МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

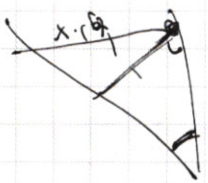
   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

$(2R)^2 = \left(k+\frac{3}{k}\right)^2 + 9 - \frac{9}{k^2} = k^2 + \cancel{\frac{9}{k^2}} + 9 - \cancel{\frac{9}{k^2}} + 6 = k^2+15$

$\cancel{4R^2 = k^2+15}$ $\quad 2R = \sqrt{k^2+15}$

$R = \frac{\sqrt{k^2+15}}{2}$



$\frac{?}{2R} = \frac{k^2}{3}$

$? = \frac{k^2 \cdot \sqrt{k^2+15}}{3}$

$\left(\sqrt{k^2+15} - \frac{k^2}{3}\sqrt{k^2+15}\right)\sqrt{k^2+15} = 9$

$\boxed{y=1}$

$k^2+15 - \frac{k^2}{3}(k^2+15) = 9$

$k^2+15\left(1-\frac{k^2}{3}\right) = 9$

$(k^2+15)(3-k^2) = 27$

$3k^2 + 45 - k^4 - 15k^2 = 27$

$-k^4 - 12k^2 + 18 = 0$

$k^4 + 12k^2 - 18 = 0$

$k^2 = \frac{-12 \pm \sqrt{144+72}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{216}}{2} = \frac{-12 \pm 6\sqrt{6}}{2}$

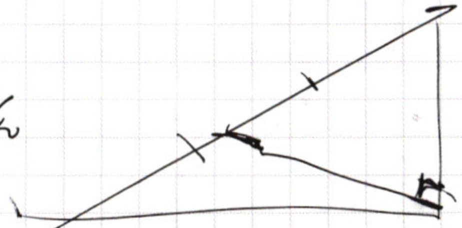
$\frac{6\sqrt{6}-12}{2}$

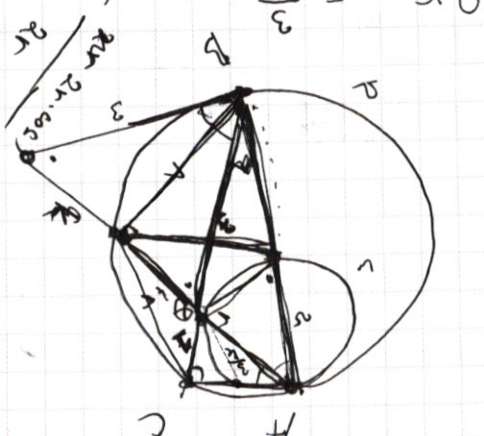
$\boxed{3\sqrt{6}-6}$

$4 \mp \left(2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}\right)^2$

$= 8y^2 + 8 - 4 \cdot 4 \cdot 2y$

$\left(2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}\right)^2 =$





$\triangle BCD \sim \triangle AED$

$\frac{BC}{AE} = \frac{BD}{AD}$

$2R - 2x$

$(2R-2x) \cdot 2R = 3^2$

$4R^2 - 4xR = 9$

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$

$\begin{cases} y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$2x^2 - 5xy + 4x + 4y - 3 + 2x + y - 2 = 0$

$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$

$xy - 2x - y + 2 = 0$

$2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8(y^2-4y+3)}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8y^2 + 32y - 24}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{-8y^2+32y-8}}{4} =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a b c

$a, aq, aq^2, \boxed{aq^3}$

$\boxed{-1}$

$aq^3 =$

$ax^2+2bx+c=0$

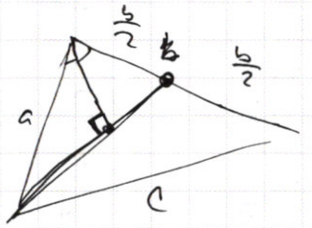
$\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2aq \pm \sqrt{4a^2q^2-4a^2q^2}}{2a} =$

$= \frac{-2aq}{2a} = \boxed{-q}$

$-q = aq^3$

$q = -aq^3$ $\boxed{q=0}$

$1 = -aq^2$



$a = \frac{b}{2}$

$2a = b$

$b > \frac{1200-b}{3}$

$3b > 1200 - b$

$4b > 1200$

$b > 300$

abc - цены

$a+b+c=1200$

$3a+c=1200$

$3a > 600$

$a > 200$

$c + a > 2a$

$c > a$

201 402 597

202 404 594 603

⋮

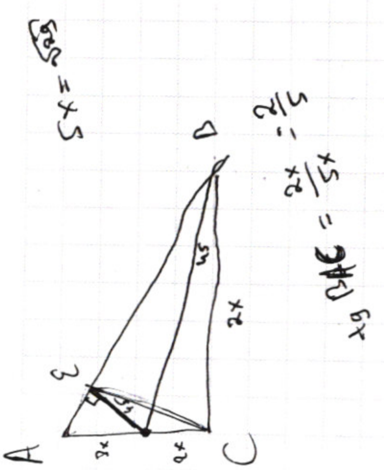
250 500 450

⋮

300 600 300 ×

$299-200=$

$=\boxed{99}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) = \cancel{f(p_1)}\ \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) \ldots + \alpha_n f(p_n)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$\boxed{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}$

$f(x) > f(y)$

$\alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) \ldots + \alpha_n f(p_n) > \beta_1 f($

$\alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_5 \cdot 2 + \alpha_7 \cdot 3 + \alpha_{11} \cdot 5 + \alpha_{13} \cdot 6 + \alpha_{17} \cdot 8 + \alpha_{19} \cdot 9$

$\vee$

$\beta_2 \cdot 1 + \beta_3 1 + \beta_5 \cdot 2 + \beta_7 \cdot 3 + \beta_{11} \cdot 5 + \beta_{13} \cdot 6 + \beta_{17} \cdot 8 + \beta_{19} \cdot 9$

1) $x \vdots 19 \Rightarrow x = 19$

$9 > 8$ $\quad x = 19;\ y = 17$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

$2 \cdot 2 \cdot 5$

$20 + 19 + 18 + 17 + 52 + 42 + 12 + 2 = 182$

39 57 74 126 168 180

$2 \cdot 7$ $\quad 2 \cdot 3 \cdot 3$

$2^2 \cdot 2 \cdot 3$

$5 \cdot 3$ $\quad 21 - 8 = 13$ $\quad 3 \cdot 7$

$f(x)$

9	20	4	$4 \cdot 13$
8	19	3	$6 \cdot 7$
6	18	2	$4 \cdot 3$
5	17	1	$2 \cdot 1$

$13 - 6 = 7$

$47 +$

$f(2) = 1$

$f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1)$

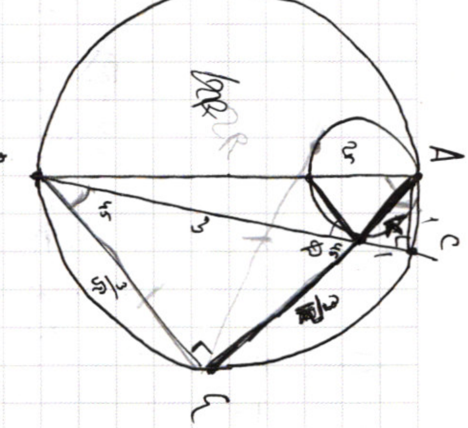
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(2R)^2 = 16+1$

$4R^2 = 17$

$R^2 = \frac{17}{4}$

$R = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\frac{2r}{2R} = \frac{k^2}{3}$

$\frac{r}{R} = \frac{k^2}{3}$

$r = \frac{k^2}{3} R$

$AD = \sqrt{(2R)^2 - 16}$

$AC = \sqrt{(2R)^2 - 16}$

$DE = \frac{3}{\sqrt{(2R)^2-15}}$

$BE = \sqrt{9 - \frac{9}{(2R)^2-15}}$

$BE^2 + AE^2 = (2R)^2$

$\left(2R - 2 \cdot \frac{k^2}{3} R\right) \cdot 2R = 9$

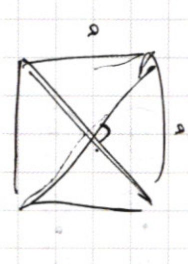
$4R^2 - 4 \cdot \frac{k^2}{3} R^2 = 9$

$R^2 = \frac{9}{4 - 4\frac{k^2}{3}}$

$R = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12-4k^2}}$

$\frac{DE}{BE} = \frac{DE}{AE}$

$BE^2 = DE \cdot AE$



$\frac{\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a}{2} \quad S = a^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

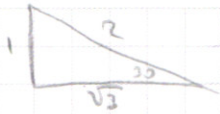
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

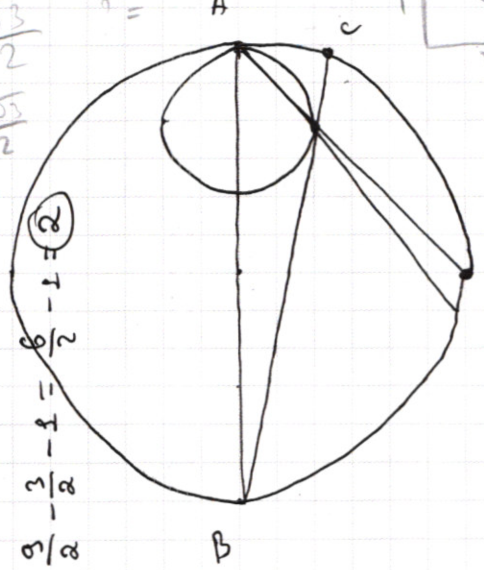
ШИФР

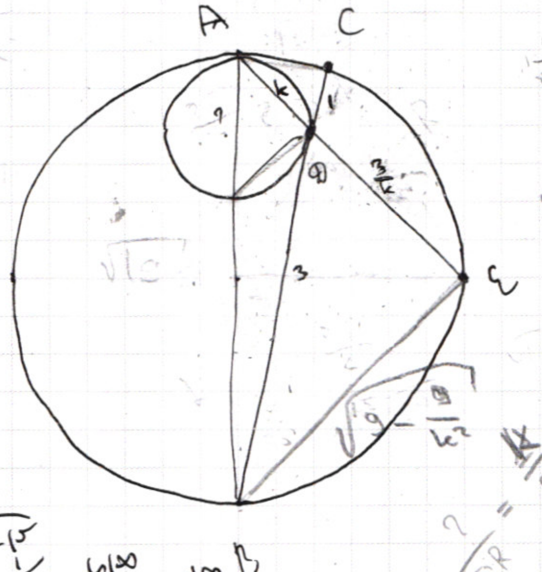
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

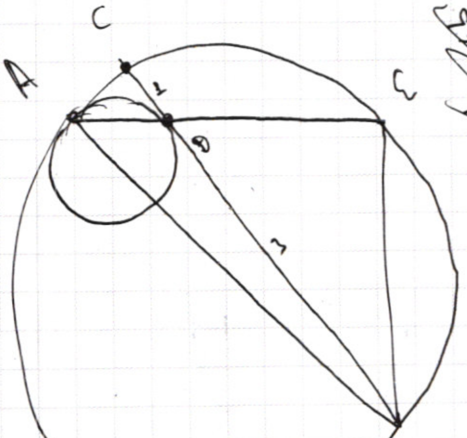
$\frac{?}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$







$9-\frac{9}{4}=\frac{36-9}{4}=\frac{27}{4}$

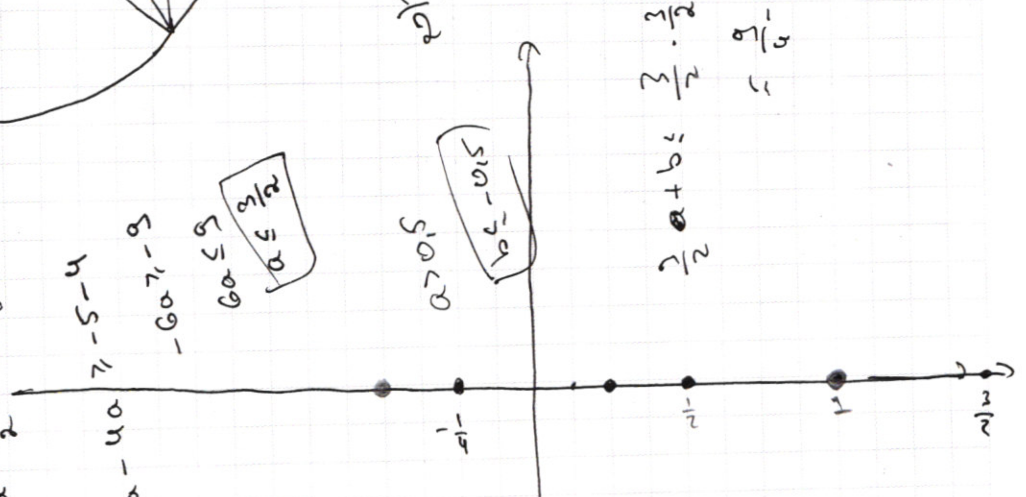


$2x^2-x-1$

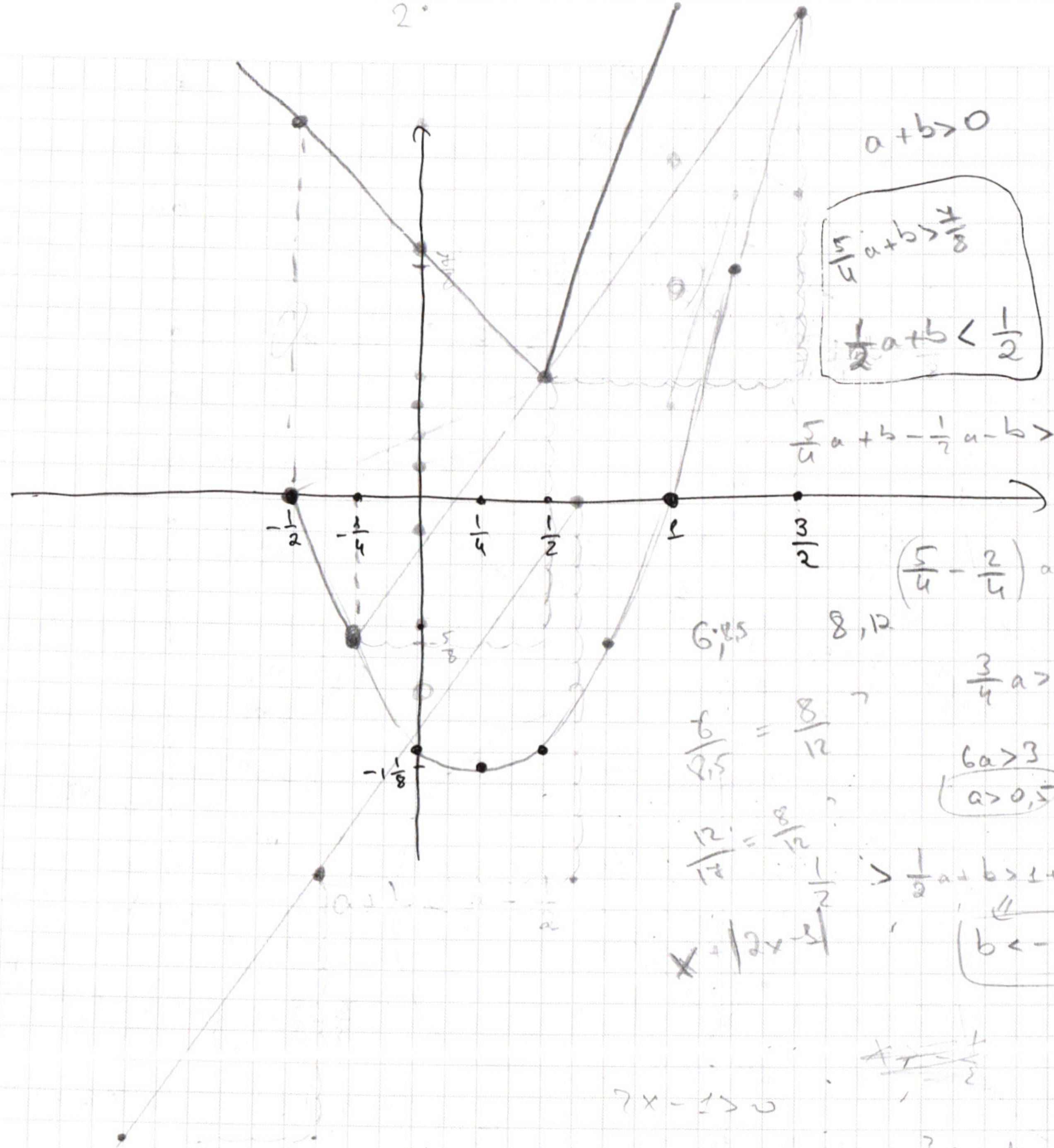
$2\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1=$

$=-\frac{1}{8}-1=$

$=-1-\frac{1}{8}$



2.



$a+b>0$

$\boxed{\begin{array}{l}\frac{5}{4}a+b>\frac{7}{8}\\ \frac{1}{2}a+b<\frac{1}{2}\end{array}}$

$\frac{5}{4}a+b-\frac{1}{2}a-b>\frac{7}{8}-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{5}{4}-\frac{2}{4}\right)a>\frac{3}{8}$

$\frac{3}{4}a>\frac{3}{8}$

$\boxed{\begin{array}{l}6a>3\\ a>0{,}5\end{array}}$

$\frac{1}{2}a+b>1+b$

$\boxed{b<-\frac{1}{2}}$

6; 2,5 8, 12

$\frac{6}{2{,}5}=\frac{8}{12}$

$\frac{12}{17}=\frac{8}{12}$ $\frac{1}{2}$

$x+|2x-1|$

$2x-1>0$

$2x>1$

$x>\frac{1}{2}$

$3x-1$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$

$\cancel{2}\cdot\frac{3}{4_2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{3}{4}-1=$

$\frac{3}{2}(3-1)-1=$

$=\frac{3}{2}\cdot 2-1=$

$=2$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-1\right)-1=$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{8}-1\right)-1=$

$=-\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{4}-1=-\frac{15}{32}-1$

$\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}-1\right)-1=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-1=$

$=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

$2\cdot\frac{5}{4_2}\cdot\frac{5}{4}-\frac{5}{4}-1$

$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{2}-1\right)-1=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}-1=$

$=\frac{15}{8}-1=\frac{7}{8}$

$x-2x+1=1-x$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть это геом. прогрессия с шагом q, тогда:

$a = a$ – 1ый член

$b = aq$ – 2ой член

$c = aq^2$ – 3ий член

aq^3 – 4ый член

Тогда: $ax^2+2bx+c = ax^2+2aqx+aq^2=0$

~~корень~~ $x = \dfrac{-2aq \pm \sqrt{4a^2q^2-4a^2q^2}}{2a} = -q \quad = aq^3$ (по условию)

$-q = aq^3$

(I) $q=0$
но тогда это не геом прогрессия по определению

(II) $-1 = aq^2$

$\Downarrow$

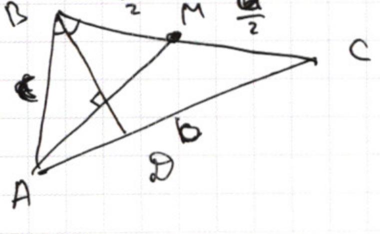
$\boxed{\text{Ответ: третий член геом. прогрессии } = -1}$.

№2

Давайте заметим, что бис.$\triangle$ $\perp$ мед $\triangle$ $\Longleftrightarrow$ одна из сторон в два раза больше другой в $\triangle$.

a, b, c – стороны $\triangle$

Необходимость:



AM – медиана $\Rightarrow BM = \frac{a}{2}$

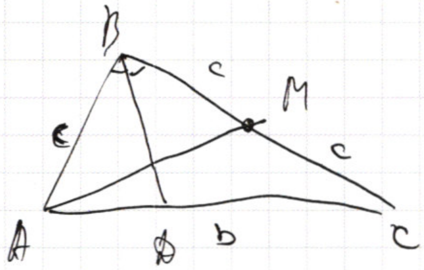
$\left.\begin{array}{l} BD - \text{бис.} \\ BD \perp AM \text{ (по усл.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABM$ – равноб.

$\Downarrow$

$c = AB = BM = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{2c=a}$

№ 2 (продолжение)

Достаточность: $c, 2c, b$ – стороны $\triangle$



$BM = c$ ($BC = 2c$; AM – мед.)

$\Downarrow$

$\triangle ABM$ – равноб. $\Rightarrow BD$ (бис.) $\perp AM$.

То есть нам нужно понять, сколько существует $\triangle$ со сторонами $a, 2a, b$ таких, что $3a + b = 1200$.

Для этого нужно выполнение след. условия:

$$\begin{cases} 3a + b = 1200 \\ 3a > b \text{ (нер-во } \triangle) \\ a + b > 2a \\ 2a + b > a \text{ (очевидно)} \\ a, b, c > 0 \\ a, b, c \text{ – целые} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + b = 1200 \\ 3a > 1200 - 3a \\ b > a \end{cases}$$

a, b – натуральные (>0 и целые)

$$\begin{cases} 3a + b = 1200 \\ 3a > 600 \\ b > a \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + b = 1200 \\ a > 200 \\ b > a \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + b = 1200 \\ a > 200 \\ 3b > 1200 - b \end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix} 3a + b = 1200 \\ a > 200 \\ b > 300 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ допустимые значение a – $\{201, \dots, 299\}$

(если a будет больше, то $b \le 300$)

Очевидно, что каждое a этих значений соответствует уникальному $\triangle$ со сторонами $a, 2a, b$

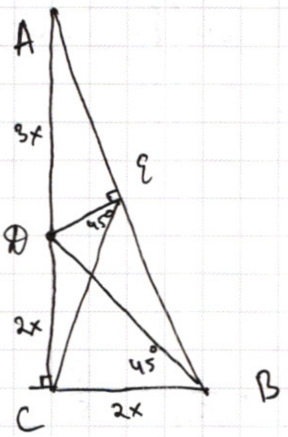
$\Downarrow$

Ответ: таких треугольников 99.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

а)



(I) $CDEB$ - вписан, т.к. $\angle DEB = \angle DCB = 90°$

$\Downarrow$

$\angle CED = \angle CBD = 45°$

$\Downarrow$

$\triangle CDB$ - равнобедренный (углы $90°$ и $45°$)

$\Downarrow$

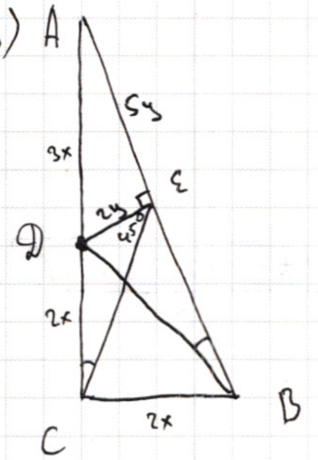
$CD = BC$

(II) $AD = 3x \Rightarrow AC = 5x \Rightarrow DC = 2x = BC$

(III) $tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{2}{5}}$

б)



Сохраним обозначение из пункта а, только теперь

$AC = \sqrt{29} = 5x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

(I) $tg \angle BAC = \frac{2}{5} \Rightarrow DE = 2y;\ AE = 5y$

$(2y)^2 + (5y)^2 = (3x)^2$ (т. Пифагора для $\triangle DEA$)

$4y^2 + 25y^2 = 9 \cdot \frac{29}{25}$

$29y^2 = \frac{9 \cdot 29}{25}$

$25y^2 = 9$

$y^2 = \frac{9}{25}$

$\boxed{y = \frac{3}{5}}$

$\boxed{DE = \frac{6}{5}}$

№4 (продолжение)

(II) $BD^2=(2x)^2+(2x)^2$ ($\triangle CBD$ т. Пифагора)

$BD^2=8x^2$

$BD=\sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{29}}{5}=\frac{2\sqrt{2\cdot 29}}{5}$

(III) $\triangle CE\cancel{A}\sim\triangle BDA$ ($CDEB$ - окр. $\Rightarrow \angle ACE=\angle ABD$; $\angle DAE$ - общий)

$\frac{CE}{BD}=\frac{AE}{AD}$

$CE=\frac{BD\cdot AE}{AD}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}{5}\cdot 3\cdot\frac{5}{3\cdot\sqrt{29}}=2\sqrt{2}$

(IV) $S_{\triangle CED}=DE\cdot EC\cdot\sin\angle CED\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{5}\cdot 2\boxed{\sqrt{2}}\cdot\frac{\boxed{\sqrt{2}}}{\boxed{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{5}$

$\boxed{\text{Ответ: } 1{,}2}$

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-4x+y^2-4y+3=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-8(y^2-4y+3)}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{-8y^2+32y-8}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{-(2\sqrt{2}y-2\sqrt{2})^2}}{4}$

Заметим, что $-(2\sqrt{2}y-2\sqrt{2})^2\leq 0$

если $y\neq 1$, то у нашего уравнения нет решений

проверим, есть ли решение, при $y=1$

$(2\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2=0$

$x=\frac{4\pm 0}{4}=1$

Проверим первое уравнение: $1-2=\sqrt{1-2-1+2}\Rightarrow -1=0$ нев

$\boxed{\text{Ответ: } \varnothing}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

(I) Посмотрим какое значение должно принимать $ax+b$ в конкретных точках

1) $x = \frac{5}{4}$

$\frac{5}{4}a+b \geq 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} - 1$

$\frac{5}{4}a+b \geq \frac{5}{4}\left(\frac{10}{4} - \cancel{1}\right) - 1$

$\frac{5}{4}a+b \geq \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{4} - 1$

$\frac{5}{4}a+b \geq \frac{15}{8} - 1$

$\frac{5}{4}a+b \geq \frac{7}{8}$

2) $x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}a+b \leq \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}a - b \geq -\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$\frac{5}{4}a+b-\frac{1}{2}a-b \geq \frac{7}{8} - \frac{2}{2}$

$\frac{3}{4}a > \frac{3}{8}$

$a > 0{,}5$

$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}a + b \geq 1 + b$

$\boxed{b \leq -0{,}5}$

3) $x=0$

~~$ax+b \leq -0{,}5$~~

~~$\boxed{ax+b < 0 \text{, при } x=0}$~~

3) $x = -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}a+b \geq 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1$

$-\frac{1}{4}a+b \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1$

$-\frac{1}{4}a+b \geq -\frac{5}{8}$

№6 (продолжение)

4) ~~x=1/2~~ $x = \frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}a + b \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2 - \frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{3}{2}a + b \geq \frac{9}{4} \cdot 2 - \frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{3}{2}a + b \geq \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{3}{2}a + b \geq 2$$

То есть:

$$\begin{cases} ① -\frac{1}{4}a + b \geq -\frac{5}{8} \\ ② \frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2} \\ ③ \frac{3}{2}a + b \geq 2 \\ ④ b \leq -0{,}5 \end{cases}$$

$\boxed{① - ②}$ $-\frac{1}{4}a + \cancel{b} - \frac{1}{2}a - \cancel{b} \geq -\frac{5}{8} - \frac{1}{2}$

$$-2a - 4a \geq -5 - 4$$

$$-6a \geq -9$$

$$\boxed{a \leq 1{,}5}$$

$a \leq 1{,}5$; $b \leq -0{,}5$

$\Downarrow$

$$2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - \frac{2}{4} = \frac{7}{4}$$

$$2 \leq \frac{7}{4}$$

Но это не так, противоречие

Ответ: таких a и b не существует

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

(I) ~~f(p·1) = f(p)~~

$$f(p) = f(p\cdot 1) = f(p) + f(1) \Rightarrow \boxed{f(1)=0}$$

$\boxed{x, y \text{ - нат}}$

(II) $$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

$$\Downarrow$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

То есть $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Longleftrightarrow f(x) > f(y)$

Давайте посмотрим сколько таких пар x и y, а для этого вычислим значения всех нат. чисел от 1 до 21:

$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})$ (разложили число n на простые множители) $\overset{*}{=} \alpha_1 \cdot f(p_1) + \alpha_2 \cdot f(p_2) + \alpha_3 f(p_3) \dots + \alpha_k f(p_k)$

$$f(n) = \alpha_1 \cdot \left[\frac{p_1}{2}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{2}\right] + \dots + \alpha_k \left[\frac{p_k}{2}\right], \text{ где}$$

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (разложение на простые мн.)

Пользуясь этой формулой вычислим значения $f(x)$, где $1 \le x \le 21$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f(x)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

Пользуясь этой таблицей узнаем, сколько существует пар x и y, где $f(x) > f(y)$:

$$\underbrace{1\cdot 20}_{k=9} + \underbrace{1\cdot 19}_{k=8} + \underbrace{1\cdot 18}_{k=6} + \underbrace{1\cdot 17}_{k=5} + \underbrace{4\cdot 13}_{k=4} + \underbrace{6\cdot 7}_{k=3} + \underbrace{4\cdot 3}_{k=2} + \underbrace{2\cdot 1}_{k=1} + \underbrace{1\cdot 0}_{k=0} = 182$$

Каждое слагаемое в сумме подсчитывается так:

$\boxed{\text{кол-во чисел } x \text{ таких, что } f(x)=k} \cdot \boxed{\text{кол-во чисел } y \text{ таких, что } f(y)<k}$, где k пробегает все значения от 9 0 (кроме 7, т.к. $f(x)\neq 7$ для x $(1\le x\le 21)$)

* Очевидно, что если $f(a_1 \cdot a_2)=f(a_1)+f(a_2)$, то:

$f(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n)=f(a_1)+f(a_2)\ldots+f(a_n)$ для нат. чисел

(можем док-ть индукцией по n, база для $n=2$ по условию; каждым шагом добавляем по одному множителю)

$f(a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1})=f(a_1 a_2 \ldots a_n)+f(a_{n+1})=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{n+1})$

(инд. предположение)

$\boxed{\text{Ответ: таких пар } 182}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

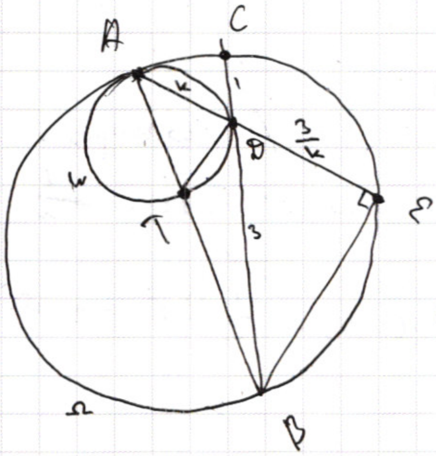
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



(I) AB - диам $\Omega \Rightarrow AT$ - диам ω ($AB \cap \omega = T$)

(гомотетия, переводящая Ω в ω с центром A)

(II) $AD = k \Rightarrow DE = \frac{3}{k}$ (т.к. $3 = DB \cdot DC = DE \cdot AD$)

(ст. т. D отн окр Ω)

степень точки

(III) AB - диам $\Omega \Rightarrow \angle AEB = 90°$ ~~$\Rightarrow AE^2 + BE^2 = AB^2$ (т Пифагора)~~

~~$\left(k + \frac{3}{k}\right)^2 + BE^2 =$~~

~~$DE^2 \neq B$~~

$BE^2 = BD^2 - DE^2$ (т. Пифагора $\triangle DEB$)

$BE = \sqrt{9 - \frac{9}{k^2}} = 3\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}$

(IV) $BE^2 + AE^2 = AB^2$ ($\triangle AEB$)

$9\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) + \left(k + \frac{3}{k}\right)^2 = AB^2$

$9 - \cancel{\frac{9}{k^2}} + k^2 + \cancel{\frac{9}{k^2}} + 6 = AB^2$

$k^2 + 15 = AB^2$

$AB = \sqrt{k^2 + 15}$

(V) $\frac{AT}{AB} = \frac{AD}{AE}$ (гомотетия, переводящая Ω в ω с центром A)

$AT = \frac{AB \cdot AD}{AE} = \frac{\sqrt{k^2+15}\,k}{k + \frac{3}{k}} = \frac{\sqrt{k^2+15}\,k^2}{k^2+3}$

$BT = \sqrt{k^2+15}\left(1 - \frac{k^2}{k^2+3}\right)$

(VI) $BT \cdot AB = BD^2$ (ст точки B отн ω)

$(k^2+15)\left(1 - \frac{k^2}{k^2+3}\right) = 9$

$(k^2+15)(k^2+3-k^2) = 9(k^2+3)$

$3(k^2+15) = 9k^2 + 27$

$3k^2 + 45 = 9k^2 + 27$

$6k^2 - 18 = 0$

$6(k^2 - 3) = 0$

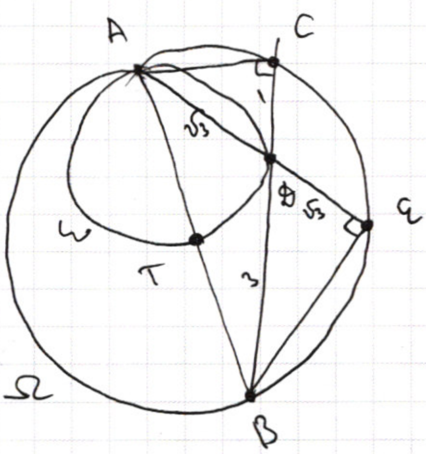
$k^2 - 3 = 0$

$k^2 = 3$

$\boxed{k = \sqrt{3}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



№5 (продолжение)

Используем все, что знаем из условия, только теперь мы знаем, что $AD=\sqrt{3}$

$\Downarrow$

$DE=\sqrt{3}$ $(AD\cdot DE)=3$

$\Downarrow$

гомотетия с центром в т. A, которая переводит Ω в ω имеет коэф. $\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

r (радиус ω) $=\frac{1}{2}R$ (радиус Ω)

I) $BE^2=BD^2-DE^2$ (т. Пифагора в BDE)

$BE^2=9-3=6$

$BE=\sqrt{6}$

II) $AB^2=AE^2+BE^2=4\cdot 3+6=12+6=18$

$AB=3\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$\boxed{R=\frac{3}{\sqrt{2}}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{r=\frac{3}{2\sqrt{2}}}$

III) $\sin\angle BDE=\frac{BE}{BD}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$S_{ACEB}=BC\cdot AE\cdot\sin\angle BDE\cdot\frac{1}{2}=4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=4\sqrt{2}$

$\boxed{\text{Ответ: } R=\frac{3}{\sqrt{2}};\ r=\frac{3}{2\sqrt{2}};\ S_{ACEB}=4\sqrt{2}}$