МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.а. (пункт б см. на листе 2)

$\triangle ABC$ – п/уг

$[AB]$ – гипотен

$|AD|:|AC| = 1:3$

$D \in [AC]$

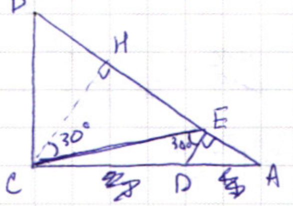
$E \in [AB]$, $[DE] \perp (AB)$

$\hat{CED} = 30°$

а) $tg\,\hat{BAC} = ?$

~~б) ...~~

~~$\triangle ADE \sim \triangle ACH \sim \triangle ABC$~~



$[AB]$ – гипотен. $\Rightarrow \hat{C} = 90°$

~~проведем~~

$\exists\ [CH]$ – высота $\triangle ABC$

$(CH) \perp (AB)$ (выс.)
$(ED) \perp (AB)$ (усл.) $\Rightarrow (CH) \parallel (DE) \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{HCE} = \hat{CED} = 30°$ (накр. леж.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |CH| = \sqrt{3} \cdot |HE|$ ~~...~~ $\Rightarrow$

$\exists\ |HE| = 2x$

тогда по обобщ. теор. Фалеса: $\frac{|AE|}{|EH|} = \frac{|DA|}{|CA|} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

т.о. $|EA| = \frac{1}{2}|HE| = x \Rightarrow$

т.о. $|HA| = |HE| + |EA| = 3x$

тогда $tg\,\hat{BAC} = \frac{|CH|}{|AH|} = \frac{\sqrt{3} \cdot |HE|}{3x} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $tg\,\hat{BAC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Задача №5.

$\exists\ O_1, O_2$ – центры окр., R, r – радиусы

$\Omega(O_1; R)$

$\omega(O_2; r)$

$\Omega \cap \omega = A$

$[AB]$ – диам Ω

$[BC]$ – хорда Ω

$[BC]$ кас. ω в точке D

$[AD) \cap \Omega = \{A; E\}$

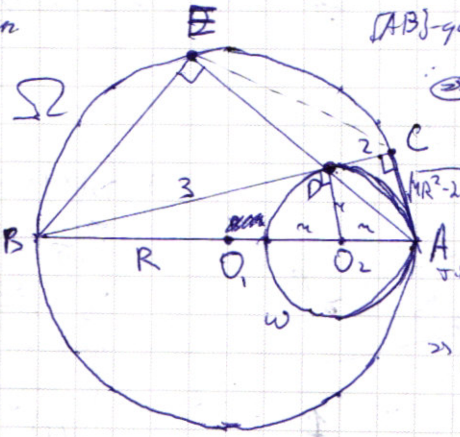
$|BD| = 3$

$|CD| = 2$

$r = ?$

$R = ?$

$S_{BACE} = ?$



$[AB]$ – диам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{BEA} = 90°$
$\hat{BCA} = 90°$

$[BC]$ кас. ω в т. D $\Rightarrow [O_2D] \perp [BC]$

т.о. $\cos \hat{CBA} = \frac{|BD|}{|BO_2|} = \frac{|BC|}{|BA|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{2R-r} = \frac{5}{2R} \Leftrightarrow 6R = 10R - 5r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4R = 5r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r = \frac{4}{5}R$ (*)

// я пыталась решить... //

* на чертеже принципиально не уч. никого, чем я пользуюсь при решении, при O_1 лежит внутри ω.

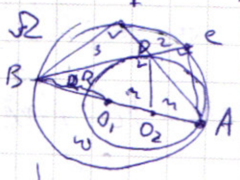
У пр-уг $\triangle BDO_2$: по т. Пиф:

~~...~~ $9 + r^2 = (2R - r)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} \Leftrightarrow$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} 9 = \frac{20}{5}R^2 - \frac{16}{5}R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5}R^2 = 9 \Leftrightarrow R^2 = \frac{5 \cdot 9}{4} \Leftrightarrow R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$



$r = \frac{4}{5}R = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5}\sqrt{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

$|BC| \cdot |CA|/2 = S_{\triangle BCA} = \frac{5}{2}\sqrt{4R^2 - 25} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{45 - 25} = \frac{5}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

аналог. $S_{\triangle DCA} = \frac{2}{2}\sqrt{4R^2 - 25} = 2\sqrt{5} \Rightarrow S_{\triangle BDA} = 3\sqrt{5}$

$\hat{EDC} = \hat{BDA}$ (~~...~~ вертик.)
$\hat{ECB} = \hat{BE}/2 = \hat{EAB}$ $\Rightarrow$ по двум углам $\triangle BDA \overset{k_1}{\sim} \triangle ECD$

$k_1 = \frac{|DA|}{|CD|} = \frac{\sqrt{4 + 4R^2 - 25}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 20}}{2} = \sqrt{6}$

$S_{\triangle ECD} = \frac{1}{k_1^2} S_{\triangle BDA} = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\hat{EDB} = \hat{CDA}$ (вертик.)
$\hat{EBC} = \hat{EAC} = \hat{CE}/2$ $\Rightarrow$ по двум углам $\triangle BED \overset{k_2}{\sim} \triangle ADC$ $\quad k_2 = \frac{|BD|}{|DA|} = \frac{3}{\sqrt{4+20}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

(см. на обороте)

$S_{\triangle BED} = k_2^2 \cdot S_{\triangle CDA} = \frac{6}{16} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{3}{4}\sqrt{5}$ $\quad S_{BACE} = S_{\triangle BCA} + S_{\triangle BED} + S_{\triangle DEC} = 5\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$, $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

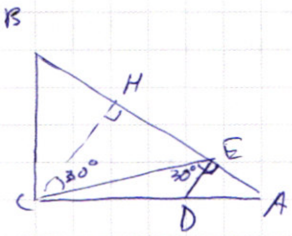
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача №4. б

$\triangle ABC$ – п/уг
$[AB]$ – гипотенуза
$|AD| : |AC| = 1:3$
$D \in [AC]$
$E \in [AB] : [DE] \perp [AB]$
$\widehat{CED} = 30^\circ$
$|AC| = \sqrt{7}$

$S_{CED} = ?$



I – см. пункт (а) на странице 1.

II. $S_\triangle CED = ?$

$\triangle AED \sim \triangle AHC \overset{k}{\sim} \triangle BAC$ (по пр. углу и общ. углу A), $k = \frac{|AH|}{|AC|}$

т.о. $S_{\triangle CED} = \frac{2}{3} S_{\triangle CEA} = 2 S_{\triangle DEA} =$

$= \frac{2}{9} S_\triangle CHA = \frac{2}{9} \cdot k^2 \cdot S_\triangle BAC$ $=$

$= \frac{2}{9} \cdot \frac{|AH|^2}{|AC|^2} \cdot S_{\triangle BAC} = \frac{2}{9} \cdot \frac{|AH|^2}{|AC|^2} \cdot \frac{|AC|^2}{2} \cdot tg\hat{A} = \frac{1}{9} |AH|^2 tg\hat{A} =$

$$\left.\begin{array}{l} |AH|^2 = |AC|^2 - |HC|^2 \\ \frac{|HC|}{|AH|} = tg\hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow |AH|^2 (1 + tg^2\hat{A}) = |AC|^2 \Rightarrow |AH|^2 = \frac{|AC|^2}{1 + tg^2\hat{A}}$$

$= \frac{1}{9} \frac{|AC|^2}{1 + tg^2\hat{A}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{1 + \frac{4 \cdot 3}{9}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\cancel{7} \cdot 3}{\cancel{7}} = \frac{1}{3}$

Ответ: $S_{\triangle CED} = \frac{1}{3}$

Задача №6.

$$8x - 6|2x - 1| \overset{①}{\leq} ax + b \overset{②}{\leq} -8x^2 + 6x + 7$$

$\measuredangle$ $f_1(x) = 8x - 6|2x-1| = \begin{cases} 8x - 6(2x-1), & x \geq \frac{1}{2} \\ 8x + 6(2x-1), & x < \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} -4x + 6, & x \geq \frac{1}{2} \\ 20x - 6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$\measuredangle$ $f_2(x) = -8x^2 + 6x + 7$ (парабола, ветви вниз)

$f_2(\frac{1}{2}) = -8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 8$

$x_0 = \frac{-6}{2 \cdot -8} = \frac{3}{8}$

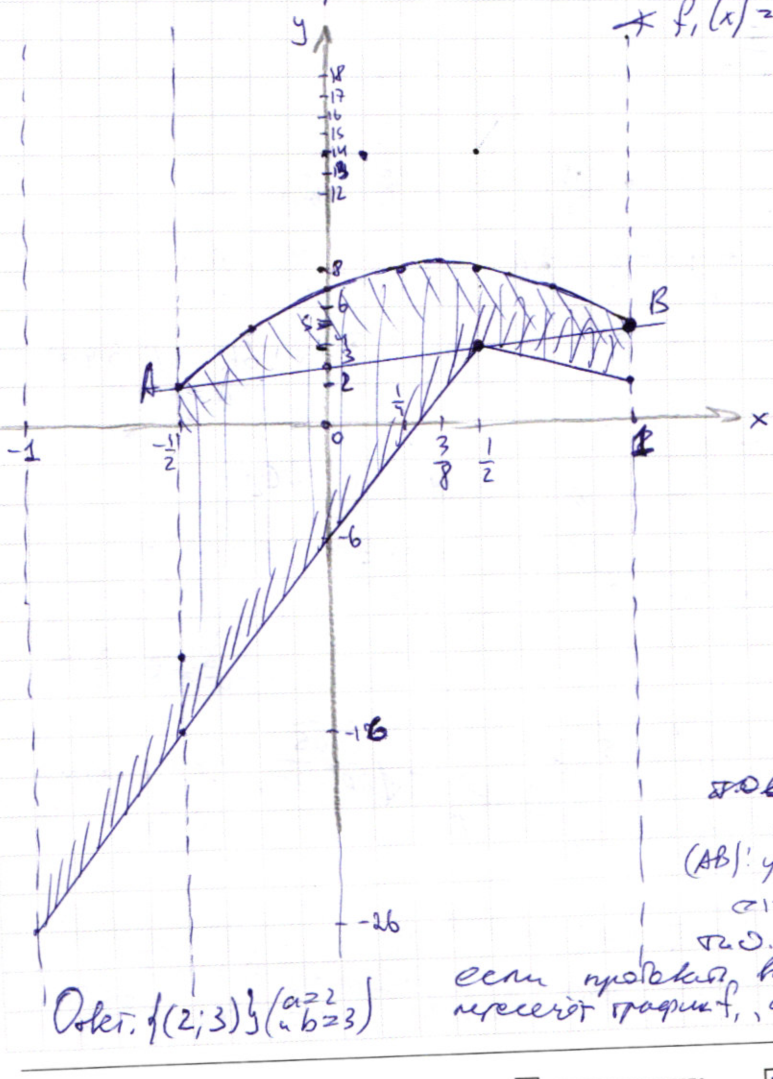
$y_0 = f_2(\frac{3}{8}) = 8\frac{1}{8}$

в силу симметрии параболы $f_2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$

$f_2(1) = -8 + 6 + 7 = 5$

$f_2(0) = 7$

$f_2(-\frac{1}{2}) = -8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$



$\exists$ A, B – точки: $A(-\frac{1}{2}; f_2(-\frac{1}{2}))$
$B(1; f_2(1))$

(по аксиоме.)

по графику – (AB) – подходит

(AB): ур-е по двум. точк. $\frac{x-1}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{y - f_2(1)}{f_2(-\frac{1}{2}) - f_2(1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{y-5}{2-5} \Leftrightarrow 2x + 2 = y - 5 \Leftrightarrow y = 2x + 3$

т.о. $\left\{\begin{array}{l} a = 2, b = 3 \end{array}\right.$ – подходит.

если провести, через другую т. A, то $y_A < 2$, тогда он пересечёт график f_1, а значит не подх. аналог. не подх другая B

Ответ: $\{(2;3)\}$ $\left(\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \end{array}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$\exists \div\div (a_n)$: $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = x$, p – знаменатель прогрес. ($a_1 p = a_2$, $a_2 p = a_3$ и т.д.)

$ax^2 - 2bx + c = 0$, a_4 – корень.

тогда $b = ap$, $c = ap^2$, $x = ap^3$

тогда через Дискрим.! (половинная формула) $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{ap \pm \sqrt{a^2p^2 - a \cdot ap^2}}{a} = p$

т.о. $ap^3 = p \Leftrightarrow ap^2 = 1 \Leftrightarrow c = 1$

Ответ: $c = 1$.

Задача №3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y+2)(y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(ур-е эллипса с центром в $O(6;1)$)

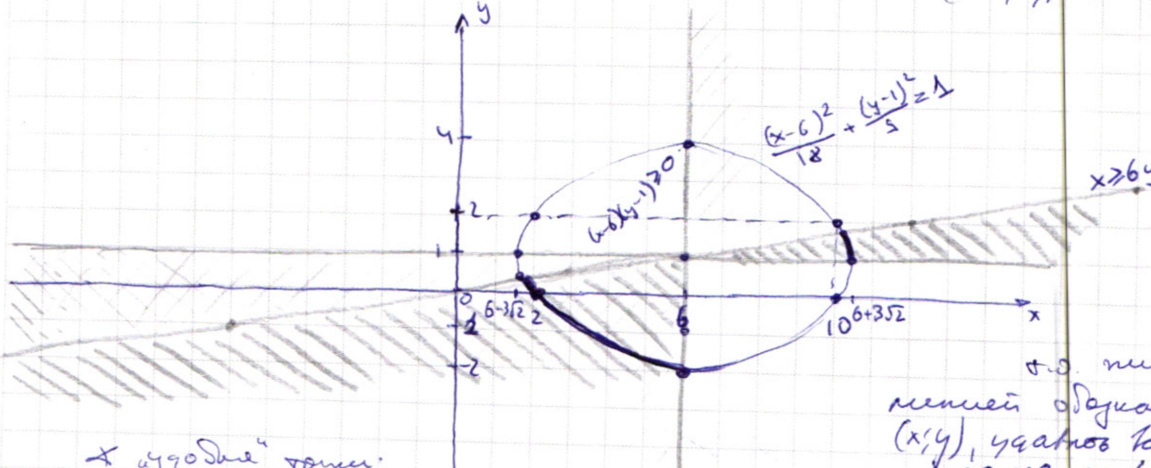
(у эллипса есть точки $(6;-2)$ и $(6;4)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6y \\ (x-6)(y-1) \geq 0 \\ x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \quad (1) \\ 2(y-1)^2 + (x^2 - 12x + 18) = 0 \end{cases}$$

$x = \frac{6 \pm 3\sqrt{2}}{2}$

(т.о. точки $(\frac{6 \pm 3\sqrt{2}}{2}; 1)$ подх.)

для точного изображения эллипса заметим, что в $x = 2$ и $x = 10$ подх. точки $y = 0$ и $y = 2$ (по ур-е эллипса)



т.о. жирной линией обозначено ГМТ $(x;y)$, удовл. всем ур-ям кроме (1) (не полностью, но по ОДЗ удовл.)

$\exists$ "удобные" точки:

$\exists (2;0)$: $2 - 0 = \sqrt{(2-6)\cdot(-1)} = 2$, т.о. точка $(2;0)$ – решение.

ур-е (1) при возведении в квадрат становится ур-ем эллипса, а значит решение – перес. двух эллипсов. т.о. не более 2х точек.

есть шанс, что вторая точка не попадает под ОДЗ, поэтому есть шанс, что я решил задачу

(см. на обороте)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{(*) \Leftrightarrow x^2 - 12yx + 36y^2 = xy - 6y - x + 6}$

Ответ: ~~{(2;2)}~~ $\{(2;0)\}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}=\sqrt{y(x-6)-1(x-6)}=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ x^2-12x+36=-2y^2+4y+16 \end{cases}$$

$(x-6)^2=2(-y^2+2y+8)$

$(x-6)^2+2(y^2-2y-8)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq 6y \\ \cancel{x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6} \\ \cancel{x^2-12x+36=2y^2+4y+6} \end{cases}$$

$+2y^2-4y+16$

$\cancel{x^2-12x}\ \ -2(y^2+2y)$

$(x-6y)^2=(y-1)(x-6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$

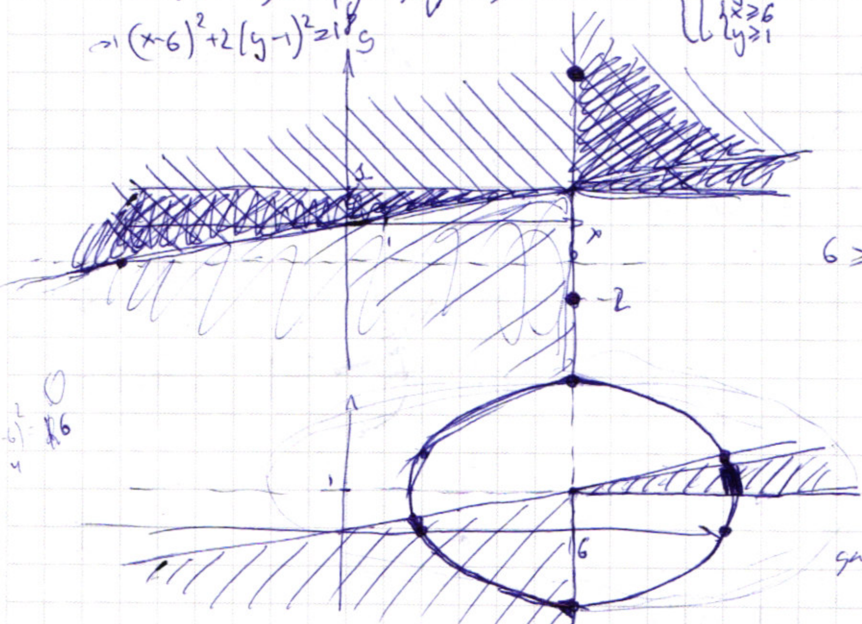
$(x-6y)^2=(y-1)(x-6)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y\geq 0 \\ x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+2(y+2)(y-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6)^2+2(y+2)(y-4)=0 \\ x\geq 6y \\ \left[\begin{cases} x\leq 6 \\ y\leq 1 \end{cases} \right. \\ \left.\begin{cases} x\geq 6 \\ y\geq 1 \end{cases}\right. \end{cases}$$

$2y^2-4y+2-18$

$\Rightarrow (x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$



при $y<-2$

$(x-6)^2 + 2(y+2)(y-4)=0$, >0, >0, <0, <0

$\geq 6y$, ≤ 1

$6\geq x \cancel{\geq 6y} \leq 6$

не под х.

при $y=-2$

$(x-6)^2+0=0$

$x=6$

при $y\in(-2;4)$

для провер.:

$-2(y+2)(y-4)\geq 0$

$(x-6)^2\geq 0$

$x\in[6y;6]$

$\Leftrightarrow \cancel{z=(x-6)^2}$

$z=2(y+2)(y-4)$

$\cancel{8=2(y+2)(y-4)=z}$

$y(x-6)=x+6$

$y=\frac{x+6}{x-6}\to 1$

-12

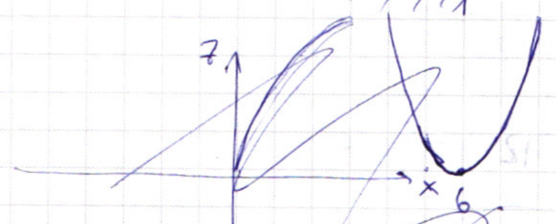
-18^2

$(x-6)^2$: 16

$x=6$

$y=-2$ — реш

$y=4$



$\Leftrightarrow (x-6)^2\in[0;324]$

$-2(y+2)(y-4)\geq 0 \in[0;18]$

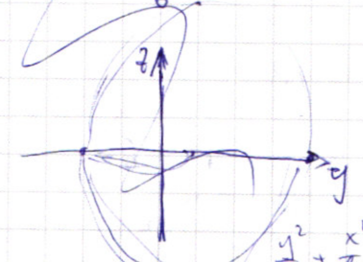
т.е. $x \in (x^2-6)\in((36y^2-6)^2; 18-$

$(0;(6y-6)^2)$

$(x-6)^2=-2(y+2)(y-4)$

$x=6$

$-18=(y+2)(y-4)$ y^2+



$\frac{y^2}{a}+\frac{x^2}{b}=0$

$y^2+x^2=0$ – точка

$y^2-x^2=1$ – гипр.

$ky^2-x^2=\frac{1}{p}$ – эллипс

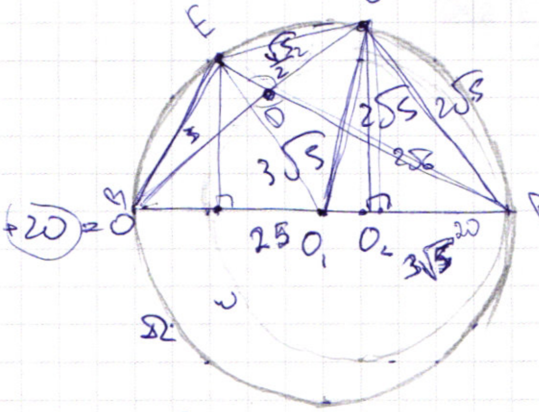
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases}(x-6y)=\sqrt{(x-6)(y-1)}\\ \cancel{(x-6)^2+2(y+2)(y-4)=0}\\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18\end{cases}$$



$x^2-12x+18 \quad +2y^2-4y+2 \quad +20=0$

$9\cdot5=25+x^2$

$45=25+x^2$

$20=x^2$

$x=2\sqrt{5}$

y^2

$x^2-12x+36$

$y^2 \qquad 4(3x-y$

$\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot2\sqrt{5}$

$=\frac{6}{16}\cdot2\sqrt{5}=$

$=\frac{3}{4}\sqrt{5}$

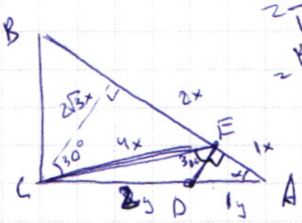
$|DA|=2\sqrt{6}$

$S_{BCA}=5\sqrt{5}$

$S_{CDA}=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow S_{BAA}=3\sqrt{5}$

$S_{DEC}=\frac{3\sqrt{5}}{\ldots}=\ldots=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{2}$



$\frac{|DE|}{|EA|}=\frac{|BC|}{|CA|}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$|DE|=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

$y^2=\frac{2\cdot3}{9}x^2+x^2=\frac{15}{9}x^2=\frac{5}{3}x^2$

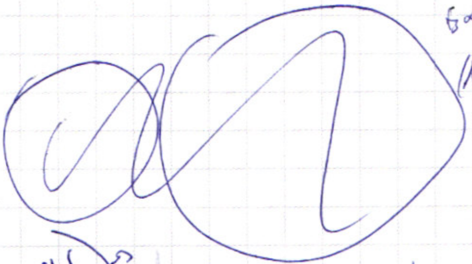
$y=\frac{\sqrt{15}}{3}x$

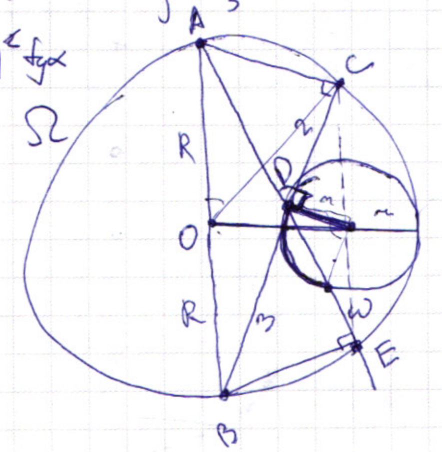
$S_{CED}=\frac{2}{3}S_{CDA}=\frac{2}{3}\cdot(S_{CHA}-S_{CEH})=\quad\sqrt{7}$

$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}S_{ACH}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{|HA|}{|CA|}\cdot|AD|\cdot|AC|^2\operatorname{tg}\alpha\right.$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|BC|}{}$

$|AH|=$





$\frac{|AD|}{3}=\frac{2}{|DE|}$

$\Rightarrow |AD|\cdot|DE|=6$

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

>0

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

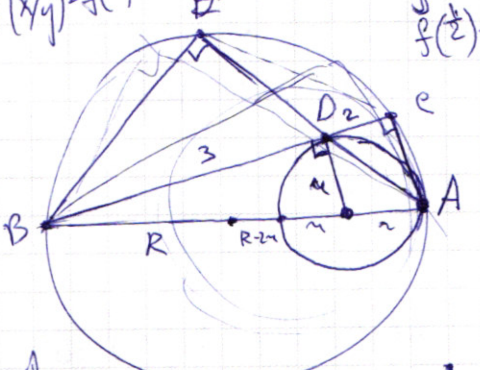
$\frac{1}{y} \quad \frac{1}{2y}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)\;|AD|\cdot|DE|=6$

$|AC|^2+25=4R^2$

$|AE|^2+(|AD|+|DE|)^2=4R^2$

$|AE|^2+|AD|^2+12+|DE|^2=4R^2$



$\frac{9}{4}\cdot5$

$\frac{R+R-r}{3}=\frac{2R}{5}=\cos\widehat{CBA}$

$20 \quad 2 \quad 3$

$4R-5r=6R$

$4R=5r$

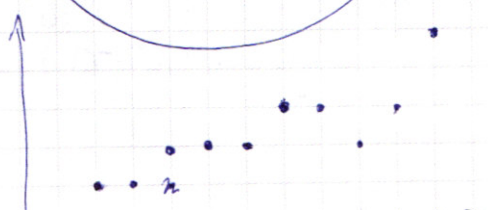
$9+r^2=(2R-r)^2$

$9+r^2=4R^2-4Rr+r^2$

$9=\frac{20}{5}R^2-\frac{16}{5}R^2$

$\frac{9\cdot25}{4\cdot36}=R^2 \quad R=\frac{3\sqrt{5}}{6\cdot2}$

$=\frac{5}{2}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\forall_y \quad f\left(\frac{1}{2y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + \underbrace{f(2) + f\left(\frac{1}{4}\right)} = f\left(\frac{1}{y}\right) + \underbrace{f(4) + f(2) + f\left(\frac{1}{16}\right)}$

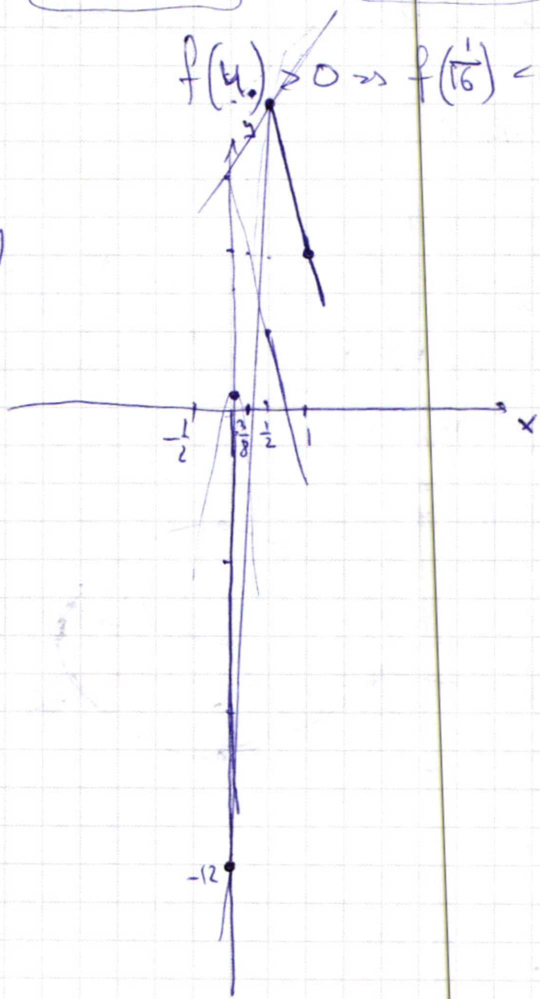
$f\left(\frac{1}{22}\right) = f\left(\frac{1}{11}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(4_0) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{16}\right) < 0$

$x \geq \frac{1}{2} \quad (2x-1) > 0$

$y = 8x - 6|2x-1| \leq ax+b$

$ax+b \leq -8x^2+6x+7 = y$



$8x - 12x + 12 \quad 8x - 12x + 6$

$x \geq \frac{1}{2} \quad -4x+12 \qquad -4x+6$

$x \leq \frac{1}{2} \quad 8x + 12x - 12$

$20x - 12$

$-8x^2+6x+7=y$

$x_0 = -\frac{6}{2\cdot -8} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$-\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = y_0$

$\frac{9}{8} + 7 = y_0$

$8\frac{1}{8} = y_0$

$-8 \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{2} + 7 =$

$= -2 + 3 + 7 = 8$

$\alpha \quad p\alpha \quad p^2\alpha$

$ax^2 + 2pax + p^2a$

$\cancel{x = \frac{-pa \pm \sqrt{(pa)^2 - 4p^2aa}}{2a} = \frac{-p\alpha \pm \sqrt{4p^2\alpha^2 - 4p^2\alpha^2}}{2\alpha}} = -\frac{p}{2}$

$x = \frac{p\alpha \pm \sqrt{(p\alpha)^2 - p^2\alpha^2}}{\alpha} = p$

$p^3a = p \Leftrightarrow p^2a = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y\geq 0 \\ (x-6)(y-1)\geq 0 \\ x^2-12yx+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-6y\geq 0 \\ (x-6)(y-1)\geq 0 \\ x^2+36y^2=13xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2=12x+4y-20 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 34y^2=13xy-13x-10y+26 \\ -17x^2=-\cancel{223}x-78y+13xy+366 \end{cases}$$

$34y^3+10y+26=13x(y-1)$

-18

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

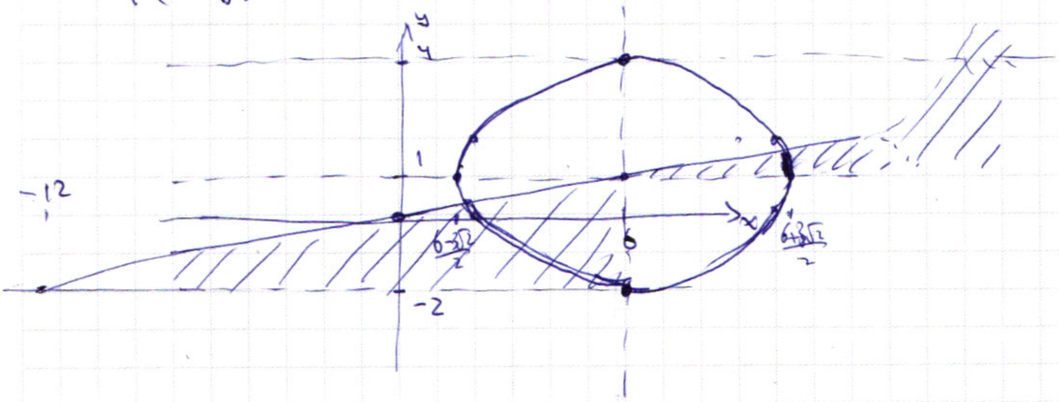
$x=6y$

$x=\frac{12\pm\sqrt{144-72}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{18}}{2}=\frac{6\pm3\sqrt2}{2}$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$ $\qquad 2(y-1)^2=-(x^2-12x+18)$

$$\begin{cases} (x-6)^2+2(y+2)(y-4)=0 \\ (x-6y)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \end{cases} \quad (x-6)^2=-2(y+2)(y-4) \Rightarrow y\in[-2;4]$$

$x-$



$x^2-12yx+36y^2=xy-6y-x+6$

$x-6=a$
$y-1=b$

$a^2+2b^2-18=0$

$6 \quad -2$

$36\cdot4$

$36+24\cdot6+36\cdot4=\cancel{-2\cdot6-6\cdot2-6+6}$

$x-6y=t \qquad t=\sqrt{x\cdot y-t}$

$x=\sqrt{-x+6}$

$2 \qquad -2+6$

$x^2+x \qquad 36y^2+6y$

$x^2+x \qquad a^2+a$

$-2ax$

$10=\sqrt{n.f}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА