МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Пусть знаменатель прогрессии $= q$ ($q \neq 0$), тогда a, b, c имеют вид: a, aq, aq^2 (соответственно), тогда 4ый член прогрессии $= aq^3$, тогда ур-ие $ax^2 - 2bx + c = 0$ примет вид:

$a(aq^3)^2 - 2aq(aq^3) + aq^2 = 0$

Решим его как квадратное отн-но aq^3 (т.к. $a \neq 0$):

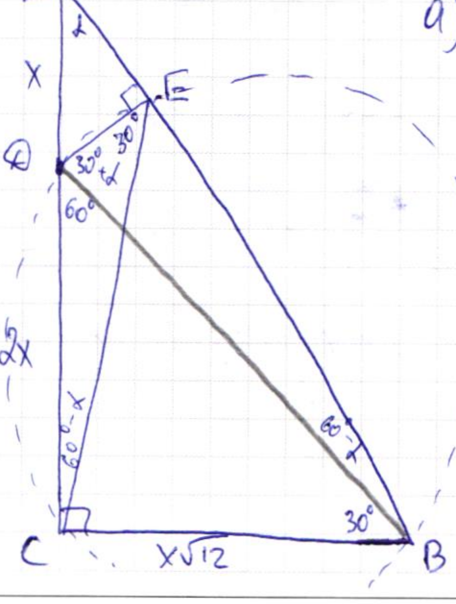
$D = 4a^2q^2 - 4aq^2 \cdot a = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow aq^3_{1,2} = \frac{2aq}{2a} = q \Rightarrow aq^3 = q \mid : q \neq 0$ (по определению прогрессии)

$aq^2 = 0 \Rightarrow c$ (третий член) $= 0$

Ответ: 0

Задача 4



а) Найти: $tg\angle BAC$

Решение:

1) $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3AD = AD + DC \Rightarrow$

$\Rightarrow DC = 2AD$, пусть $AD = x$, тогда $DC = 2x$

2) $\angle ACB + \angle DEB = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow CDEB$ - вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $= \angle$ ~~[illegible]~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+2b^2=18 & (2) \end{cases}$

(1) $a-6b=\sqrt{ab}$

$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a-6b\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a-6b\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a-6b\geq 0 \quad (*) \end{cases}$ → Решим отн-но a:

$D=169b^2-4\cdot 36b^2=25b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\frac{13b\pm 5b}{2}$

$\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$ — подставим в (2), а уже полученные корни проверим данным (*) условием

(2): 1) $a=4b$

$16b^2+2b^2=18$

$18b^2=18$

$\left[\begin{array}{l} b=1 \to a=4 \\ b=-1 \to a=-4 \end{array}\right.$

2) $a=9b$: $81b^2+2b^2=18 \to 83b^2=18$

$b=\sqrt{\frac{18}{83}} \to a=9\sqrt{\frac{18}{83}}$ или $b=-\sqrt{\frac{18}{83}} \to a=-9\sqrt{\frac{18}{83}}$

$a-6b\geq 0$:

(*): 1) $b=1,\ a=4 \to 4-6<0 \Rightarrow$ пара не подходит

2) $b=-1,\ a=-4 \to -4+6=2\geq 0 \Rightarrow$ подходит

3) $b=\sqrt{\frac{18}{83}},\ a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \to a-6b=3\sqrt{\frac{18}{83}}\geq 0 \Rightarrow$ подходит

4) $b=-\sqrt{\frac{18}{83}},\ a=-9\sqrt{\frac{18}{83}} \Rightarrow a-6b=-3\sqrt{\frac{18}{83}}<0 \Rightarrow$ не подходит

Итого условию удовлетворяют следующие $(a;b)$:

$\begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \angle CED = \angle DBC = 30^\circ$ (опираются на $\overset{\frown}{DC}$)

3) из п/у Δ-ка CDB: $\sin\angle CBD = \sin 30^\circ = \frac{DC}{DB} = \frac{2x}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow DB = 4x$, тогда по теореме Пифагора:

$BC^2 = BD^2 - DC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{(4x)^2 - (2x)^2} = \sqrt{12x^2} = x\sqrt{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{x\sqrt{12}}{3x} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) Найти: $S_{\Delta CED}$

Решение: 1) $AC = \sqrt{7} \Rightarrow 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$;

$DC = 2x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $CB = x\sqrt{12} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

2) из п/у Δ-ка ACB (по т. Пифагора):

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{(3x)^2 + (x\sqrt{12})^2} = x\sqrt{21} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{1} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

~~3) $\Delta ACB \sim \Delta ADE$ ($\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ADE = \angle ABC \Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{x\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \sin\angle ADE$ $= \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{21}} \Rightarrow AE = \frac{3\sqrt{7}}{3\sqrt{21}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ п/у ΔADE~~

3) $\angle CAB = \alpha$, $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{x\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{DE}{AD} =$

п/у ΔACB п/у ΔADE

$= \dfrac{DE}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \dfrac{3DE}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \dfrac{3\sqrt{7}}{3\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4) из $\triangle ACE$: $\angle ACE = 180° - \alpha - (\overset{90°}{\angle AED} + \overset{30°}{\angle DEC}) =$
$= 180° - \alpha - 120° = 60° - \alpha$

5) $\angle ACE = \angle DBE$ (т.к. опираются на $\overset{\frown}{DE}$) $=$
$= 60° - \alpha \Rightarrow \angle ADB$ (из $\triangle ADB$) $= 180° - \alpha - (60° - \alpha) =$
$= 120°$; $\angle ADE$ (из п/у $\triangle ADE$) $= 90° - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EDB = \angle ADB - \angle ADE = 120° - (90° - \alpha) = 30° + \alpha$;
$\angle CDB$ (из п/у $\triangle$-ка CDB) $= 180° - 90° - 30° = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EDC = \angle EDB = \angle CDB = 90° + \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot DC \cdot \sin(90° + \alpha) = \frac{1}{2} DE \cdot DC \cdot \sin(90° - \alpha) =$
$= \frac{1}{2} \underset{\text{в см. п.3}}{DE} \cdot \underset{\text{в см. п.1}}{DC} \cdot \underset{\text{в см. п.3}}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}} =$
$= \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{1}{3}$

Задача 3

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 - 36 + 2(y-1)^2 - 2 + 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

пусть $x - 6 = a$; $y - 1 = b$; тогда

$a - 6b = x - 6 - (6y - 6) = x - 6y \Rightarrow$
$\Rightarrow$ система примет вид:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Обратная замена:

1) $\begin{cases} a=-4 \to x-6=-4 \to \\ b=-1 \to y-1=-1 \to \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \to x-6=9\sqrt{\frac{18}{83}} \to \\ b=\sqrt{\frac{18}{83}} \to y-1=\sqrt{\frac{18}{83}} \to \end{cases} \begin{cases} x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \\ y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \end{cases}$

Ответ: $(2;0)$; $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6;\ \sqrt{\frac{18}{83}}+1\right)$

Задача 6

$8x-6|2x-1| \overset{(2)}{\leq} ax+b \overset{(1)}{\leq} -8x^2+6x+7$

(1): $ax+b \leq -8x^2+6x+7$

Расс-м ф-цию: $g(x) = -8x^2+6x+7$ - квадратичная, гр. - парабола, ветви вниз.

$g(-\frac{1}{2}) = -8\cdot\frac{1}{4} - 6\cdot\frac{1}{2} + 7 = 2$

$g(1) = -8+6+7 = 5$

$x_0 = -\frac{3}{8}$, $g(x_0) = -8\cdot\frac{3}{64} - \frac{6\cdot 3}{8} + 7 = -\frac{3}{8} - \frac{9}{4} + 7$

$-\frac{6}{2\cdot(-8)}$

схематически данная парабола будет выглядеть так:

$\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a, b > 0: f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ $\qquad f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$p = 2: f(2) = 1$

$p > 2 \Rightarrow f(p) = \frac{p}{2} - \frac{1}{2} = \frac{p-1}{2}$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$ $\qquad f(4) = 2f(2) = 2$

$f(3) = 1$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) = f(1) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f$ $\qquad f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

~~[illegible]~~

$ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$ax + b \geq 8x - 6|2x - 1|$

$y = -8x^2 + 6x + 7$

$y = kx + b$

$2 = -\frac{1}{2}k + b$

$5 = k + b$

$\frac{3}{2}x$

$x_0 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$-\cancel{8} \cdot \frac{3}{\cancel{64}_{8}} + \cancel{6}^{3} \cdot \frac{3}{\cancel{8}_{4}} + 7 = -\frac{3}{8} + \frac{9}{4} + 7 =$

$f(1) = -8 + 6 + 7 = 5$ $\qquad = -\frac{3}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{15}{8} + 7$

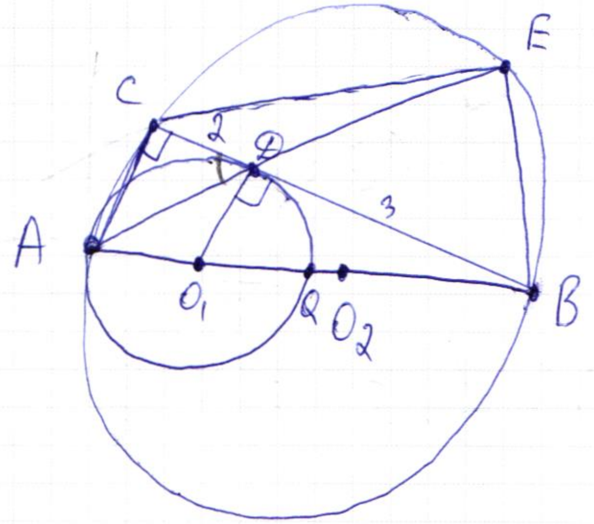
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \cancel{0} -8 \cdot \frac{1}{4} - 3 + 7 = 2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



Пусть r - радиус ω, R - радиус Ω.

1) по св-ву секущей и касательной для ω:

$BD^2 = BQ \cdot BA$

$BQ = 2R - 2r$ $\Rightarrow$

$BA = 2R$

$\Rightarrow 9 = 2R(2R-2r) \Rightarrow 9 = 4R^2 - 4Rr$

2) для Ω: $\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на AB-диаметр)

3) $O_1D \perp DB$ ($O_1D = r$, DB - касательная) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle DO_1B$ ($\angle ACB = \angle O_1DB = 90^\circ$, $\angle CBA$ - общий)

$\Rightarrow \frac{BC}{DB} = \frac{BA}{BO_1} = \frac{5}{3} = \frac{2R}{2R-r} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10R - 5r = 6R$

$4R = 5r$, получим: $\begin{cases} r = \frac{4}{5}R \\ 9 = 4R^2 - 4Rr \end{cases} \Rightarrow$

$r = \frac{4}{5}R$

$\Rightarrow 9 = 4R^2 - \frac{16}{5}R^2$

$45 = 20R^2 - 16R^2$

$4R^2 = 45$ $R = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \frac{4}{5}R = \frac{12\sqrt{5}}{10} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

4) из п/у Δ-ка ACB: $AC^2 = AB^2 - CB^2 = (2R)^2 - (CD+DB)^2 =$
$= 45 - 25 = 20 \Rightarrow AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

5) из п/у Δ-ка ACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 24 \Rightarrow AD = 2\sqrt{6}$

6) по т. о произведении хорд: $AD \cdot DE = CD \cdot DB$

$2\sqrt{6} \cdot DE = 6$

$\sqrt{6} \cdot DE = 3$

$DE = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AE = AD + DE = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

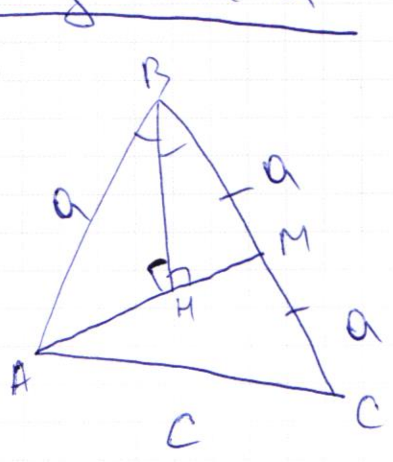
7) $\sin\angle CDA = \frac{CA}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

8) $S_{ACEB} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin\angle CDA = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{5\cancel{\sqrt{6}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{6}}} =$

$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$; $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

<u>Задача 2</u>



из Δ-ка ABM: BH – биссектриса и высота $\Rightarrow \Delta ABM$ – р/б $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB = BM = MC = a$
(M – сер. BC, AM – медиана)

Получим Δ-к со сторонами a; $2a$; $c \Rightarrow 3a + c = 900 \Rightarrow c \vdots 3$

по н-ву Δ-ка: 1) $2a + c > a \Rightarrow a + c > 0$ – верно всегда

2) $3a > c$; 3) $a + c > 2a$
$c > a$, получим: $\begin{cases} 3a > c \\ c > a \\ 3a + c = 900 \end{cases}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница № 7
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+b \geq -12x-10 \\ ax+b \leq 2x+3 \\ x \in [-\tfrac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

$-\frac{1}{2}a+b \leq 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1. $3a+c=900$, $3a>c$ $\Rightarrow$ $c+c<900$
$2c<900 \Rightarrow c<450$

2. $3a+c=900$, $3a>c$ $\Rightarrow$ $3a+3a>900$
$6a>900 \Rightarrow a>150$

~~3. $3a>c$, $3a+c=900$ $\Rightarrow$ $4c<900$~~

3. $c>a \Rightarrow a<450 \Rightarrow c>150$, итого:

$$\begin{cases} a\in(150;450) \\ c\in(150;450) \\ c>a \end{cases}$$

3. $3a+c=900$, $c>a$ $\Rightarrow 4c>900$
$c>225 \Rightarrow 4a<900 \Rightarrow a<225$

Итого:

$$\begin{cases} c\in(225;450) \\ a\in(150;225) \\ c\vdots 3 \\ 3a+c=900 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ итоговое кол-во д-ков численно равно кол-ву чисел кратных 3 среди $(225;450)$, на каждое такое число будет „подобрано" ровно 1 значение a, всего таких чисел: ~~$\frac{449-225}{3}$~~

$\left[\frac{449-226+1}{3}\right]=\left[\frac{224}{3}\right]=74$. $\boxed{\text{Ответ: } 74}$

~~$\left[\frac{450-225+1}{3}\right]-2=\left[\frac{226}{3}\right]-2=73$~~ ~~$\frac{449-226+1}{3}$~~ ~~Ответ: 73~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.

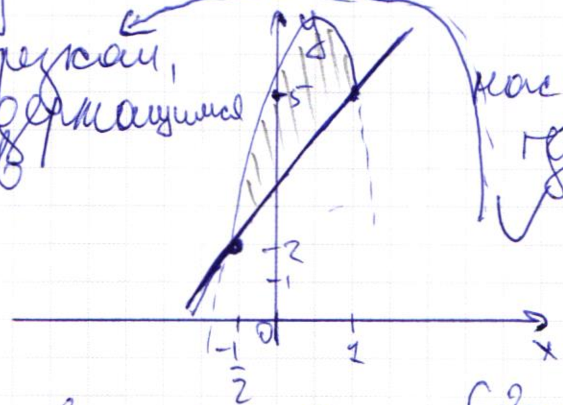
$8x-6|2x-1| \overset{(2)}{\le} ax+в \overset{(1)}{\le} -8x^2+6x+7$

(1): $ax+в \le -8x^2+6x+7$

Расс-м $f(x)=-8x^2+6x+7$ – квадр. ф-ция, график – $\cap$, $f(-\frac{1}{2}) = -8\cdot\frac{1}{4}-6\cdot\frac{1}{2}+7 =$

$= -2-3+7=2$; $f(1)=5$; $x_в = \frac{-6}{-16}=\frac{3}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~схематически~~ $f(x)$ будет такой:

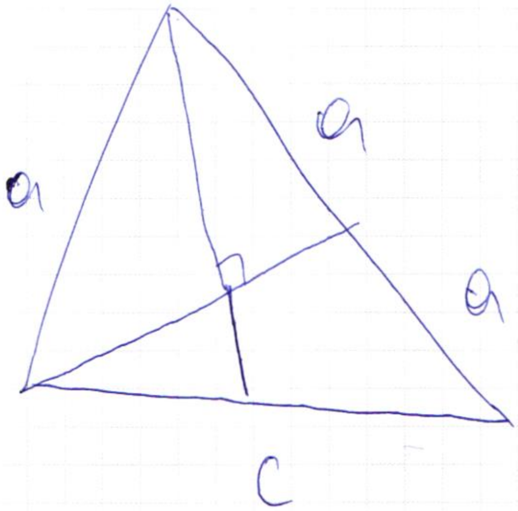


отрезок, содержащийся в

нас интересует участок, где $x\in[-\frac{1}{2};1]$, он ограничен прямой l, проходящей через $(-\frac{1}{2};2)$ и $(1;5)$,

$l: y=kx+в \rightarrow \begin{cases} 2=-\frac{1}{2}k+в \\ 5=k+в \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=-k+2в \\ 5=k+в \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} в=3 \\ k=2 \end{matrix} \Rightarrow l: y = 2x+3 \Rightarrow$ для выполнения условий задачи требуется, чтобы было выполнено: $2x+3 \ge ax+в$, на $[-\frac{1}{2};1]$



$$\frac{a}{2a} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

$2a < a + c$

$c > a$

$3a > c$

$3a + c = 900$

$3a = 900 - c \Rightarrow c \vdots 3$

$4c > 900$

$c > 225$

$a > 75$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $ax+b \geqslant 8x-6|2x-1|$

Расс-м $g(x) = 8x-6|2x-1|$

$g(1) = 8-6 = 2$

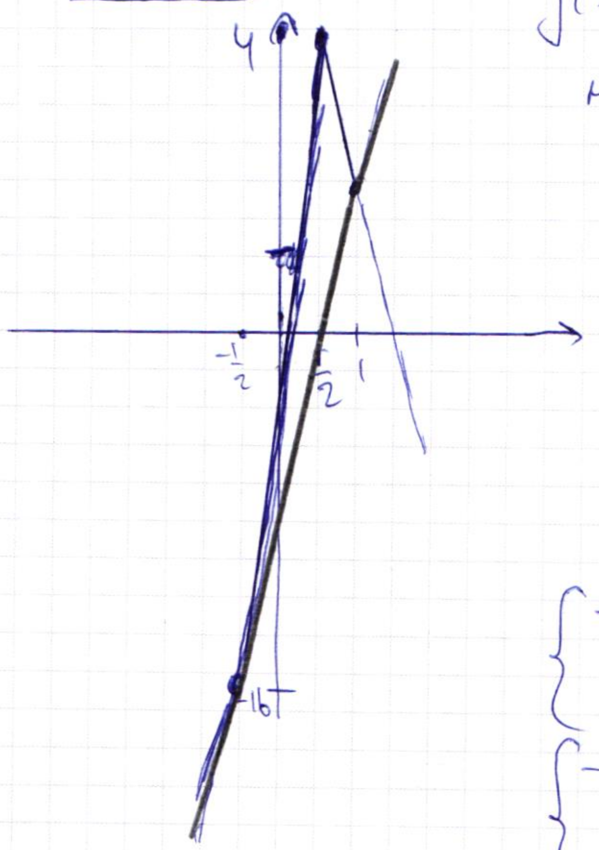
$g(-\frac{1}{2}) = -16$

$g(\frac{1}{2}) = 4$

$$g(x) = \begin{cases} 8x-6(2x-1), \text{ при } 2x-1 \geqslant 0 \\ 8x+6(2x-1), \text{ при } 2x-1 < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -4x+6, & x \geqslant \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Схематически $g(x)$ будет такой:



нас интересует участок графика, где $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$, он ограничен отрезком, содержащ. в прямой l_2, проходящей через $(-\frac{1}{2}; -16)$ и $(1; 2)$

$l_2: y = k_2x + b_2$

$$\begin{cases} -16 = -\frac{1}{2}k_2 + b_2 \\ 2 = k_2 + b_2 \end{cases}$$

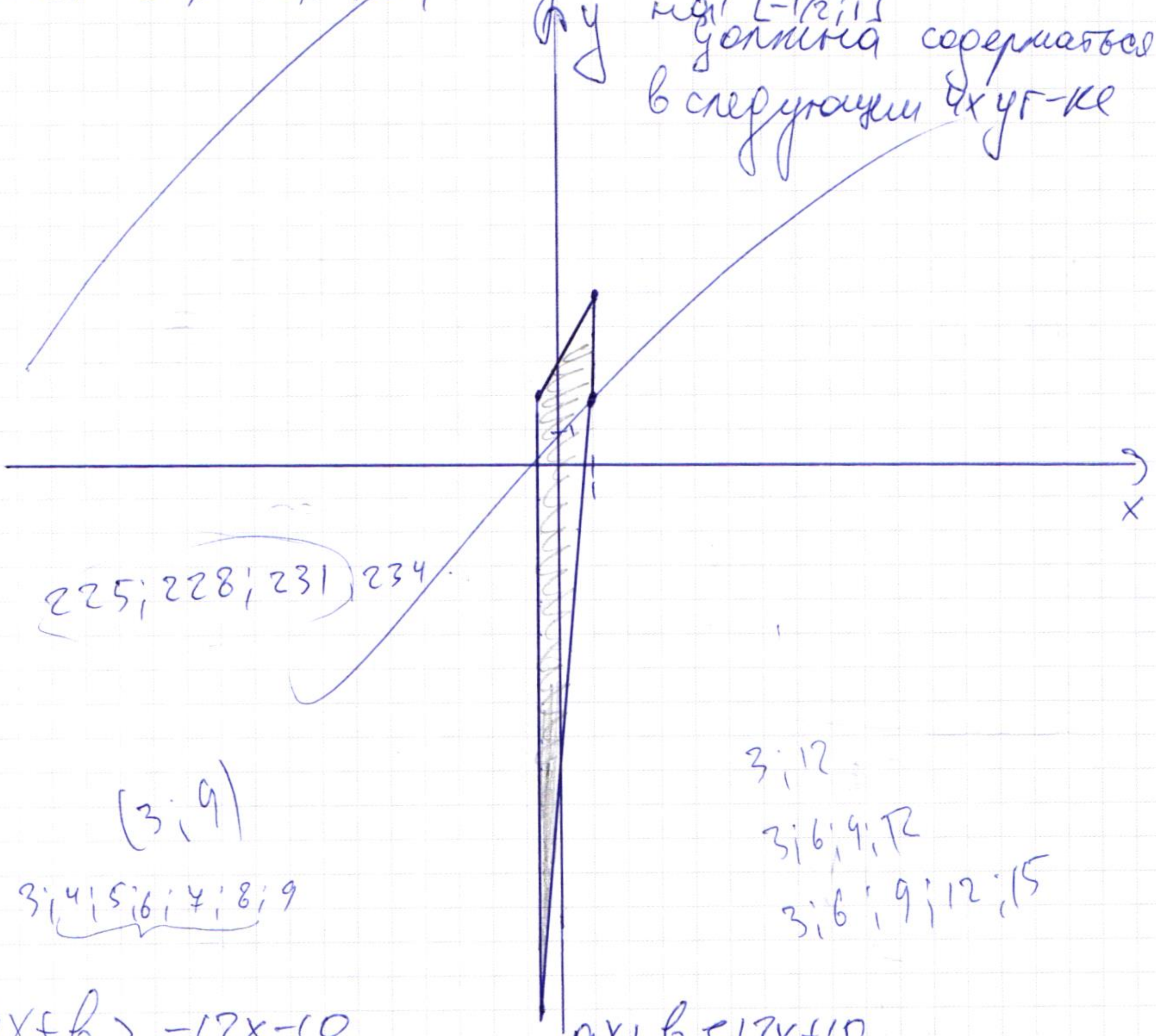
$$\begin{cases} -32 = -k_2 + 2b_2 \\ 2 = k_2 + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow b_2 = -10$

$k_2 = -12$ $\Rightarrow l_2: y = -12x-10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+b \geqslant -12x-10 \\ ax+b \leqslant 2x+3 \end{cases}$$

$\Rightarrow ax+b \geq -12x-10$, получим, что $l_3 = ax+b$ на $[-1/2; 1]$ должна содержаться в следующем 4х уг-ке



225; 228; 231; 234

(3; 9)

3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

3; 12

3; 6; 9; 12

3; 6; 9; 12; 15

$ax+b \geq -12x-10$ $\qquad$ $ax+b \leq 12x+10$

~~2x+11~~ $\quad 2x+3 \geq ax+b$ $\qquad$ $2ax+2b \leq 14x+13$

~~ax+b~~ $\quad 12x+18 \geq 6ax+6b$ $\qquad$ $ax+b$

$\cancel{12x}+18 - ax - b \geq 6ax+6b+\cancel{12x}+10$

$7ax+4b \geq 8$

$ax+b \geq \frac{8}{7}$

3; 6

3, 4, 5, 6

3; 4; 5; 6; 7

3; 4; 5; 6

$3a+c=900$

$6a>900$

$a>150 \Rightarrow a<225$

$c>225 \Rightarrow c<450$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 $\sqrt{ab} = a-6b \quad ab^4=(a-6b)^4$

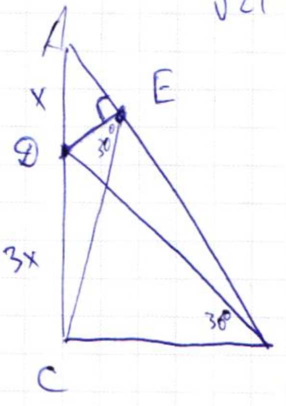
$a^4+2b^4=18$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$ab = a^2-12ab+36b^2 \quad a^4-6a^4b$

$\frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{DE}{\frac{\sqrt{7}}{3}} \quad a^4 = 2(9-b^4) = 2(3-b^2)(3+b^2)$

$\sqrt{21}\,DE = \sqrt{7}$



$\frac{x}{AB}$

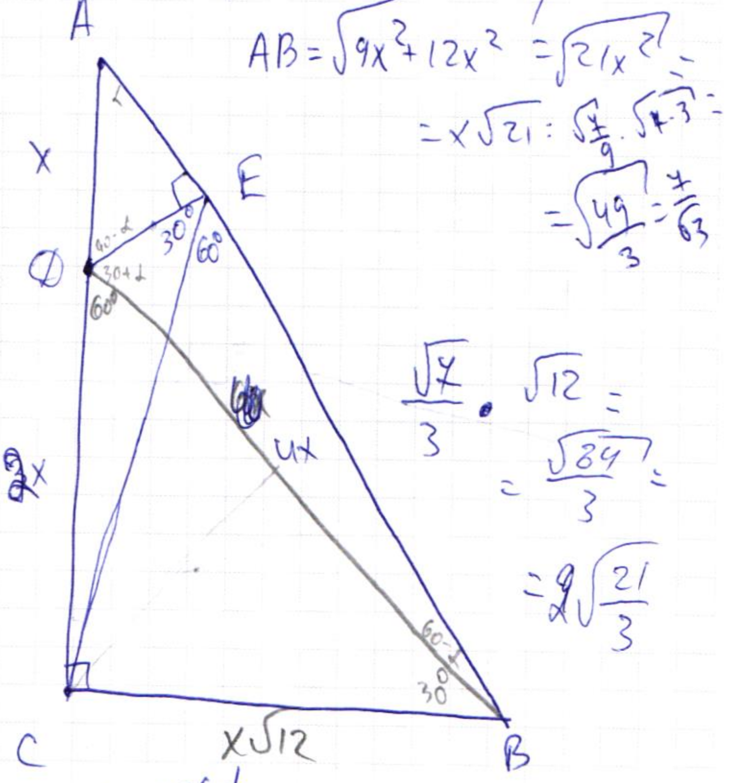
$\frac{x}{AB} = \frac{AE}{4x}$

$AB = \sqrt{9x^2+12x^2} = \sqrt{21x^2} =$

$= x\sqrt{21} = \sqrt{\frac{7}{9}} \cdot \sqrt{7 \cdot 3} =$

$= \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{7}}{3}$



$\frac{CE}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{CE}{\sin(90°-\alpha)} = \frac{CE}{\cos\alpha}$

$\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{12} =$

$= \frac{\sqrt{84}}{3} =$

$= 2\sqrt{\frac{21}{3}}$

$\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\frac{1}{2}ab\sin\alpha$

~~$CB = x\sqrt{24}$~~

$x\sqrt{12}$

$\sin(90°+\alpha) = \cos\alpha$

$36x^2 - 9x^2 = 27x^2$

3

$\frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{3DE}{\sqrt{7}}$

$\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{7}{9} - \frac{3}{9} = \frac{4}{9}$

16

$\frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2-36+2(y-1)^2-2+20=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$x-6=a \quad y-1=b$

$a-6b=x-6y$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2+2b^2-18=0$

$\cancel{D=72-8b^2}$

$ab=a^2-12ab+36b^2$

a^2+2b^2

$a^2-13ab+36b^2=0$

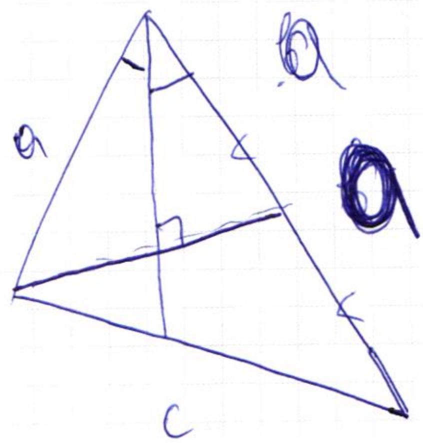
$D=169b^2-144b^2=$

$=25b^2$

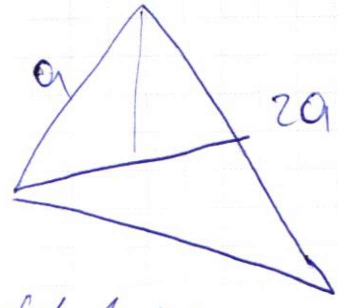
$a=\frac{13b\pm5b}{2}$

$a=9b$

$a=4b$



$3a+c=400$



$\begin{cases} 3a+c=900 \\ 3a>c \\ c>a \end{cases}$

$\cancel{2a+c>a}$

$a+c>2a$

$c>a$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

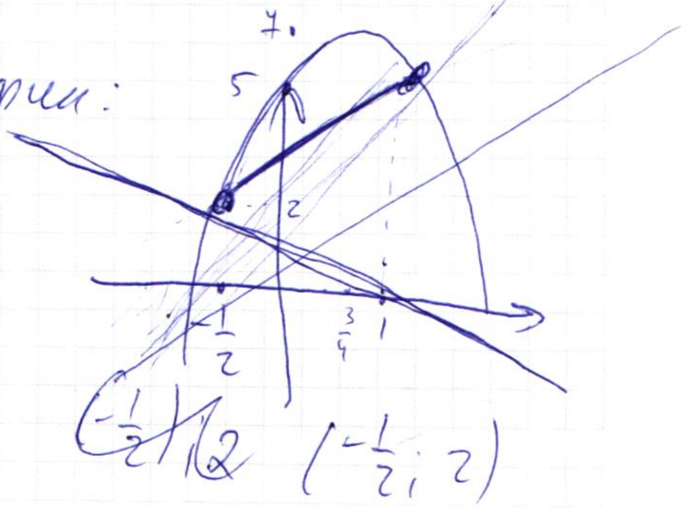
Задача 6.

$8x-6|2x-1| \overset{(2)}{\leq} ax+b \overset{(1)}{\leq} -8x^2+6x+7$

(1): $-8x^2+6x+7 \geq ax+b$

Расс-м ф-ции: 1) $y=-8x^2+6x+7$ – квадр. график парабола, ветви вниз, $x_0=\frac{3}{4}$, $y_0=y(x_0)=7-8\cdot\frac{9}{16}+6\cdot\frac{3}{4}+7=7$, $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-8\cdot\frac{1}{4}-6\cdot\frac{1}{2}+7=2$

$y(1)=5$ => схематич. график:



$(-\frac{1}{2}; 2)$

$(1; 5)$

$y=kx+b$

$2=-\frac{1}{2}k+b$

$4=-k+2b$

$5=k+b$

$b=3$

$k=2$

$y=2x+3$

$ax+b\leq 2x+3$

$x\in[-\frac{1}{2}; 1]$

$y=8x-6|2x-1|$

1) $2x-$

$-\frac{3}{8}-\frac{9}{4}+7=$

$=-\frac{3}{8}-\frac{18}{8}+7=-\frac{21}{8}$

$y = 8x - 6|2x-1|$

1) $2x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

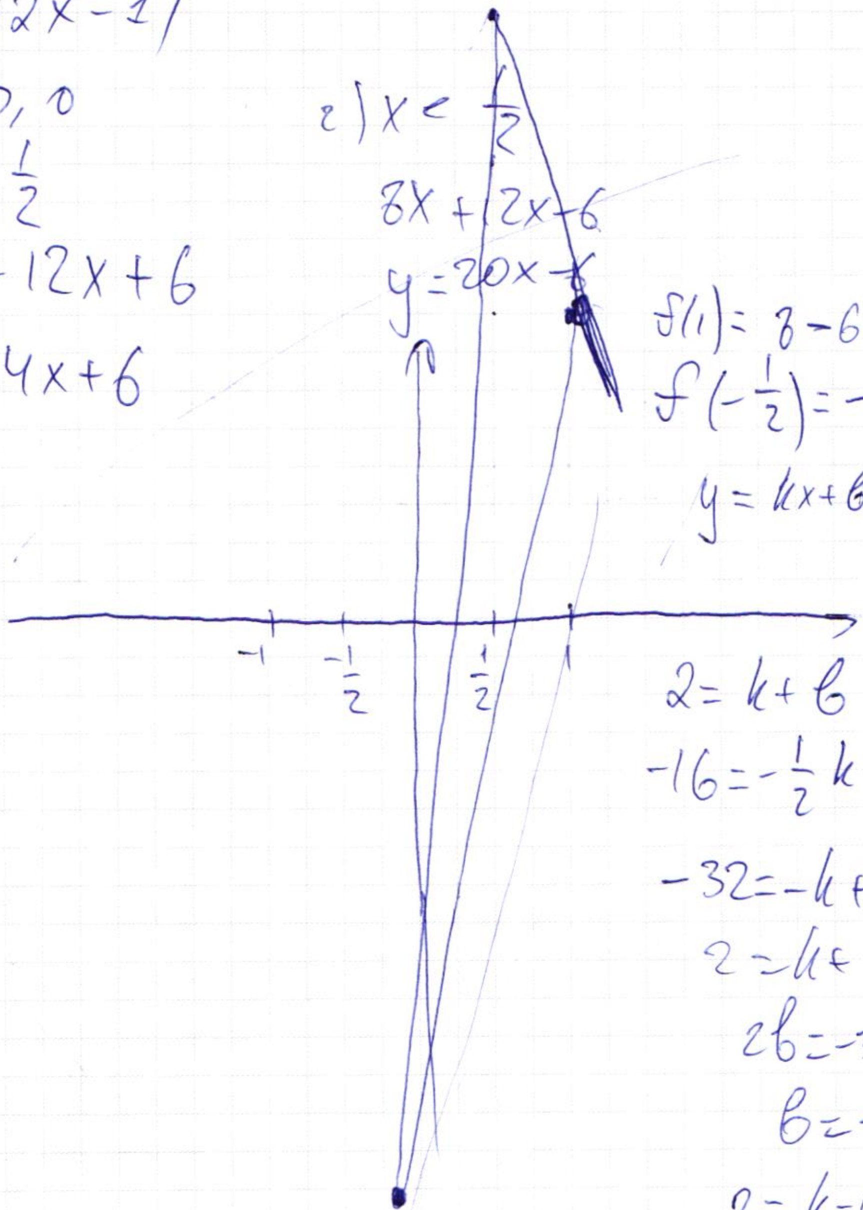
$y = 8x - 12x + 6$

$y = -4x + 6$

2) $x < \frac{1}{2}$

$8x + 12x - 6$

$y = 20x - 6$



$f(1) = 8 - 6 = 2$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 - 12 = -16$

$y = kx + b$

$2 = k + b$

$-16 = -\frac{1}{2}k + b$

$-32 = -k + 2b$

$2 = k + b$ (+)

$2b = -30$

$b = -15$

$2 = k - 15$

$k = 17$

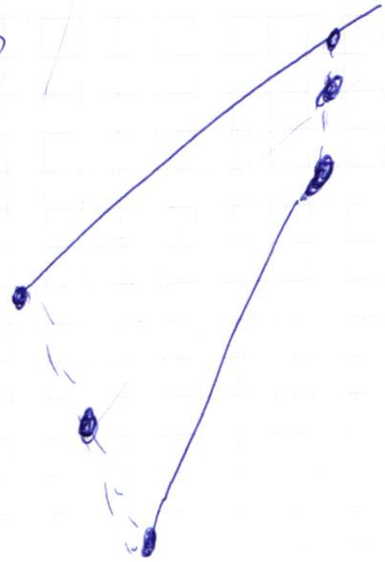
$y = 17x - 15$

$17x - 15 \leq ax + b \leq 2x + 3$

$17x - 15 = 2x + 3$

$15x = 18$

$x = \frac{6}{5}$



$a + b$

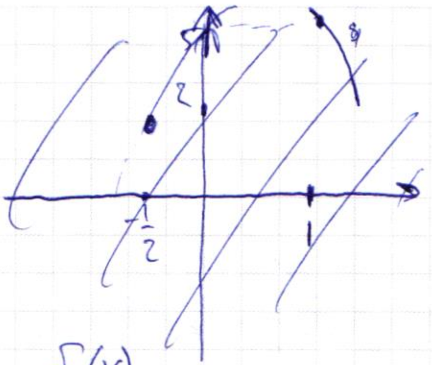
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

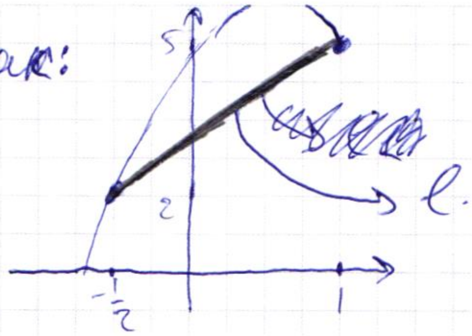
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



так:



$f(x) = ax + b$ – прямая $\Rightarrow$ для удовлетворения условия задачи необходимо, чтобы:

$f(x) \le g(x)$ на $[-\frac{1}{2}; 1]$, что равносильно следующему условию: прямая l (указанная жирным шрифтом выше, l проходит через $(-\frac{1}{2}; 2)$ и $(1; 5)$) была не ниже $f(x) = ax + b$. (*)

$l: y = kx + b \to \begin{cases} 5 = k + b \\ 2 = -\frac{1}{2}k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = k + b \\ 4 = -k + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} b = 3 \\ k = 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow l: y = 2x + 3 \Rightarrow ax + b \le 2x + 3$ (*) на $[-\frac{1}{2}; 1]$

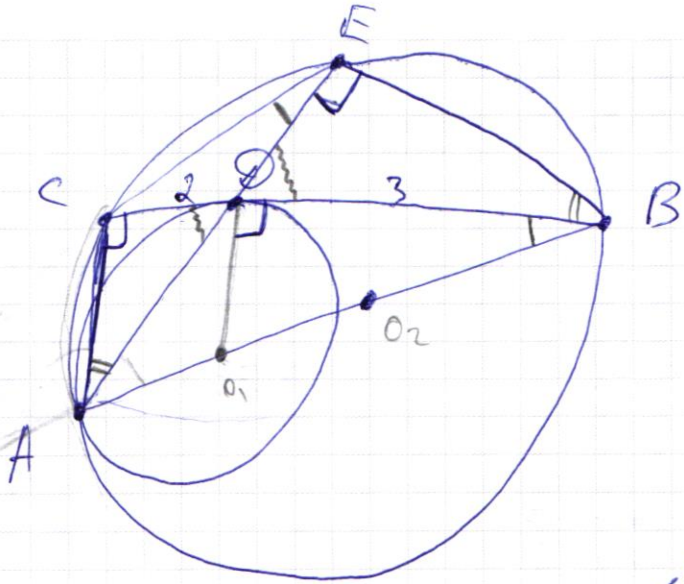
(*) в противном случае

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)



$(3\sqrt{5})^2 - 5^2 =$

$= 45 - 25 = 20$

$AC = \sqrt{20}$

$6 : \sqrt{20}\ x$

$x = \frac{6}{\sqrt{20}}$

$\frac{6\sqrt{20}}{20} = \frac{6\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

хорда кас

$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$(2R)^2 + AC^2 = 25$

$\frac{3}{5} = \frac{2R - 2r}{2R}$ – подобие

$6R = 10R - 10r$

$10r = 4R$

$5r = 2R$

~~$4r = 5R$ $r = \frac{5}{4}R$~~

~~$9 = 2R^2 - 2rR$~~

~~$9 = 2R^2 -$~~

$9 = 4R^2 - 4rR$

$9 =$ $r = \frac{2}{5}R$

$9 = 4R^2 - \frac{8}{5}R^2$

$20R^2 - 8R^2 = 45$

$\frac{3}{5} = \frac{2R - r}{2R}$

$6R = 10R - 5r$ $4R = 5r$ $r = \frac{4}{5}R$

$9 = 4R^2 - 4Rr$

$9 = 4R^2 - \frac{16}{5}R^2 = \frac{4}{5}R^2$

$45 = 4R^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-a)(y-1)$

a, b, c $\quad a \to a$

$b = aq$ $\quad b \to aq$

$c = aq^2$ $\quad c \to aq^2$ $\quad d \to aq^3$

$a, aq, aq^3, ax^2 - 2bx + c = 0$

$x = aq^4$ – корень

$a\cdot(aq^4)^2 - 2aq(aq^4) + aq^2 = a\cdot a^2q^8 -$

$- 2a^2q^5 + aq^2 = a^3q^8 - 2a^2q^5 + aq^2 = 0$

$aq^3 \quad D = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$aq^4 = \frac{2aq}{2a} = q$

$aq^4 - q = 0$

$aq^3(q-1) = 0$

$\frac{14}{9} = x\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - x\right)$

$\frac{14}{9} = x\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} - x^2$

$x^2 - x\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{14}{9} = 0$

$a\cdot(aq^3)^2 - 2aq(aq^3) + aq^2 = 0$

$D = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$d = \frac{2aq}{2a} = q = aq^3$

$aq^3 - q = 0$

$aq(q^2-1) = 0 \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a = a$; $b = aq$; $c = aq^2 \Rightarrow$ 4чл $= aq^3$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$x = aq^3$

$ax^2 - 2aq \cdot x + aq^2 = 0$

$D = 4a^2q^2 - 4aq^2 \cdot a = 0$

$x = \frac{2aq}{2a} = q$

$(x-6)(y-1) =$

$xy - x - 6y + 6$

$8x^2 + ax - 6x + b - y \le 0$

$8x^2 + x(a-6) + (b-y) \le 0$

$D = a^2 - 12a + 36 - 32b$

(2)

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$xy - 6y - x + 6 = (x-6)(y-1)$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 36 - 2 + 20 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 + 2(x-6)(y-1) \cdot \sqrt{2} = 18 - 2(x-6)(y-1)\sqrt{2}$

$x - 6 = a$ $\quad \sqrt{ab} = x - 6y = a - 6b$

$y - 1 = b$ $\quad ab = a^2 - 36b^2$

$a - 6b = x - 6 - 6y + 6 = x - 6y$

$a^4 + 2b^4 = 18$

$-8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{6 \cdot 3}{4} + 7 =$