МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

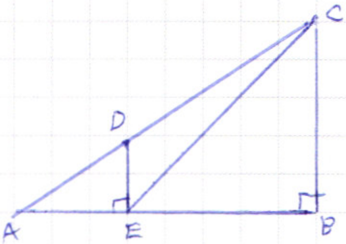
$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



а) $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ($\angle CAB$ – общий, $\angle AED = \angle ABC = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

Т.к. $\angle CED = 30^\circ$, то $\angle BEC = \angle BED - \angle CED = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$tg\,\angle BEC = \frac{BC}{EB}$ Т.к. $AB = 3AE = 3(AB - EB)$, то $EB = \frac{2}{3}AB$

$tg\,\angle BEC = tg\,60^\circ = \frac{BC}{\frac{2}{3}AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ Тогда $tg\,\angle BAC =$

$= \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ что и требовалось найти

б) Т.к. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$, то $DE = \frac{1}{3}BC$. $\sin\angle BEC = \sin 60^\circ = \frac{BC}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $EC = \frac{2}{\sqrt{3}}BC$

Тогда $S_{CED} = \frac{1}{2}DE\cdot EC\cdot\sin\angle CED = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}BC\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}BC\cdot 0{,}5 = \frac{BC^2}{6\sqrt{3}}$

Найдём BC. $\frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$

По теореме Пифагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow BC^2 + \frac{3}{4}BC^2 = 7 \Rightarrow \frac{7}{4}BC^2 = 7 \Rightarrow$

$BC^2 = 4$. Тогда: $S_{CED} = \frac{BC^2}{6\sqrt{3}} = \frac{4}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)} \\ (x-6)^2 - 36 + 2(y-1)^2 - 2 + 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 6y = (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$ Обозначим $x-6$ за m, $y-1$ за n. Перепишем систему:

$\begin{cases} m - 6n = \sqrt{mn}, \text{ причём } m\cdot n \geq 0,\ m - 6n \geq 0 \\ m^2 + 2n^2 = 18 \end{cases}$

~~Что~~ Возведём обе части первого выражения в квадрат. Получим:

$m^2 + 36n^2 - 12mn = mn$ $m^2 - 13mn + 36n^2 = 0$

Рассмотрим 2 случая: 1) $n = 0$ Тогда $m^2 - 13\cdot 0 + 36\cdot 0 = 0$ $m = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подставив m и n во второе выражение получим:

$0^2+2\cdot 0^2=18$ $\quad 0=18$ Противоречие. Значит $n\neq 0$

2) $n\neq 0$ значит мы можем разделить обе части выражения $m^2-13mn+36n^2$ на n^2. Получим

$\left(\frac{m}{n}\right)^2-13\left(\frac{m}{n}\right)+36=0$ Обозначим $\frac{m}{n}$ за t.

$t^2-13t+36=0$ $\quad D=13^2-36\cdot 4=25$ $\quad t=\frac{13\pm 5}{2}$ $\quad t_1=\cancel{14}\,9$ $\quad t_2=4$

2.1) $t=\frac{m}{n}=9$ $\quad m=9n$ Получаем, что $81m^2+2n^2=83n^2=18$

$n_1=\sqrt{\frac{18}{83}}$ $\quad m_1=9\sqrt{\frac{18}{83}}$ $\quad n_2=-\sqrt{\frac{18}{83}}$ $\quad m_2=-9\sqrt{\frac{18}{83}}$ ~~В обоих случаях $mn\geq 0$~~

$\begin{cases} x-6=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$ $\quad x_1=6+9\sqrt{\frac{18}{83}}$, $\quad y_1=1+\sqrt{\frac{18}{83}}$

$\cancel{\begin{cases} x-6=-9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \quad x_2=6-9\sqrt{\frac{18}{83}}, \quad y_2=1+\sqrt{\frac{18}{83}}}$

~~2.2) $t=\frac{m}{n}=4$ $m=4n$ Т.к. $m-6n\geq 0$, то $4n-6n\geq 0$ $n\leq 0$~~

$m_2=-9\sqrt{\frac{18}{83}}$ $\quad n_2=-\sqrt{\frac{18}{83}}$ не подходит, т.к. $m-6n=9n-6n=3n\geq 0$

2.2) $t=\frac{m}{n}=4$ $\quad m=4n$ Получаем, что $16n^2+2n^2=18$ $\quad n^2=1$

Т.к. $m-6n=4n-6n=-2n\geq 0$, то нам подходят только $n\leq 0$

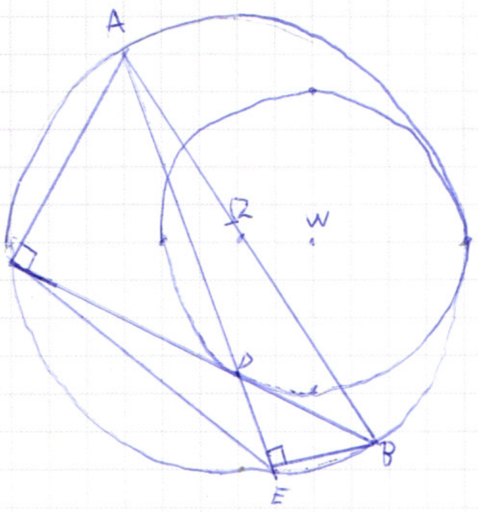
Значит $n_2=-1$ $\quad m_2=-4$

$\begin{cases} x-6=-4 \\ y-1=-1 \end{cases}$ $\quad x_2=2$, $\quad y_2=0$

Подставив все наши решения в исходные уравнения, мы не находим противоречий

Ответ: $\left(6+9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1+\sqrt{\frac{18}{83}}\right),\ (2;0)$

5



Т.к. $\angle ECB = \angle EAB$ (как опирающиеся на одну хорду) и ~~ΔCDE~~ $\angle CDE = \angle ADB$ (вертикальные), то $\Delta ADB \sim \Delta CDE \Rightarrow \frac{AB}{CE} = \frac{CD}{AD} = \frac{DE}{BD} = K_1$

Аналогично доказываем, что $\Delta ADC \sim \Delta BDE$ и $\frac{AC}{BE} = \frac{AD}{DB} = \frac{CD}{DE} = K_2$

Т.к. AB — диаметр, то $\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$

Т.к. $\Delta ADB \sim \Delta CDE$, $\Delta ADC \sim \Delta BDE$, то их площади относятся как K_1^2 и K_2^2 соответственно. $S_{BACE} = S_{ACD}\left(1 + \frac{1}{K_1^2}\right) + S_{ADB}\left(1 + \frac{1}{K_2^2}\right) = S_{ABC} + S_{ACD} \cdot \frac{1}{K_1^2} +$
$+ S_{ADB} \cdot \frac{1}{K_2^2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

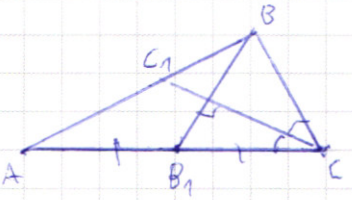
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. Обозначим необходимый нам треугольник как ABC и проведём биссектрису CC_1 и медиану BB_1.



Т.к. в ΔBB_1C CC_1 – биссектриса и медиана, то B_1BC – равнобедренный $\Rightarrow B_1C = BC = x$. Тогда $AC = 2\cdot B_1C = 2x$. AB обозначим за y. Т.к. ABC – треугольник, то должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} AB < AC+BC & y < 2x+x = 3x \\ AC < AB+BC & 2x < y+x \Rightarrow x < y \\ BC < AB+AC & x < 2x+y \end{cases} \quad x<y<3x$$

Т.к. стороны – положительные числа, то неравенство выполняется всегда

У нас известен периметр: $P = AB+BC+AC = 3x+x+y = 4x+y = 900$

Т.к. $x<y$ и $y<3x$, то

$$\begin{cases} 4x+y = 900 < 4x+3x = 7x \\ 4x+y = 900 > 4x+x = 5x \end{cases} \Rightarrow \text{тогда: } x < \frac{900}{5} = 180 \text{ и } x > \frac{900}{7} = 128\frac{4}{7}$$

Получаем, что x может принимать целочисленные значения от $128\frac{4}{7}$ до 180 невключительно. То есть от 129 до 179 включительно. Это 51 число. y же будет принимать соответственные значения $900-x$, которые также будут целыми. Значит количество необходимых нам треугольников зависит только от x и их количество равно 51

Ответ: 51.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

1. Пусть a, b, c это числа p, pq, pq^2.

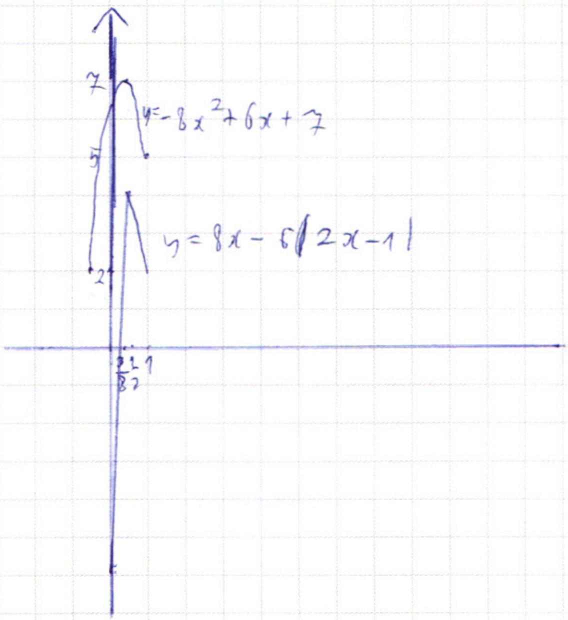
$ax^2 - 2bx + c = 0 \quad D = 4b^2 - 4ac = 4((pq)^2 - pq^2 p) = 0$

$x = \frac{2b \pm 0}{2a} = \frac{b}{a} = \frac{pq}{p} = q = pq^3$ Тогда $pq^2 = 1 = c$. Что нам и требовалось найти.

Ответ: 1

6. $8x - 6|2x-1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

Изобразим неравенства графически, прямая $ax+b$ должна при всех $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ выше двух кусочных прямых графика $8x - 6|2x-1|$ и ниже параболы $-8x^2+6x+7$. Нарисуем их



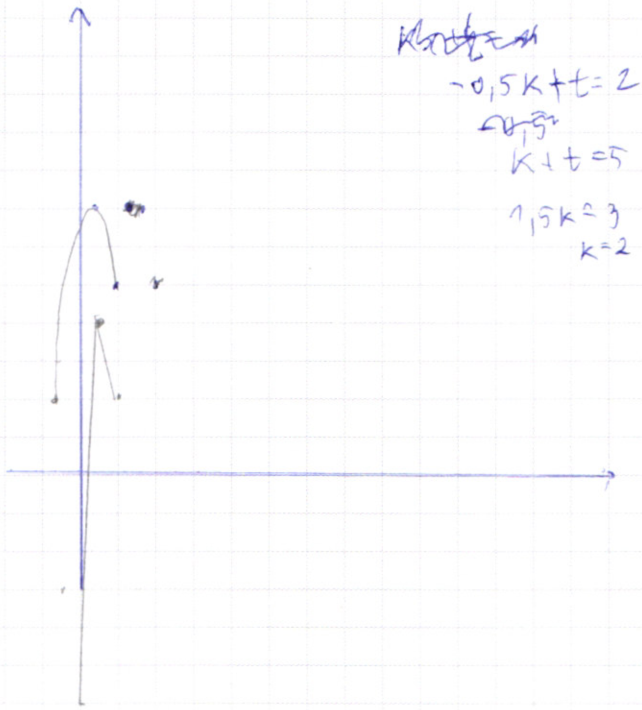
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-0{,}5k+t=2$

$k+t=5$

$1{,}5k=3$

$k=2$

$-8x^2+6x+7$ $\quad x_0=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ $\quad y_0=-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+7=7$

$-8\cdot\frac{1}{4}-3+7$

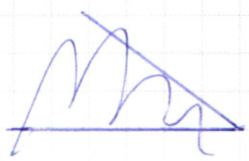
$8x-6\quad 2x-1$

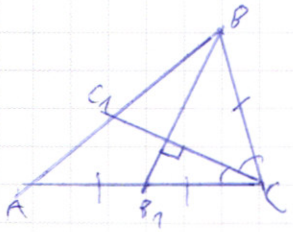
$x\geq 0{,}5 \quad x<0{,}5$

$-4x+6 \quad 20x-6$

$ax+b\leq -8x^2+6x+7$

$8x^2+(a-6)x+(b-7)\leq 0$





$2x,x,y$

$x<y<3x$

$y=3k$

$y=2x$

$3x+3y=x+y$

$3x+k=900$

$3x+y=900$

$x=25\cdot 9=225$

$6x=900 \quad x=150$

$4x=900$

$900=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$

$5x=900 \quad x=180$

$\frac{m}{n}x=900 \quad \frac{m}{n}=$

$3x+y=900$

$4x<$

229

$y=\frac{572}{228}$

$f(ab)=f(a)+f(b) \quad f(p)=[\frac{p}{2}]$

$\frac{p}{2}-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

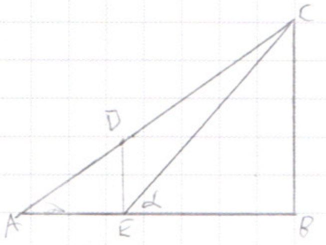
$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = \frac{p}{2} - 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\, BAC = \frac{BC}{AB} = \cancel{tg\, 60 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}}$

$\cancel{90 + 2 + 30 = 180}$

$\cancel{\alpha = 60}$



$\alpha = 60°$ $\quad \frac{BC}{BE} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{1}} = \frac{BC}{\frac{2}{3}AB}$

$AC = \sqrt{7}$

$\frac{1}{2} 2BC \cdot \frac{1}{3} BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC^2}{2\sqrt{3}}$ $\quad \frac{BC}{AB} = \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ $\quad \cancel{EC = \sqrt{BC^2 + 3BC^2} = 2BC}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{BC}{BE} = \sqrt{3}$ $\quad AB =$

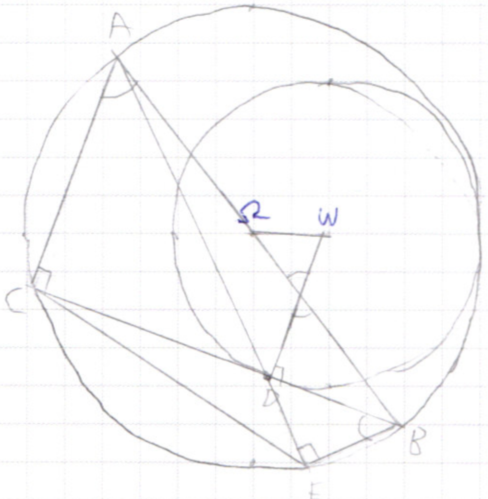
$EC = \sqrt{BC^2 + \frac{BC^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} BC$

$\cancel{3AB^2} + AB^2$

$S = \frac{2}{\sqrt{3}} BC \cdot \frac{1}{3} BC \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = \frac{BC^2}{6\sqrt{3}}$ $\quad CD = \frac{1}{3} BC$

$BC^2 + \frac{3}{4} BC^2 = 7$ $\quad AC = \sqrt{13}\, AB = \sqrt{7}$

$S = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\quad \frac{7}{4} BC^2 = 7 \quad BC = 2$



$\triangle ADB \sim \triangle CDE$

$\frac{2R}{CE} = \frac{CD}{AD} = \frac{DE}{BD}$ $\quad \frac{2}{AD} = \frac{DE}{3}$

$AD = \frac{6}{DE}$

$4R^2$

$AE^2 = AC^2 + CE^2 = AB^2 + EB^2$

$4RR \quad \| \quad DB^2$

$\cancel{\angle ABC = 90 - 2\alpha}$

$\cancel{\angle ABE = 90 - 2\alpha +}$

$S(K^2 + 1)$

$\cancel{S_{ACD}(1 + K_1^2) + S}$

$\frac{CD}{DE} + \frac{DE}{DB} =$

$\cancel{S_{BDE}(1 + K_2^2) +}$

$\cancel{S_{ACD}(1 + K_1}$

$S_{BDE}(1 + K_1^2) + S_{DEC}(1 + K_2^2)$ $\quad S_{ACB}\left(\frac{K_1^2 - K_2^2}{K_1^2 K_2^2}\right)$

$\cancel{\frac{1}{2} BE \cdot DE \left(1 + \frac{CD^2}{DE^2}\right) = \frac{1}{2} BE \cdot DE \left(1 + \frac{CD^2}{DE^2}\right) + \frac{1}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

S_{ACB} · $\frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \frac{BE^2}{AC^2} + \cancel{\frac{9}{2}}$

$\frac{1}{2}(AE + PE - DE \cdot BD)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

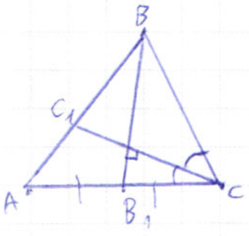
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c $\quad$ p, pq, pq^2

$ax^2 - 2bx + c = 0$ $\quad$ $D = 4b^2 - 4ac = 4(p^2q^2 - p^2q^2) = 0$

$\frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \frac{pq}{q} = p = pq$ $\quad$ $q = 1$



$(y-1)(x-6)$

$y(x-6)-(x-6)$

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$ $\quad$ $(x-6) - 6(y-1)$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 26 = 0$ $\quad$ $(x-6)^2 - 16 + 2(y-1)^2 - 2 = 0$

$(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$ $\quad$ $m - 6n = \sqrt{mn}$

$m^2 + 2n^2 = 18$

$81n^2 + n^2 = 18$

$n^2 = \frac{9}{41}$ $\quad$ $n = \frac{3}{\sqrt{41}}$ $\quad$ $m - \sqrt{mn} - 6n = 0$ $\quad$ $n = 0$, $m = 0$ $\varnothing$

$m^2 - mn$ $\quad$ $t^2 - t - 6 = 0$

$D = 1 + 24 = 25$

$m^2 + 36n^2 - 12mn = mn$ $\quad$ $t = \frac{1 \pm 5}{2}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$

$m^2 - 13mn + 36n^2 = 0$

$169 - 144$ $\quad$ $t = 3$ $\quad$ $\sqrt{m} = 3\sqrt{n}$

$m^2 = 81n^2$

$3n = 3\sqrt{n}$

$81n^2 + 2n^2 =$ $\quad$ $140 + 49 + 7$

9 19 $\quad$ 896

128

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)