МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

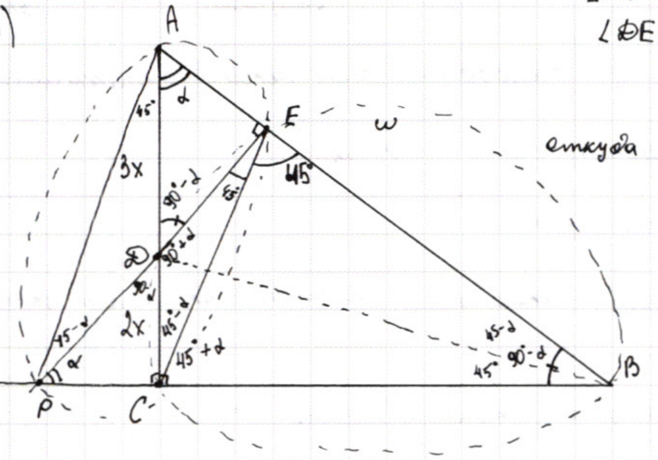
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Пусть $\angle BAC = \alpha$

а)



$\angle DAE$ – общий для $\triangle DAE$ и $\triangle BAC$.

$\angle DEA = \angle ACB = 90°$

$\Downarrow$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$, по двум углам

откуда мы знаем, что:

$$\frac{AD}{AB} = \left(\frac{AC}{AE}\right)^{-1} = \left(\frac{CB}{DE}\right)^{-1}$$

1) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

2) $\angle ADE = \angle ABC$.

$\angle DEB = 90°$; $\angle CED = 45° \Rightarrow \angle CEB = 90° - 45° = 45°$

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$, из определения тангенса в прямоугольном треугольнике.

Пусть $AC = 5x$, тогда из того, что $AD : AC = 3 : 5$ следует, что $AD = 3x$, а тогда: $DC = AC - AD = 2x$

Продлим ED до пересечения с BC в точке P, тогда:

$\angle PDC = \angle ADE = 90° - \alpha$, как вертикальные $\Rightarrow \angle DPC = \alpha$.

$AC \perp AB$

$tg\,\alpha = \frac{CD}{PC} = \frac{2x}{PC}$.

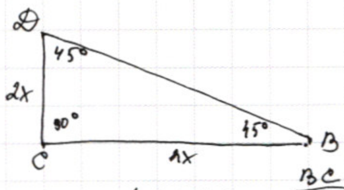
$\angle CAE = \angle EPC = \alpha \Rightarrow AECP$ – вписан в окружность

$\angle PEC = \angle PAC = 45°$, как опирающиеся на одну хорду CP.

$CDEB$ также вписан, т.к. $\angle DCB = 90°$ и $\angle DEB = 90°$.

$\angle DEC = \angle DBC = 45°$, как опирающиеся на одну хорду DC.

Рассмотрим $\triangle CDB$



$\angle CDB = 90° - 45° = 45°$

$\Downarrow$

$CD = CB = 2x$

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = 0{,}4$

$\boxed{\text{Ответ: а) } tg\angle BAC = 0{,}4}$

б) $AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

См. продолжение на стр. 4.

(1) Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии, тогда:

a

$b = aq$

$c = aq^2$

Рассмотрим данный в условии многочлен:

$ax^2 + 2bx + c = 0$

Заметим, что дискриминант данного уравнения равен нулю, т.к.:

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 4\cdot(a^2q^2 - a\cdot aq^2) = 0$

Тогда единственный корень: $x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} = -\frac{aq}{a} = -q$ $\quad a \neq 0$ по очевидным причинам. (Бесконечное количество решений у данного уравнения)

Но по условию мы знаем, что x – четвертый член последовательности, т.е.:

$x = aq^3$, но также мы знаем, что $x = -q$, т.е.:

$aq^3 = -q \quad \left| \cdot \frac{1}{q} \right.$, если $q \neq 0$

$aq^2 = -1$, а aq^2 и есть искомый третий член геометрической прогрессии.

Рассмотрим ситуацию, когда $q = 0$, тогда $b = 0$ и $c = 0$

$ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, что также соответствует правде.

Т.е. $c \in \{-1; 0\}$ если мы рассматриваем нулевое значение знаменателя геометрической последовательности.

Ответ: $c \in \{0; -1\}$, если разрешается рассмотрение знаменателя геометрической прогрессии равного нулю. $c = -1$, если известно, что знаменатель геометрической прогрессии ненулевой.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

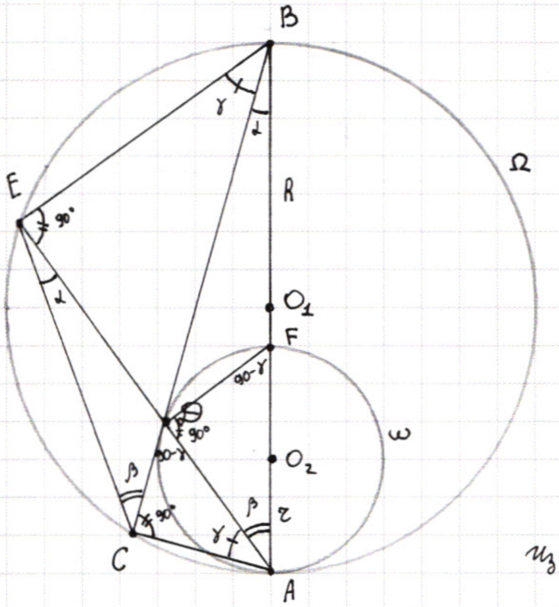
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Пусть R — радиус Ω

r — радиус ω



$\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$, как углы, опирающиеся на диаметр AB.

$\angle CBA = \angle CEA = \alpha$, как углы, опирающиеся на одну хорду AC.

$\angle BAE = \angle BCE = \beta$, как углы, опирающиеся на одну хорду BE

$\angle EBC = \angle EAC = \gamma$, как углы, опирающиеся на одну хорду EC.

Пусть O_1 — центр Ω

O_2 — центр ω.

Заметим, что $B; O_1; O_2; A$ лежат на прямой AB.

Из суммы углов треугольника BEA:

$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

По двум углам подобны следующие треугольники:

$\Delta BED \sim \Delta ACD$; откуда мы знаем, что:

$$\frac{CD}{ED} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{EB}$$

$\Delta EDC \sim \Delta BDA$; откуда мы знаем, что:

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{ED}{BD}$$

Пусть F — вторая точка пересечения AB и ω. Тогда по теореме об угле между хордой и касательной:

$\angle DFA = \angle CDA = 90^\circ - \gamma$

AF — диаметр, т.к. содержит O_2. $\Rightarrow \angle FDA = 90^\circ$, т.к. он опирается на диаметр.

Запишем сумму углов в ΔDFA:

$$\angle DFA + \angle FDA + \angle DAF = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - \gamma + 90^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \gamma = \beta$$

По теореме о касательной и секущей: $BF = 2R - 2r$

$$BF \cdot FA = BD^2 \Rightarrow (2R - 2r) \cdot 2r = 9 \Leftrightarrow (R - r) \cdot r = \frac{9}{4} \qquad (1)$$

Т.к. $\gamma = \beta$, то AD — биссектриса в ΔABC. $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2R}{AC} = 3$

В ΔEBC углы при основании равны, значит $EC = EB$.

Рассмотрим $\triangle ABC$:

$AC = \frac{2}{3}R$

$AB = 2R$

$BC = BD + DC = 4$

$\angle ACB = 90°$

По теореме Пифагора:

$\frac{4}{9}R^2 + 16 = 4R^2$

$4\left(1 - \frac{1}{9}\right)R^2 = 16$

$\left(1 - \frac{1}{9}\right)R^2 = 4$

$\frac{8}{9}R^2 = 4$

$R^2 = \frac{9}{2}$

$$\boxed{R = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

Подставим $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ в (1):

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - r\right)\cdot r = \frac{9}{4}$

$\frac{3\sqrt{2}}{2}r - r^2 - 9/4 = 0$

$r^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}r + 9/4 = 0$

$D = 9$

Продолжение (4)

По теореме Пифагора:

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$25x^2 + 4x^2 = AB^2$

$AB = \sqrt{29}\,x = \frac{29}{5}$

Из $\triangle AED$: $\frac{AE}{DE} = \frac{1}{tg\,\alpha}$ $DE = AE\,tg\,\alpha$, $AE = \frac{DE}{tg\,\alpha}$

По теореме Пифагора! $\longrightarrow$ $DE^2\left(1 + \frac{1}{tg^2\alpha}\right) = 9x^2$

~~$AD^2 = DE^2 + AE^2$~~

~~$9x^2 = AE^2(1 + tg^2\alpha)$~~

~~$\frac{\frac{9\cdot 29}{25}}{1+0,16} = AE^2$~~

~~$\sqrt{\frac{1,16\cdot 9\cdot 29}{25}} = AE$~~

~~$\frac{3}{5}\sqrt{1,16\cdot 29} = AE$~~

~~$EB = \frac{(\sqrt{29})^2}{5} - \frac{\sqrt{29}}{5}\cdot 3(\sqrt{1,16}) = \frac{\sqrt{29}}{5}\left(29 - 3\sqrt{1,16}\right).$~~

$DE^2\left(1 + \frac{1}{0,16}\right) = 9x^2$

$DE^2\left(1 + \frac{100}{16}\right) = 9x^2$

$DE = \frac{9x^2}{116}\cdot 16$

$DE = \frac{3x\cdot 4}{\sqrt{116}} = \frac{3\cdot\sqrt{29}\cdot 4}{5\sqrt{116}} =$

$= \frac{3\cdot 4}{5\cdot\sqrt{4}} = \frac{6}{5} =$

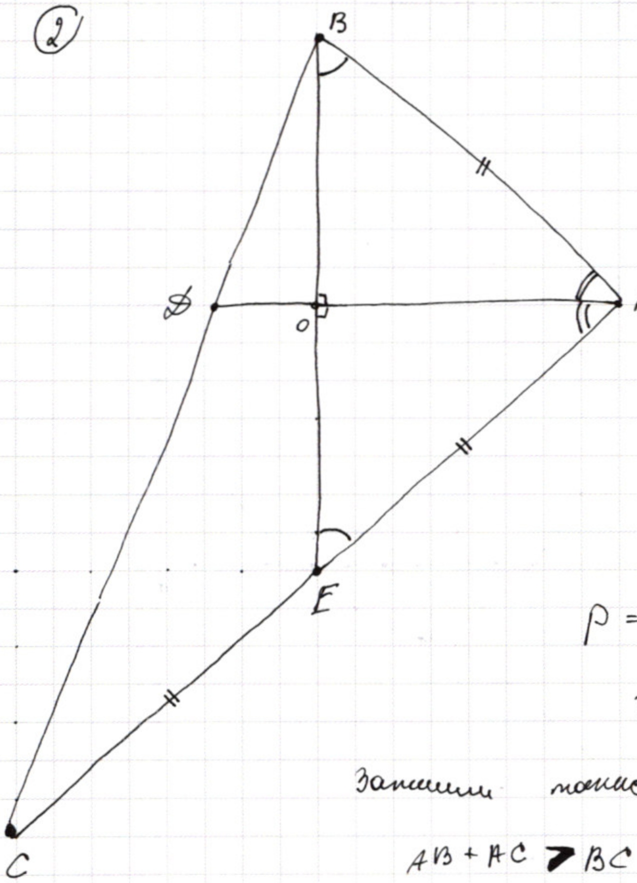
$= 1,2$

См продолжение на стр. 8.

$\cancel{y - 2x = \sqrt{xy} - 2x - y + 2}$

$\cancel{2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0}$

②



AD – биссектриса угла A в $\triangle ABC$, т.е. $\angle BAD = \angle CAD$;
BE – медиана, т.е. $CE = EA$
$AD \perp BE \Rightarrow \triangle ABO = \triangle AEO$, по общей стороне и двум прилежащим к ней углам.
Откуда $BA = EA$.

Пусть $BA = x$, тогда $AC = 2x$
Пусть $BC = y$. $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$

Запишем выражение для периметра:

$$P = AB + BC + BA = 2x + x + y = 3x + y = 1200.$$

$$3x + y = 1200.$$

Запишем также неравенство треугольника:

$$AB + AC > BC \;;\; AB + BC > AC;\; AC + CB > AB$$

$$3x > y \;;\; x + y > 2x \;;\; y + 2x > x$$

$$3x > y \;;\; \underbrace{y + 2x > x}_{\text{всегда верно}} \;;\; x + y > 2x \Leftrightarrow y > x$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1200 \\ 3x > y > x \end{cases} \quad x \in \mathbb{N};\; y \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{y}{3} + x = 400$$

$$\frac{y}{3} = 400 - x \Rightarrow y \,\vdots\, 3, \text{ т.к. } (400 - x) \in \mathbb{Z}$$

$y = 3^{\sigma} m$, где $m \in \mathbb{N}$; $m \not\vdots\, 3$

Тогда: $y = 3k$; где $k \in \mathbb{N}$; $k \not\vdots\, 3^{\sigma+1}$, где $\sigma \geq 1$, $\sigma \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} k + x = 400 \\ \frac{x}{3} < k < x \end{cases} \qquad k = 400 - x$$

$400 - x = x \Rightarrow x = 200$

$400 - x = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}x = 400$
$x = 300$

Откуда: $k \in (100; 200)$

Всего 99 возможных значений k, т.е. и 99 возможных треугольников.

$\boxed{\text{Ответ: } 99.}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №5
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

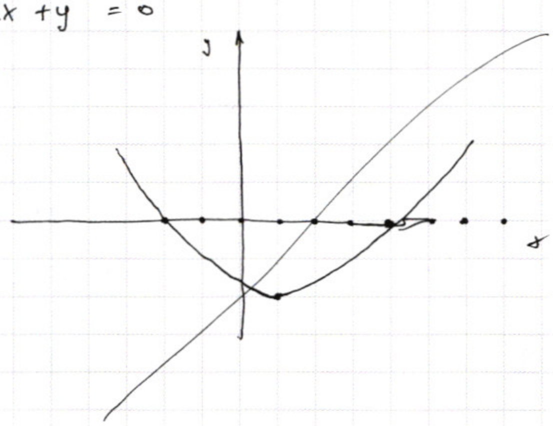
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ -4y + 2x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 - 2 + 2x + y = 0$



$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 3^2$

$x_1 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$x_в = \frac{1}{4}$

$2x - 1 \geq 0 \qquad x + 2x - 1 = 3x - 1.$

$2x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{2} \qquad x - 2x + 1 = -x + 1.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ $2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x-1|$

1) Рассмотрим $f(x) = 2x^2 - x - 1$. Найдём корни многочлена:

$2x^2 - x - 1 = 0$ $\qquad x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 3^2$ $\qquad x_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$

График функции $f(x)$ – парабола с ветвями направленными вверх.
Найдем вершину параболы:

$$x_в = -\frac{(-1)}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$y_в = 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8} = -1\frac{1}{8}$$

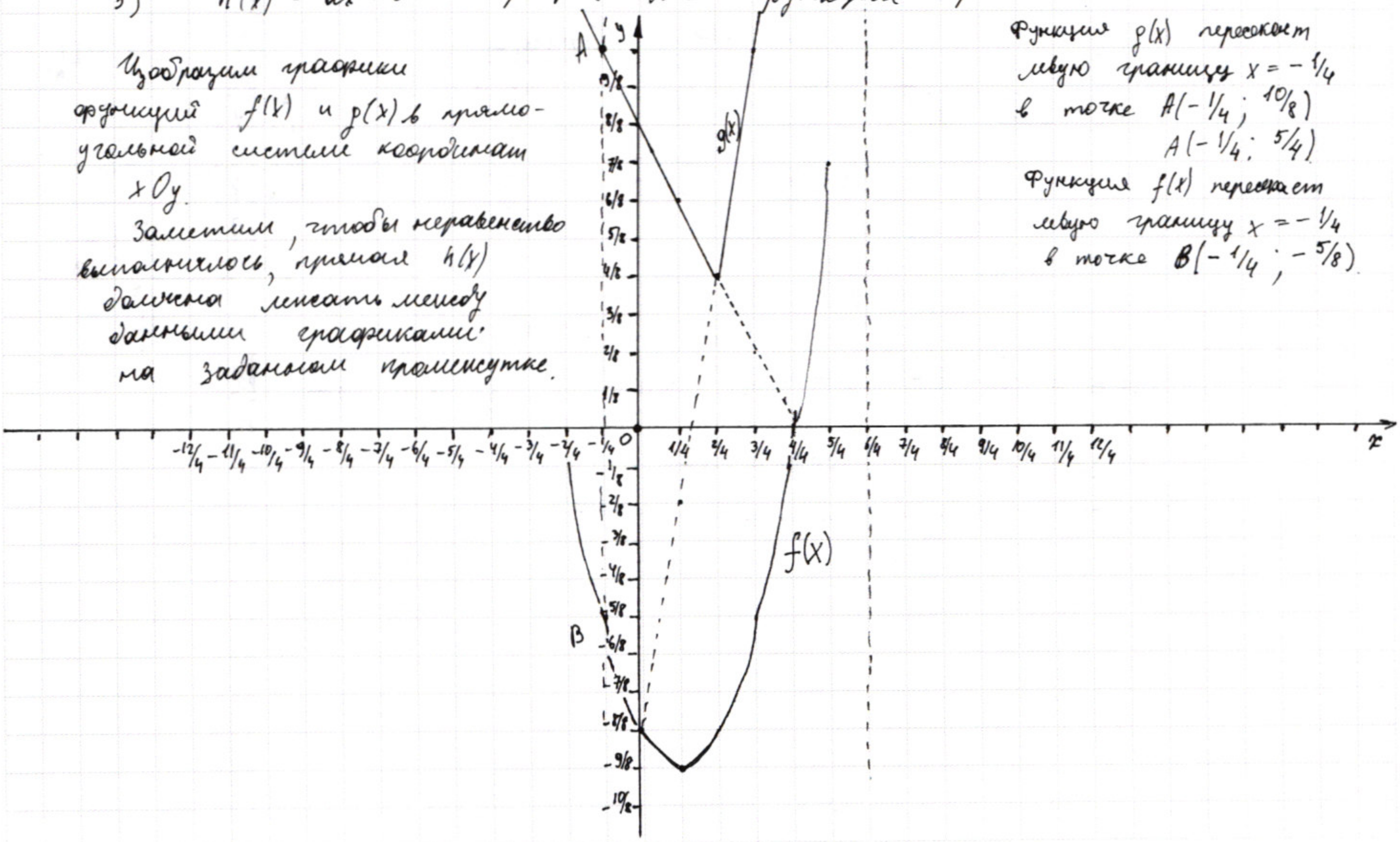
2) Рассмотрим $g(x) = x + |2x-1|$. Рассмотрим раскрытие модуля:

$$g(x) = x + |2x-1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \geqslant 1/2 \\ -x + 1, & x < 1/2 \end{cases}$$

3) $h(x) = ax + b$ – график этой функции прямая

Изобразим графики функций $f(x)$ и $g(x)$ в прямоугольной системе координат xOy.

Заметим, чтобы неравенство выполнялось, прямая $h(x)$ должна лежать между данными графиками на заданом промежутке.



Функция $g(x)$ пересекает левую границу $x = -1/4$ в точке $A(-1/4;\ 10/8)$
$A(-1/4;\ 5/4)$

Функция $f(x)$ пересекает левую границу $x = -1/4$ в точке $B(-1/4;\ -5/8)$.

$f(14) = f(7) + f(2) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(8) + f(2) = 4$

$f(17) = 1 \cdot \left[\frac{17}{2}\right] = 8$

$f(18) = f(2) + f(9) = 3$

$f(19) = 1 \cdot \left[\frac{19}{2}\right] = 9$

$f(20) = f(4) + f(5) = 4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

Посчитаем теперь число подходящих под условие $f(q) > f(p)$ пар.

$1 \cdot 21 + 2 \cdot 18 + 4 \cdot 14 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 =$

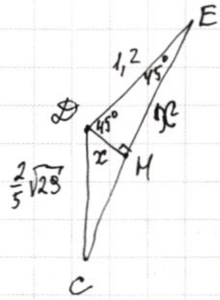
$f(a)=0$ число чисел; число чисел $f(a>0)$; $f(a)=1$ число чисел; число чисел $f(a)>1$ и т.д.

$= 21 + 36 + 56 + 48 + 16 + 3 + 2 + 1 = 57 + 56 + 64 + 6 = 70 + 113 = 183.$

$\boxed{\text{Ответ: 183 пар чисел } (x; y).}$

Продолжение (4)

Высота в $\triangle CDE$, опущенная к стороне CE будет равна:



Пусть $DH = x$

Тогда $EH = x$, т.к. $\operatorname{tg} 45° = 1$.

$2x^2 = 1{,}2^2$

$x^2 = \frac{1{,}2^2}{(\sqrt{2})^2}$

$x = \frac{1{,}2}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}2\sqrt{2}}{2} = 0{,}6\sqrt{2}$

По теореме Пифагора:

$HC = \sqrt{DC^2 - DH^2}$, $HC = \sqrt{\frac{4}{25} \cdot 29 - 0{,}36 \cdot 2} =$

$= \sqrt{\frac{16 \cdot 29 - 36 \cdot 2}{100}} = \frac{\sqrt{392}}{10} =$

$= \frac{2\sqrt{98}}{10} = \frac{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{2}}{10} = 1{,}4\sqrt{2}.$

$29 \cdot 16 = 174 + 290 = 464$; $464 - 72 = 392$; $392 : 4 = 98$; $98 : 2 = 49$

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE\,(EH + HC)\sin 45° = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 1{,}2 \cdot \cancel{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = 1{,}2.$

$\boxed{\text{Ответ: б) } S_{CED} = 1{,}2.}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(7) 1) Рассмотрим $a \in \mathbb{Z}$

Представим число a в виде произведение его простых натуральных делителей (по основной теореме арифметики данное разложение единственно).

$$a = p_1^{\sigma_1} \cdot p_2^{\sigma_2} \cdot \ldots p_n^{\sigma_n}$$, где p_i - простой делитель числа a

σ_i - степень, в которой данный делитель входит в число a.

n - количество простых делителей числа a.

$$a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\sigma_i}$$

Тогда по свойству функции $f(AB) = f(A) + f(B)$ мы $f(p) = [p/2]$ получаем, что:

$$f(a) = \sigma_1 [p_1/2] + \sigma_2 [p_2/2] + \ldots + \sigma_n [p_n/2]$$

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i [p_i/2]$$ по определению $\sigma_i \geq 1$; $\sigma_i \in \mathbb{N}$.

$p_i \in \mathbb{N}$; $p_i \geq 2$.

Откуда получаем, что для $\forall a \in \mathbb{Z}$:

$$f(a) \geq 1$$

2) Рассмотрим $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}$.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{q}\right)$$

Аналогично пункту 1:

$$q = p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_n^{\sigma_n}$$

$$q = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\sigma_i}$$

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{\prod_{i=1} p_i^{\sigma_i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{p_i}\right) \cdot \sigma_i =$$

$$= f\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{-\sigma_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(-\sigma_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \sigma_i f(p_i) = -\sum_{i=1}^{n} \sigma_i [p_i/2]$$

Аналогично Пусть $p = b_1^{e_1} \cdot b_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot b_m^{e_m}$

$$p = \prod_{i=1}^{m} b_i^{e_i}$$

b_i - простой делитель числа p

e_i - степень, в которой входит данный делитель в число p.

m - число простых делителей.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_{i=1}^{m} e_i \left[\frac{b_i}{2}\right] - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \left[\frac{p_i}{2}\right]$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) < 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \left[\frac{p_i}{2}\right] > \sum_{i=1}^{m} e_i \left[\frac{b_i}{2}\right] \iff f(q) > f(p)$$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1 \cdot \left[\frac{2}{2}\right] = 1$

$f(3) = 1 \cdot \left[\frac{3}{2}\right] = 1$

$f(4) = 2 \cdot \left[\frac{2}{2}\right] = 2$

$f(5) = 1 \cdot \left[\frac{5}{2}\right] = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = 1 \cdot \left[\frac{7}{2}\right] = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3 \cdot \left[\frac{2}{2}\right] = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$

$f(11) = 1 \cdot \left[\frac{11}{2}\right] = 5$

$f(12) = f(4) + f(3) = 3$

$f(13) = 1 \cdot \left[\frac{13}{2}\right] = 6$

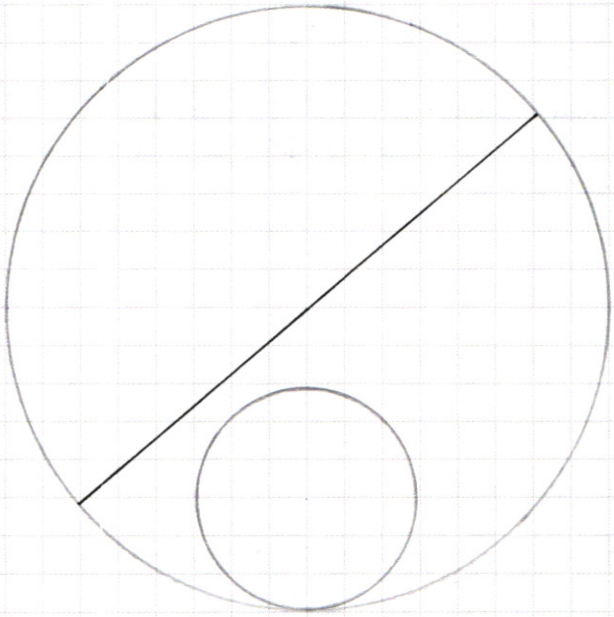
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)