=3$ → 7
$f(y)=2$ → 3
$f(y)=1$ → 1

Итого:

$20+19+18+17+13+7+3+1=$
$=98$ пар