МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

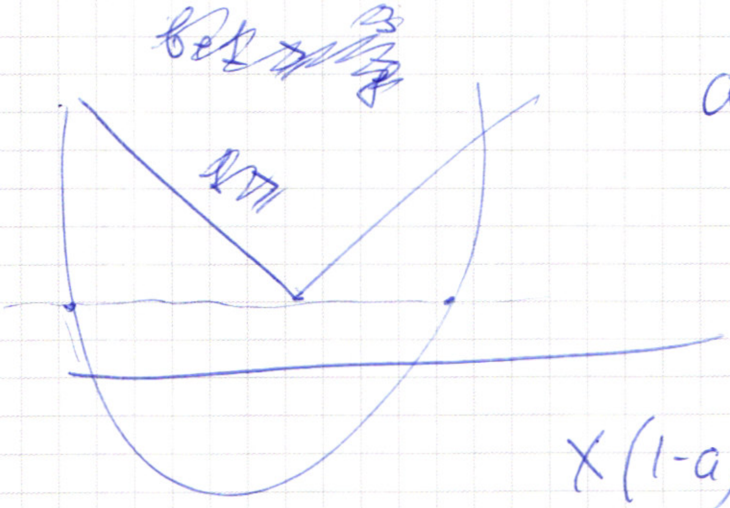
$2x^2 - x(1+a) - (1+b) \leq 0$

$x(1-a) + 2|x-1| \geq 0$

$2x \geq 1$

$ax+b$ – при любых x – меньше

$ax+b \leq x + |2x-1|$



$x(1-a) + |2x-1| \geq b$

$x \geq 0$

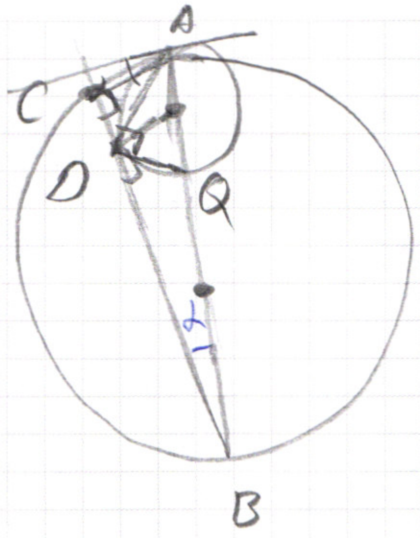
$$\begin{cases} x(3-a) - 1 - b \geq 0 \\ -1 - b \geq \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

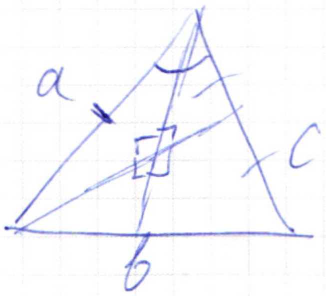
(Нумеровать только чистовики)



$BC = 2R\cos\alpha = 4$

$(2R-2)\cos\alpha = 3$

$\frac{2R}{2R-2}$



$c = 2a \Rightarrow$

$P = 3c + b$

$\cancel{3b = 2t}$

$3t = b$

$400 = c \cdot t$

$2\cancel{b + c > b}$ - очевидно

$\cancel{3b} >$

$\cancel{2c} + b > c$

$\cancel{c} + b > 2c$

$b > c$ $\quad 3t > c$

$3c > b$ $\quad 3\cancel{t}$

$c > t$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + 2|x - 1|$

~~2x²-x-1...~~

$2x^2 - x - a - 1 - b$

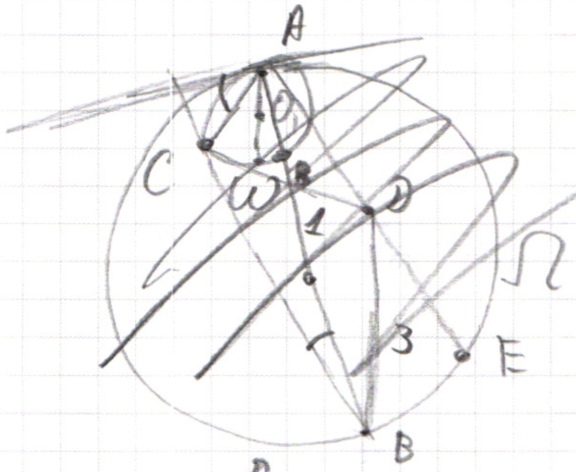
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

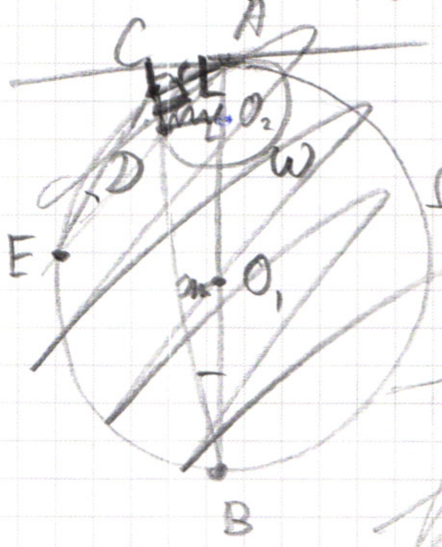
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

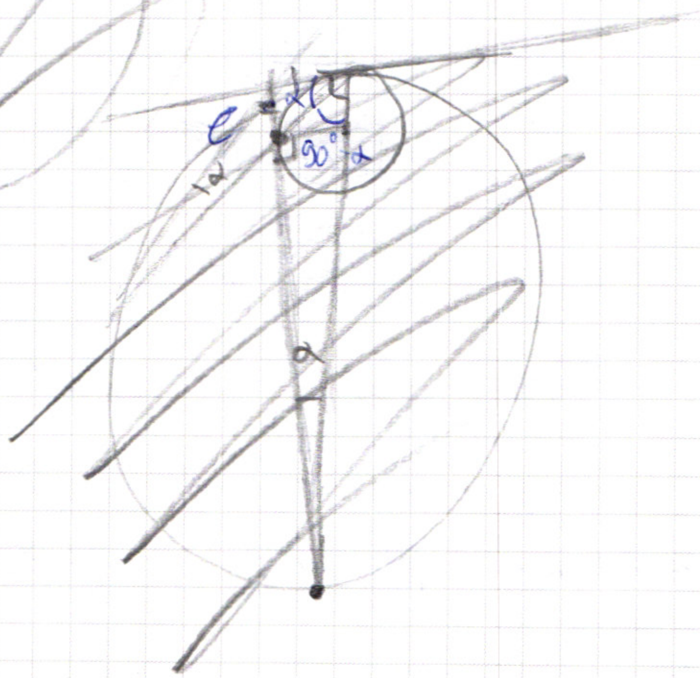


~~$2R(R$~~

~~$4R(R-2) = BC^2$~~



$\cancel{AB} = \cancel{2R}$ $D(D-d) = 9$



$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2(x-1)^2+y^2-4y+1=0$

$2(x+1)^2+(y-2)^2=3$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \Rightarrow$

$x+1=a$

$y-2=b$

$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$ $b^2-4ab+4b^2=ab$

$b^2-5ab+4b^2=0$

~~$b-\sqrt{ab}-2a=0$~~ $\frac{b}{a}=k$

~~$2a^2-2a+b+b^2=3-\sqrt{ab}$~~

~~$b=2a(\ldots)$~~

$k^2-5k+4=0$

$k=1$

$k=4 \Rightarrow$

1\. $a=b \Rightarrow$ $b=4a$

$3a^2=3 \Rightarrow$

$a^2=\frac{3}{3}=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow$

$2a^2+16a^2=3$ $x+1=1$

$x=0$

$18a^2=3$ $y-2=1$

$a^2=\frac{1}{6}$ $y=3$

$a=\sqrt{\frac{1}{6}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что $f(1\cdot 1) = f(1)+f(1) \Rightarrow$

$f(1) = 2f(1) \Rightarrow$

$f(1)=0 \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{q}\cdot q\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)+f(q) = 0 \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{q}\right) = -f(q)$

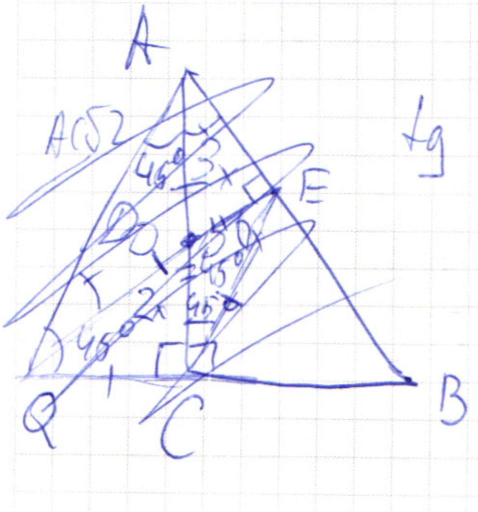
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Заметим, что ~~f(abc...)~~

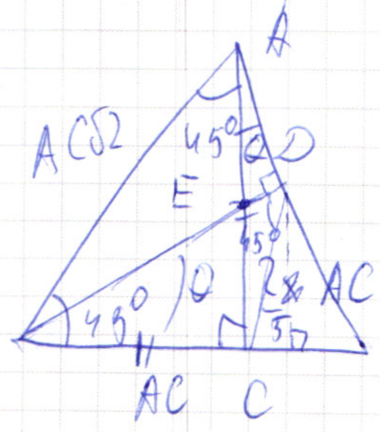
Док-жем, что $f\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$

Для $n=2$ верно

№4



$tg\, BAC =$



$tg\, \alpha = \frac{2}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$x=a\neq 0 \Rightarrow$

$a(ax+q)^2=0 \Rightarrow$ ~~$ax=-q$~~

~~$a^2q^4=-q$~~

$ax=-q$

~~$aq^3=-q$~~

$aq^2=-1$

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$(y-2)^2+2x^2-4x-1$

$(y-2)^2+2(x^2-2x+1)-2-1=0$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$

$y-2x=\sqrt{x(y-2)-1(y-2)}$

$y-2=a$

$x-1=b$

$y-2x=a-2b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\cancel{\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}}$$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$a-\sqrt{ab}$

$$a^2+4b^2-4ab=ab$$

$$3+2b^2=5ab$$

$$2b^2=5ab-3$$

$$a^2+5ab-3=3$$

$$\cancel{a(a+5b)=6}$$

$$3=b(5a-2b)$$

$$\cancel{\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}} \Rightarrow \cancel{(a-2b)(a^2+2b^2)=}$$

$$a^3-\cancel{2ab^2+2ba^2-4b^3}$$

$$=$$

$$\cancel{(a-2b)^3+2ab^2-ba^2}$$

$$+\ \cancel{3b^3=3\sqrt{ab}}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию $\Rightarrow \begin{cases} b = aq \\ c = aq^2 \end{cases}$, где q - знаменатель прогрессии

$ax^2 + 2bx + c = ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

1. $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ q = 0 \end{array}\right. \Rightarrow b = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow x = 0$

2. $a \neq 0 \Rightarrow x^2 + 2qx + q^2 = 0 \Rightarrow (x+q)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -q$. $x = aq^3 \Rightarrow -q = aq^3 \Rightarrow$

$-1 = aq^2 = c$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ a = 0 \end{array}\right. \Rightarrow c = 0$ или $\begin{cases} q \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow c = -1$

Задача №3

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 - 4y + 4 - 4) + 3 = 0 \Rightarrow \end{cases}$

$2(x-1)^2 - 2 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

Пусть $\begin{cases} x - 1 = a \\ y - 2 = b \end{cases} \Rightarrow y - 2x = b - 2a \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$b^2-4ab+4\cancel{b}a^2=ab \ (ab\geq 0) \Rightarrow$

$0=b^2-5ab+4\cancel{b}a^2 \Rightarrow \cancel{(b-a)(b}$

$\frac{b}{a}=k \quad (a\neq 0$, иначе $b=0 \Rightarrow 0=3) \Rightarrow$

$k^2-5k+4=0 \Rightarrow$ Пот-ме Виета $\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=4 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} b=a \\ b=4a \end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2a^2+a^2=3 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \\ 2a^2+16a^2=3 \Rightarrow a^2=\frac{1}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{\sqrt6} \\ a=-\frac{1}{\sqrt6} \end{array}\right. \end{array}$

$\Rightarrow$ $a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow x=2;\ y=3$ – не подходит, т.к. $\sqrt{ab}=1;\ b-2a=-1$

$a=-1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow x=0;\ y=1$ – подходит

$a=\frac{1}{\sqrt6};\ b=\frac{4}{\sqrt6} \Rightarrow x=1+\frac{1}{\sqrt6};\ y=2+\frac{4}{\sqrt6}$ – подходит

$a=-\frac{1}{\sqrt6};\ b=-\frac{4}{\sqrt6} \Rightarrow x=1-\frac{1}{\sqrt6};\ y=2-\frac{4}{\sqrt6}$ – не подходит, т.к. $\sqrt{ab}=\frac{2}{\sqrt6}$, $b-2a=-\frac{2}{\sqrt6} \Rightarrow$

~~Ответ~~: $\cancel{\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt6} \\ y=2+\frac{4}{\sqrt6} \end{cases}}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt6} \\ y=2+\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \end{array}\right.$

Задача № 4

Дано

$\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle C=90°$)

$AD:AC=3:5$

$DE\perp AB$, $E\in AB$

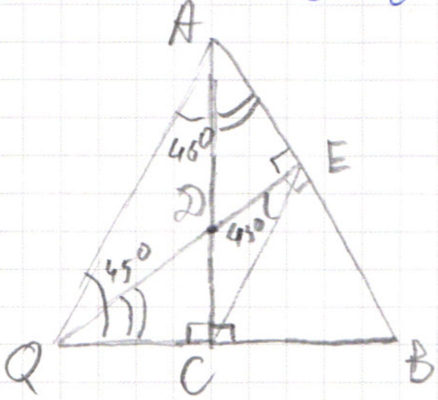
$\angle CED=45°$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найти
$tg\angle BAC$

Решение

а)



Продлим DE до пересечения с BC; $DE \cap BC = Q$

Заметим, что точки Q, A, E, C лежат на одной окружности т.к. $\angle AEQ = \angle ACQ = 90° \Rightarrow \angle QAC = \angle CEQ$ как опирающиеся на одну дугу $\Rightarrow \angle AQC = 45° \Rightarrow$
$\triangle AQC$ - равнобедренный $\Rightarrow AC = QC$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{DC+AD}{AD} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$DC = \frac{2}{5}AC$. $\angle BAC = \angle EQC$ как опирающиеся на одну дугу $\Rightarrow tg\angle BAC = tg\angle EQC = \frac{DC}{QC} = \frac{DC}{AC} = \frac{2}{5}$

б)

Дано
$AC = \sqrt{29}$
Найти:
S_{CED}

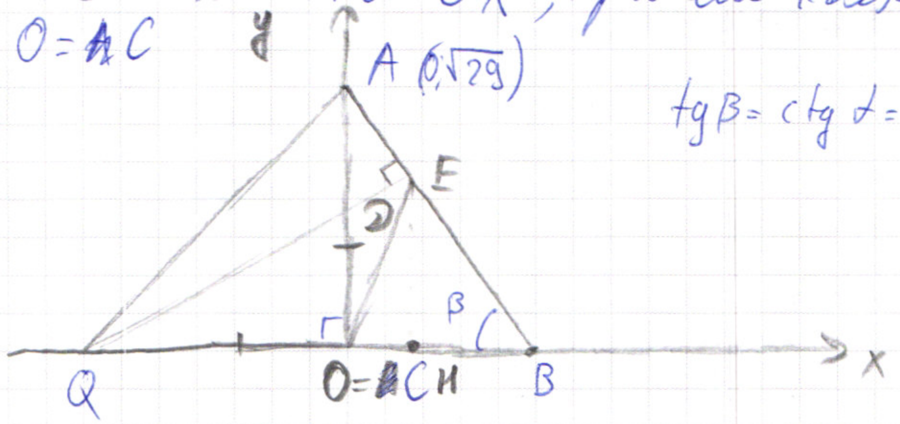
Решение:

Впишем ΔABC в систему координат:

CA ~~AC~~ лежит на OY, причем $(\overline{CA})_y > 0$

CB ~~AB~~ лежит на OX, причем $(\overline{CB})_x > 0$ $\Rightarrow$

$O = C$



$tg\,\beta = ctg\,\alpha = \frac{5}{2}$

$AB: \sqrt{29} - \frac{5}{2}x = y$

$QE: y = \frac{2}{5}x + b$

$0 = \frac{2}{5} \cdot (-\sqrt{29}) + b \Rightarrow$

$b = \frac{-2\sqrt{29}}{5}$

$y = \frac{2}{5}x - \frac{2\sqrt{29}}{5}$

$AB \cap QE = (x_1; y_1) \Rightarrow$

$\sqrt{29} - \frac{5}{2}x_1 = \frac{2}{5}x - \frac{2\sqrt{29}}{5}$

$\frac{7}{5}\sqrt{29} = \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{2}\right)x = \cancel{\frac{21}{10}x}\ \frac{29}{10}x$

$\frac{7}{\cancel{5}}\cancel{\sqrt{29}} = \frac{\cancel{29}^{\sqrt{29}}}{2\cancel{10}}x \Rightarrow$

$x_1 = \frac{14}{\sqrt{29}}$

EH – высота $\Delta QEC \Rightarrow H(x_1; 0) \Rightarrow$

$S_{CDE} = S_{QEC} - S_{QDC}$ (аддитивность площади)

$S_{CDE} = \frac{7 \cdot 14}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} = 7 - \frac{29}{5} = \frac{35 - 29}{5} = \frac{6}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

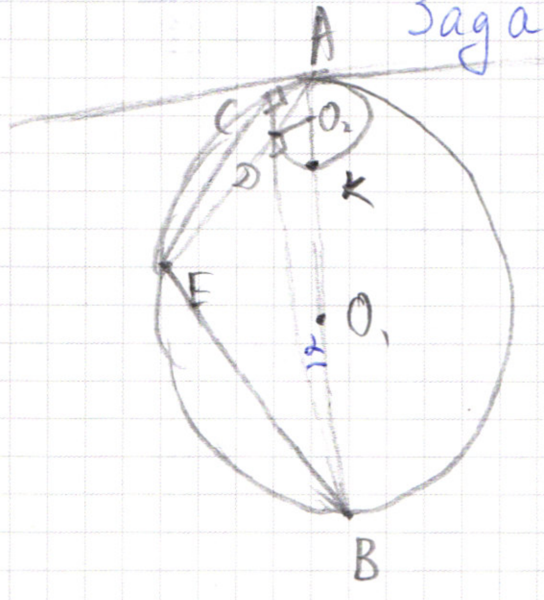
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5



Дано

$CD=1$ Ω, ω - окружности

$BD=3$

$\Omega \cap \omega = A$

AB - диаметр Ω, BC касается ω в т. D

$AD \cap \Omega = E$

Найти

$R = R_\Omega$

$r = R_\omega$

S_{BACE}

Решение

O_1 - центр Ω

~~$BK \cdot KA = DB^2 = 9 \Rightarrow$~~ O_2 - центр ω

DB - касательная

AB - секущая $\Rightarrow$ $DB^2 = AB \cdot KB = 2R(2R-2r) = 4R(R-r) = 9$

$O_2D \perp BC$ (касательная); $\angle ACB = 90°$ (опирается на диаметр) $\Rightarrow$ $\triangle O_2BD \sim \triangle ABC$ ($\angle ABC$ - общий) $\Rightarrow$

$$\frac{O_2B}{AB} = \frac{O_2D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$8R - 4r = 6R \Rightarrow 2R = 4r$

$R = 2r \Rightarrow$

$4 \cdot 2r \cdot r = 9 \Rightarrow 8r^2 = 9 \Rightarrow$

$R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\quad r = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $r =$~~

Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow$

$BO_2D = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\angle AO_2D = 90^\circ + \alpha$

~~$\sin\alpha =$~~ $\cos\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{18}} = \frac{1}{3}$

Для $\triangle AO_2D$ по т-ме cos:

$AD^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(\alpha + 90^\circ) =$

$AD^2 = 2r^2\left(1 + \frac{1}{3}\right)\ \frac{8}{3}r^2 = \frac{9^3}{16}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{8}{3} = 3 \Rightarrow$

$AD = \sqrt{3}$

$CD \cdot BD = ED \cdot AD = 3 \Rightarrow ED = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\angle ADO_2 = \frac{180^\circ - 90^\circ - \alpha}{2} = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\angle ADB = 135^\circ - \frac{\alpha}{2} = \sin\angle ADB = \sin\left(135^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) =$

$\frac{2\sqrt{2}}{3} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\right.$

$1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{6} = \sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6}}$, т.к. $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{6 - (\sqrt{2} - 1)^2}{36}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{6}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{BACE} = BC \cdot AE = \cancel{4 \cdot 2} \cdot \sin\angle ADB \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} =$

$= 4\sqrt{2}$ Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $r = \frac{3}{4}\sqrt{2}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

№ 7

Заметим, что $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \Rightarrow$

$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow$

$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x) \Rightarrow$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$, тогда

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 2f(2) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = f(2 \cdot 4) = 3$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = 2$

$f(10) = f(5 \cdot 2) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = f(4 \cdot 3) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = \cancel{3}\ 4$

$f(15) = f(3 \cdot 5) = 3$

$f(16) = f(4 \cdot 4) = 4$

$f(17) = 8$

$f(18) = f(6 \cdot 3) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = f(4) + f(5) = 4$

$f(21) = 4$

Пусть $g(x)$ - кол-во пар $(\cancel{x}, y)$; где $\cancel{y}$ $1 \le y \le 21$; $y \in \mathbb{N}$ таких, что $f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow$

$g(1) = 20$

$g(2) = g(3) = 18$

$g(4) = g(5) = g(6) = g(9) = 14$

$g(7) = g(8) = g(9) = g(10) = g(12) = g(15) = g(18) = 8$

$g(14) = g(16) = g(20) = g(21) = 4$

$g(11) = 3$

$g(13) = 2$

$g(17) = 1$

$g(19) = 0$

$g(x)$ можно вычислять, например, так: считать количество $1 \le y \le 21$, $y \in \mathbb{N}$, для к-рых $f(x) < f(y)$, т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$$N = \sum_{i=1}^{i=21} g(i) = \underbrace{0+1+2+3}_{6} + \underbrace{4 \cdot 4}_{16} + \underbrace{6 \cdot 8}_{48} + \underbrace{4 \cdot 14}_{56} + \underbrace{2 \cdot 18}_{36} + 20$$

$N = 6 + 16 + 48 + 56 + 36 + 20 \Rightarrow$

$22 + 48 + 56 + 36 + 20 = 90 + 56 + 36 = 172$

Ответ: 172

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

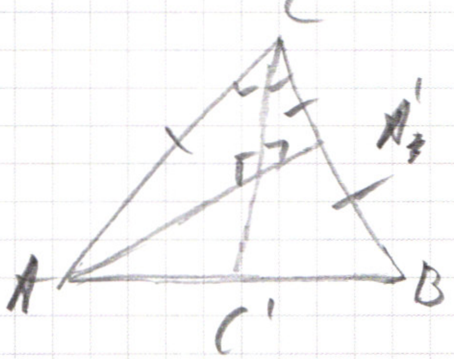
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

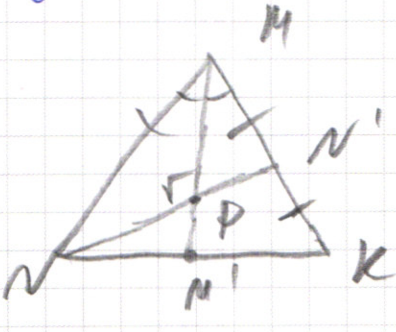
Задача №2

Пусть в треугольнике ABC медиана AA' перпендикулярна биссектрисе CC' => $\triangle ACA'$ - равнобедренный => $AC = \frac{BC}{2}$



Рассмотрим треугольник NMK, $NM = \frac{NK}{2}$.
Проведем медиану NN' и биссектрису MM': $NN' \cap MM' = P$

$\triangle NMN'$ - равнобедренный, MP - биссектриса и MP - высота =>



~~Медиана перпендикулярна~~

Медиана AA_1 треугольника перпендикулярна биссектрисе CC_1 треугольника ABC тогда и только тогда когда $AC = \frac{1}{2}BC$ => Если периметр треугольника P, а стороны, ~~соответст~~ BC; AC; AB соответственно a, b, c, то $P = a+b+c = 3b+c$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$P = 1200 \Rightarrow$

$1200 = 3b + c \Rightarrow c \vdots 3 \Rightarrow c = 3t$

$400 = b + t \Rightarrow$ По нер-ву треугольника

$t = 400 - b$ $\quad a + b > c \Rightarrow 3b > c \Rightarrow b > t$

$b + c > a \Rightarrow b + c > 2b \Rightarrow 3t > b$

~~$a + b >$~~

$a + c > b \Rightarrow \quad 2b + c > b \Rightarrow b + c > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3(400 - b) > b \\ b > 400 - b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b > 200 \\ 1200 > 4b \Rightarrow b < 300 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b \geq 201 \\ b \leq 299 \end{cases} \Rightarrow$$ 99 треугольников

Ответ: 99