## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $q$ - знаменатель г. п.

$\Rightarrow b = qa$; $c = q^2a$, IV член $= q^3a$

$ax^2+2bx+c=0$

$\Rightarrow ax^2+2qax+q^2a=0$

$a\neq 0$, так как иначе $a=0, b=0, c=0$

$\Rightarrow x^2+2q+q^2=0$

$\Rightarrow (x+q)^2=0$

$\Rightarrow x=-q$

но по усл. $x=q^3a$

$\Rightarrow q^3a=-q$

$q(q^2a+1)=0$

$q=0$ или $q^2a+1=0$

пост. к. (иначе не г. п.)

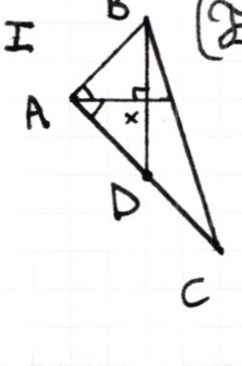
$q^2a=-1$

$\Rightarrow c=-1$

Ответ: $-1$

№2. Рассмотрим такой $\Delta$: I случай - медиана и бисс. исходят из разных вершин.

(Б.О.О.)




Дано:

$AD=DC$

$AX\perp BD$

$AX$ - ~~м~~ бисс. $\angle BAC$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1
(Нумеровать только чистовики)

в $\triangle ADB$ $AX$ – ~~мед~~ высота ($\perp BD$) и биссектриса.

=> $\triangle ADB$ равноб.

=> $AB=AD=a$

=> $AC=2AD$ ( $D$-середина) => $AC=2a$

пусть $BC=b$

тогда по усл:

$AB+BC+AC=1200$

=> $3a+b=1200$

тк $ABC$ – $\triangle$, то: $\begin{cases} b < 3a \\ a < 2a+b \text{ – вып. всегда, тк } a>0 \Rightarrow a<2a \\ 2a<a+b \end{cases}$

=> $\begin{cases} b<3a \\ a<b \end{cases}$ – ОДЗ

=> $a<b<3a$

=> $\begin{cases} 3a+b=1200 \\ a<b<3a \end{cases}$

тк $b<3a$, то $3a+b<6a$

=> $1200<6a$

$200<a$

но $a<b$ => $b>a$ => $3a+b>4a$

=> $1200>4a$

$300>a$

=> ~~300~~ $200<a<300$

=> $a\in(200;300)$

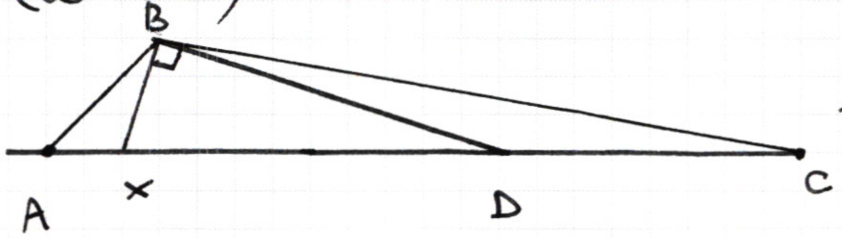
$a\in\mathbb{N}$ => ~~ко~~ кол-во различн. „$a$" $=99$

причём для $a\in(200;300)$ при $\forall$ 2 „$a$" нет одинак. $\triangle$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

=> к-во $\Delta = 99$.

II. пусть медиана и бисс. выходят из 1 вершины (Б.О.О.)

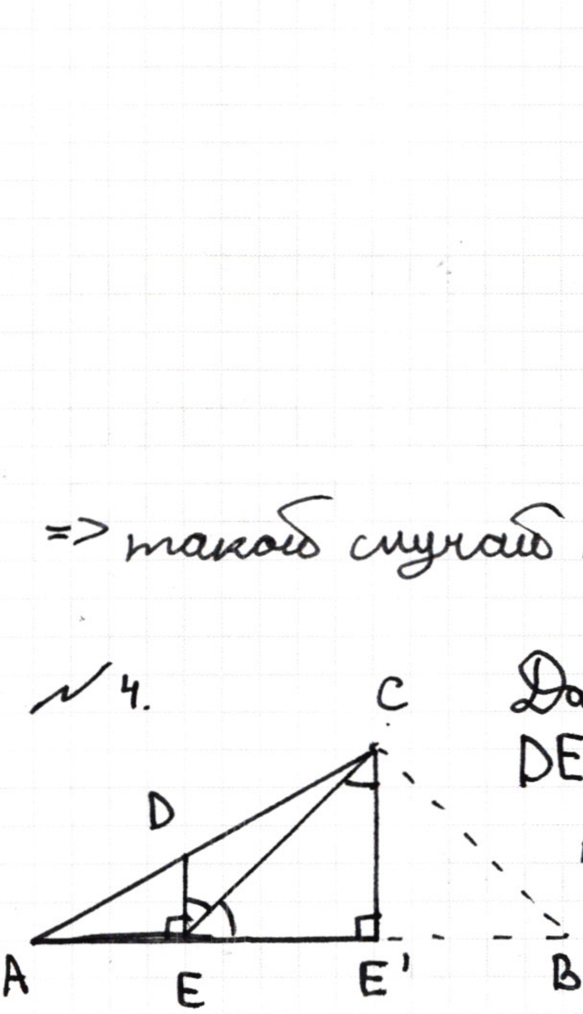


тк. BX - бисс,
$\angle ABX = \angle XBC$
$\Rightarrow \angle ABC = 2\angle XBC$
и X лежит между A и C
Тк. BD - медиана, то D лежит между A и C
(БОО между X и C)
$\Rightarrow \angle XBC = \angle XBD + \angle DBC$
по усл $\angle XBD = 90°$ ($\perp$)
$\Rightarrow \angle XBC \geq 90°$
$\Rightarrow \angle ABC \geq 180°$ - противоречие, $\angle\Delta$ всегда $< 180°$

=> такой случай невозможен.

Ответ: 99.

№ 4.



Дано:
$DE \perp AB$
$AD : AC = \frac{3}{5}$
$\angle ACB = 90°$
$\angle CED = 45°$ $AC = \sqrt{29}$

Найти:
а.) $tg\angle BAC$
б.) $S_{\Delta DCE}$

Решение: проведём высоту $CE'$ (к $AB$)

т.к. $DE \perp AB$, $\angle DEE' = 90°$

$\Rightarrow \angle CEE' = \angle DEE' - \angle CED = 90 - 45 = 45°$

$CE' \perp AB = EE'C = 90°$

$\Rightarrow$ в $\triangle CEE'$ $\angle CEE' = 45°$, $\angle EE'C = 90° \Rightarrow \angle ECE' = 45°$

$\Rightarrow \triangle CEE'$ - равнов.

$\Rightarrow CE' = EE' = 10a$

$\frac{AC}{AD} = \frac{5}{3}$

$AC = AD + DC$

$\Rightarrow \frac{AD+CD}{AD} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{2}{3}$

$DE \perp AB$ и $CE' \perp AB$

$\Rightarrow DE \parallel AB$

$\Rightarrow$ по т. Фалеса

$\frac{DC}{AD} = \frac{EE'}{AE} \Rightarrow \frac{EE'}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3EE' = 2AE \Rightarrow AE = \frac{3}{2}EE' = 15a$

$\Rightarrow AE' = AE + EE' = 25a$

$\boxed{tg\angle BAC = \frac{CE'}{AE'} = \frac{10a}{25a} = \frac{40}{100} = 0{,}4}$ ($\angle CE'A = 90°$ ($CE' \perp AB$)

$\Rightarrow \triangle ACE'$ - прямоуг)

б.) $AE'^2 + CE'^2 = AC^2$

$\Rightarrow (10a)^2 + (25a)^2 = 29$

$25(4a^2 + 25a^2) = 29$

$\Rightarrow 25 \cdot a^2 \cdot 29 = 29$

$\Rightarrow 25 \cdot a^2 = 1 \Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow CE' = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$, $AE' = 25 \cdot \frac{1}{5} = 5$, $EE' = 2 = CE'$,

$AE = 15 \cdot \frac{1}{5} = 3$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{CED} = S_{ACE'} - S_{AED} - S_{ECE'}$

$\cancel{S}\triangle ACE'$, $\triangle AED$ и $\triangle ECE'$ – прямоуг.

$\Rightarrow S_{\triangle ECE'} = \frac{1}{2} CE' \cdot EE' = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} DE \cdot AE$. $\quad tg\,\alpha = \frac{DE}{AE}$

$\Rightarrow S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot AE^2 \cdot tg\,\alpha = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 3^2 = 1,8$

$S_{\triangle ACE'} = \frac{1}{2} \cdot AE' \cdot CE' = 5$

$\Rightarrow S_{\triangle CED} = 5 - 2 - 1,8 = 1,2$

Ответ: а.) 0,4 б.) 1,2

№7. $ab = \frac{ab^2}{b}$

$\Rightarrow f\left(\frac{ab^2}{b}\right) = f(a) + 2f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

но $f\left(\frac{ab^2}{b}\right) = f(ab) = f(a) + f(b)$

$\Rightarrow f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right) = 0$

$\Rightarrow f(b) = -f\left(\frac{1}{b}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Разложим нат. числа от 1 до ~~2~~1 на ~~..~~ простые множители и вычислим f для них:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 5 | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 8 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 19 | 20 | 21 | ~~22~~ | ~~23~~ | ~~24~~ | ~~25~~ | | |
| 3 | 9 | 4 | 4 | | | | | | |

$\Rightarrow f(x)$ при целых x от 1 до 21 может быть $= 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9.$

Рассортируем: ~~f(x)~~:

$f(x)$ - 

| | | |
|---|---|---|
| 0 | - | 1 |
| 1 | - | 2 |
| 2 | - | 4 |
| 3 | - | 6 |
| 4 | - | 4 |
| 5 | - | 1 |
| 6 | - | 1 |
| 8 | - | 1 |
| 9 | - | 1 |

- кво шт при $1 \le x \le 21$

из этих 21 штук нужно взять 2 так, чтобы I шт была < II $(\overset{I}{x}; \overset{II}{y})$, и тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

~~для „9": 20в.~~

~~для „8"~~; для $f(y) = 9$ : 20 в.

$f(y) = 8$ : ~~21в~~ 19 в.

$f(y) = 6$ : 18 в.

$f(y) = 5$ : 17 в

$f(y) = 4$ : $4 \cdot 13 = 52$ в.

$f(y) = 3$ : $6 \cdot 7 = 42$ в

$f(y) = 2$ : $4 \cdot 3 = 12$ в

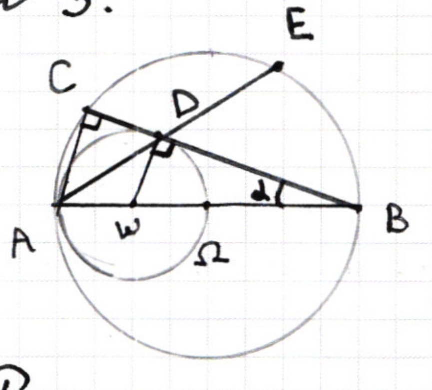
$f(y) = 1$ : $2 \cdot 1 = 2$ в.

$f(y) = 0$ : 0 в.

просуммируем все варианты:

$20 + 19 + 18 + 17 + 52 + 42 + 12 + 2 = 182$ варианта $(x; y)$. Ответ: 182.

№5.




Дано:

$\Omega$, $\omega$

$AB = 2R$ (диаметр)

CB - касат. к $\omega$

$CD = 1$ $BD = 3$

Найти:

$r$, $R$

($R$ и $r$ - радиусы $\Omega$ и $\omega$ соотв.)

$S_{ACEB}$

Решение: $\angle \omega DB = 90°$, $\omega D = A\omega = r$ (BC - касательная)

($\omega$ лежит на AB из-за симметрии окр.)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\omega B}{DB} = \frac{r}{...}}$ $\omega B = AB - A\omega = 2R - r$

$\Rightarrow \cancel{tg\ \sin\alpha = \frac{D\omega}{BD} = \frac{r}{3}}$ $\cos\alpha = \frac{BD}{\omega B} = \frac{3}{2R-r}$

$\angle ACB = 90^\circ$ (вписан, опир. на $AB$ (диаметр))

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{4}{2R} = \frac{2}{R}$

$\Rightarrow \frac{2}{R} = \frac{3}{2R-r} \Rightarrow 4R - 2r = 3R \Rightarrow R = 2r$

$\Rightarrow \omega B = 3r \Rightarrow$ по т. Пифагора:

$\omega B^2 = \omega D^2 + DB^2$

$9r^2 = r^2 + 3^2$

$8r^2 = 3^2$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 0{,}75\sqrt{2}$

$R = 1{,}5\sqrt{2}$

Ответ: $0{,}75\sqrt{2}$; $1{,}5\sqrt{2}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a,\ qa,\ q^2a,\ q^3a$

$ax^2+2qax+q^2a=0$

$x^2+2qx+q^2=0$

$\Rightarrow (x+q)^2=0$

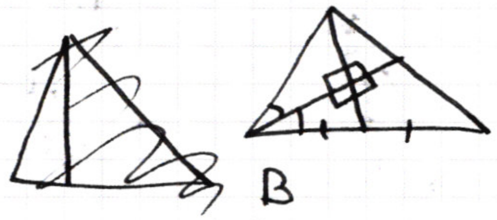
$\Rightarrow x=-q$

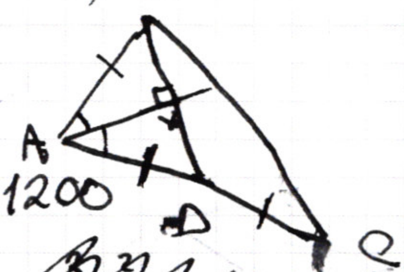
$\Rightarrow q^3a=-q$

$q(q^2a+1)=0$

$\Rightarrow q=0$ или $q^2a+1=0$

$q^2a=1$





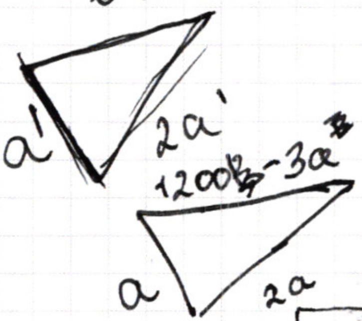


$a, 2a, b$

$3a+b=1200$

$\begin{cases} b<3a \\ a<b \end{cases}$

$1200-3a$





$(4x^2+2xy+y^2)+$

$+3-4x-4y-2xy-2x^2$

$\boxed{-2y-2x^2}$

$y \geq 2x$ $\quad x^2+y$

$2x^2+2y$

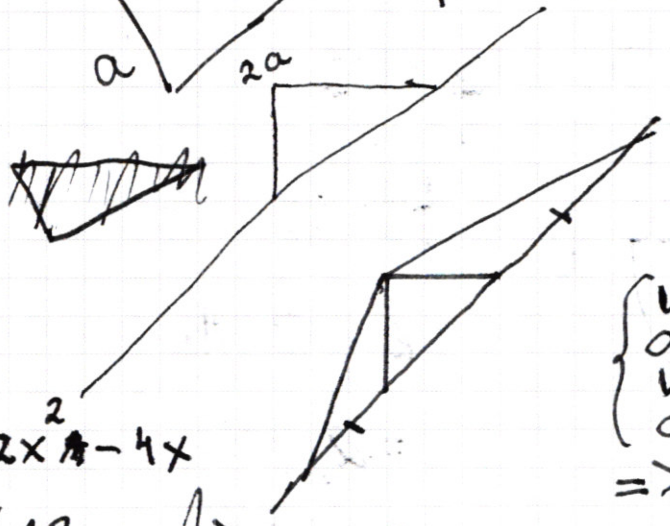
$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ y^2+2x^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy-2x-y+2=0 \\ y^2+2x^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x^2-5xy+2x+3y-1=0$

$y^2+4xy+4x^2=9xy-(2x+y)+2$

$\boxed{(y+2x)^2=9xy-(2x+y)+2}$



$2x^2-4x$

$2(x^2-2x+1)$

$y^2-4y+4$

$(2x^2+2\sqrt{2}xy+y^2)-$

$-$

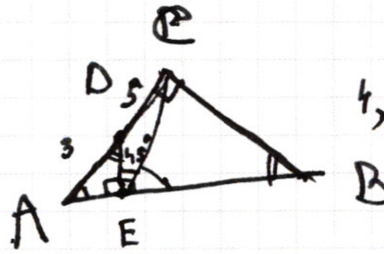
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

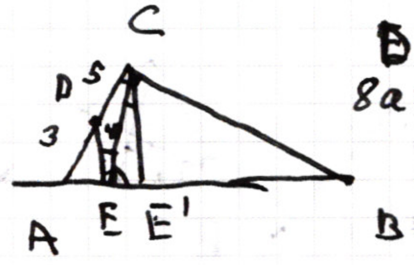
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

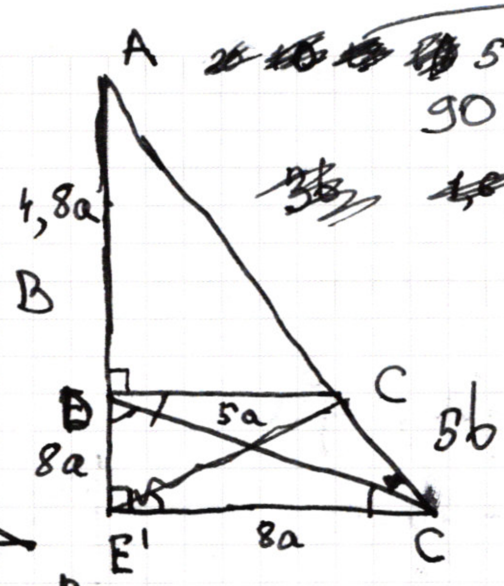
~~52~~

90 20 20

$130+52 =$
$=182$




т. Фалеса

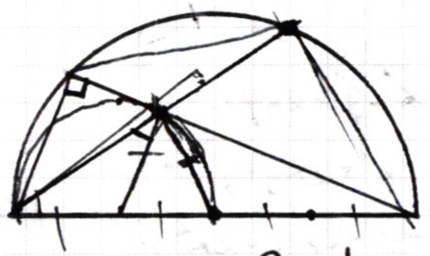
$\frac{5}{4,8} = \frac{12,8}{12,8}$

2 3

1 1

$4,8 \cdot 8 = 5 \cdot 12,8$

$4,8 \cdot 8 =$

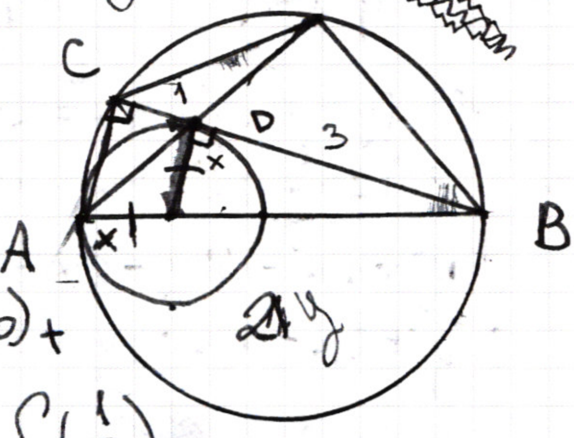


$f(y)+f\left(\frac{1}{y^2}\right)$

$f\left(\frac{ab^2}{b}\right) =$

$f(a)+2f(b)+$

$f\left(\frac{1}{b}\right)$




$\frac{2y}{4} = \frac{2y-x}{3}$

$6y = 8y-4x$

$= 2y = 4x$

$\Rightarrow y = 2x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)