

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. 1) $f(x \cdot 1) = f(x) + f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) = 0$

2) $f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -f(\frac{1}{x})$

3) $f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$

кон-во $y, f(y) < f(x):$	x	$f(x)$
	2	1
	3	1
	4	$= f(2) + f(2) = 2$
	5	2
	6	$= f(2) + f(4) = 2$
	7	3
	8	$= f(2) + f(4) = 3$
	9	$= f(3) + f(3) = 2$
	10	$= f(2) + f(5) = 3$
	11	5
	12	$= f(6) + f(2) = 3$
	13	6
	14	$= f(7) + f(2) = 4$
	15	$= f(5) + f(3) = 3$
	16	$= f(8) + f(2) = 4$
	17	8
	18	$= f(3) + f(6) = 3$
	19	9
	20	$= f(4) + f(5) = 4$
	21	$= f(3) + f(7) = 4$
	22	$= f(11) + f(2) = 6$

26 { 4, 2, 2, 6, 6, 6, 2, 6, 6, 2, 6, 6, 1, 6, 6, 1, 7, 12, 6, 12, 12, 19, 6, 20, 12, 12, 17 }

57 { 1, 6, 6, 1, 7, 12, 6, 12, 12, 19, 6, 20, 12, 12, 17 }

31 { 1, 2, 6, 12, 12, 19, 6, 20, 12, 12, 17 }

67 { 6, 20, 12, 12, 17 }

$= 26 + 57 + 31 + 67 = 181$

$\Sigma = 181$ (напр $(x, y), f(y) < f(x)$;
аналогично $\Sigma = 181$ глн $f(x) < f(y)$)

Ответ: 181



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть $(a; b; c) = (a; aq; aq^2)$, тогда
 $ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$ (обозначим $a \neq 0$)
 $x^2 - 2qx + q^2 = 0$
 $(x - q) = 0$
 $x = q = aq^3$ (четвёртой степенной функцией ком. пр.) \Rightarrow
 $\Rightarrow 1 = aq^2 = c$

Ответ: 1

3.
$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{(x-6)(y-1)} = \sqrt{x-6} \sqrt{y-1} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6 = u \\ y - 1 = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - 6v = \sqrt{uv} \\ u^2 + 2v^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow uv \geq 0; u - 6v \geq 0 \Rightarrow u \geq 6v$$

$$\begin{cases} u^2 - 12v + 36v^2 = uv \\ u^2 + 2v^2 - 18 = 0 \end{cases} \begin{cases} (u - 9v)(u - 4v) = 0 \\ u^2 + 2v^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 9v \\ u^2 + 2v^2 = 18 \end{cases} \begin{cases} u = 9v \\ 83v^2 = 18 \end{cases} \begin{cases} v_1 = \sqrt{\frac{18}{83}}; u_1 = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \checkmark \\ v_2 = -\sqrt{\frac{18}{83}}; u_2 = -9\sqrt{\frac{18}{83}} \otimes \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 4v \\ u^2 + 2v^2 = 18 \end{cases} \begin{cases} u = 4v \\ 18v^2 = 18 \end{cases} \begin{cases} v_3 = 1; u_3 = 4 \otimes \\ v_4 = -1; u_4 = -4 \checkmark \end{cases}$$

Омбор корней по ОДЗ и ООФ:

$$\begin{cases} u_1 = 9\sqrt{\frac{18}{83}}; v_1 = \sqrt{\frac{18}{83}} \\ u_2 = -4; -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; y_1 = \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \\ x_2 = 2; y_2 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 0); (9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; \sqrt{\frac{18}{83}} + 1)$

4.

а) Пусть $AD = x; DC = 2x; AC = 3x$

б) BCDE - трапеция,
т.к. $\angle E + \angle C = 180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3} \cdot x \Rightarrow$$

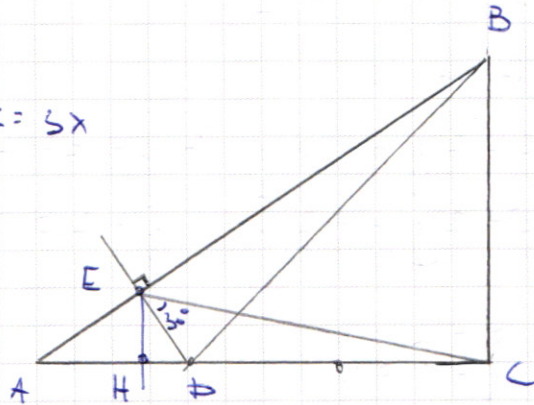
$$\Rightarrow \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot x}{3 \cdot x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

в) Рассмотрим прямоуго. $\triangle AEB$; зная $AD = \frac{\sqrt{2}}{3}$, и

$\tan \angle EAD$, найдем высоту $EH = \frac{2}{\sqrt{21}}$

$$S_{\triangle CEP} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{42}} = \frac{1}{\sqrt{42}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\triangle BOC = \triangle BOC \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2BC = x$

если же одна сторона произвольна \triangle треугольника больше

другой в два раза,

то \Rightarrow несложно \triangle -ть

вернем-сь медиана и бисс-са, т.е. свойство работает в \triangle стороны, тогда нас все

треугольники со сторонами $(x, 2x, x)$

осталось узнать сколько решений имеет

система:

$x + 2x + y = 900$, при условии сущ-я \triangle -ка:

$y = 900 - 3x$

- 1-я нер-во верно \forall при $x, y \in \mathbb{N}$
- 2-я:

$900 - 3x = y > x \Rightarrow x < 225$

• 3-я: $900 - 3x = y < 3x \Rightarrow x > 150$

$x < 2x + y \rightarrow 1) 0 < x + y$
 $2x < x + y \rightarrow 2) x < y$
 $x < 2x + x \rightarrow 3) y < 3x$

из п. 2 и п. 3 $\Rightarrow x \in [151; 224]$, очевидно,

что при таких x система будет иметь \triangle решение в

кат. числа, и таких решений будет: $224 - 151 + 1 =$

$= 74$

Ответ: 74

5) $OD \perp BC \sim AC \perp BC$

$AB = 2R; AO = r$

2) $\triangle ABC \sim \triangle BDO$

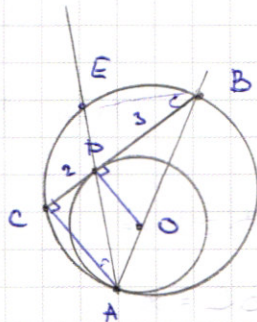
$$\frac{BO}{AB} = \frac{BC}{2R-r} = \frac{3}{2R} \Rightarrow \frac{r}{2R-r} = \frac{3}{2R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6R = 10R - 5r \Rightarrow 5r = 4R \Rightarrow R = \frac{5}{4}r$$

3) $OB^2 + OD^2 = OB^2$

$$r^2 + 3^2 = (2R-r)^2 = \left(\frac{5}{2}r - r\right)^2 = \left(\frac{3}{2}r\right)^2 = \frac{9}{4}r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{5}{4}r^2 \Rightarrow r = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow R = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{5}$$



1) $AC^2 = AB^2 - BC^2 = (3\sqrt{5})^2 - 5^2 = 9 \cdot 5 - 25 = 45 - 25 = 20$

$AC = 2\sqrt{5}; AB^2 = AC^2 + BC^2 = 20 + 4 = 24 \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$

2) $\sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

3) $\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{ED}{2} = \frac{3}{AB} \Rightarrow ED = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}}$

$$AE = ED + AD = \frac{3}{4\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} = \frac{51}{4\sqrt{6}}$$

4) $S_{BACE} = \frac{1}{2} AE \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{51}{4\sqrt{6}} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} =$

$$= \frac{17.3 \cdot 51 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{17.5\sqrt{5}}{16}$$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}; r = \frac{6}{\sqrt{5}}; S = \frac{17.5}{16} \cdot 5\sqrt{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{7}{8} = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8} = 0$$

$$D = \frac{9}{16} + 4 \cdot \frac{7}{8} = \frac{9+56}{16} = \frac{65}{16} = \frac{31}{8}$$

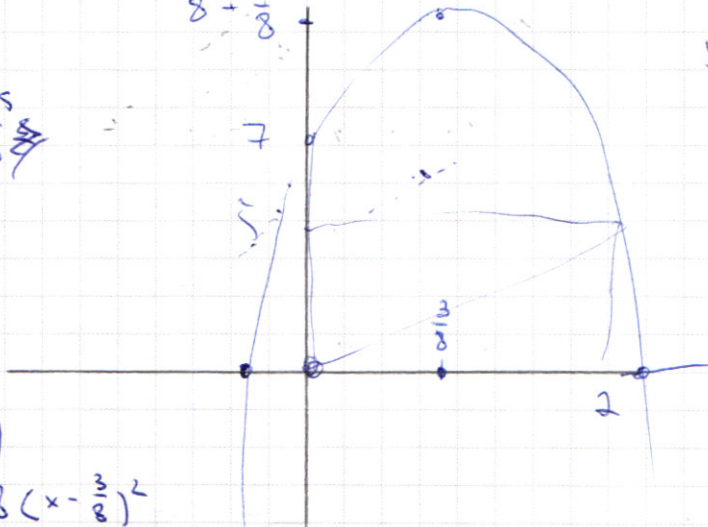
$$x^2 - \frac{6}{8}x - \frac{7}{8} = 0$$

$$-8x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$x_0 = +\frac{6}{2 \cdot 8} = \frac{3}{8}$$

$$y_0 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = 8 + \frac{1}{8}$$

$$6|x-1| - 8x + \frac{65}{8}$$



$$8x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8} = 0$$

$$-8(x - \frac{3}{8})^2 - \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{9}{64}$$

$$8x^2 - 6x + a$$

$$D = 0 = 36 - 32a$$

$$-8x^2 + 6x + 7 - (8 + \frac{1}{8})$$

$$a = \frac{36}{32} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} \quad 36 + 4 \cdot 8 \cdot 7 = 4(9 + 56) = 240 + 224 = 260 = 100 \cdot 2.6$$

$$8x^2 - 6x + a = 0$$

$$D = 36 - 32a$$

$$-8 + 6 + 7 = 13 \cdot 8$$

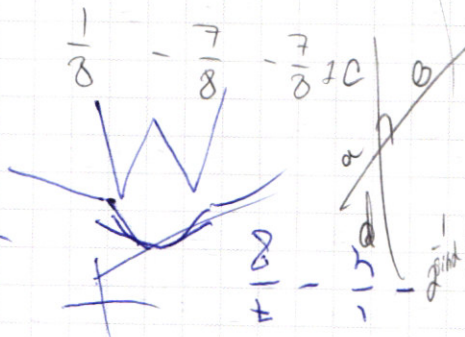
$$8 \cdot 8$$

$$8 \cdot 24$$

$$4x + 200x$$

$$8x^2 - \frac{x}{8} - \frac{7}{8}$$

$$|2x-1| =$$



$$8 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 9$$

$$2 - x + 2 + x = 8$$

$$a(c+d) + b(c+d)$$

$$d, d''$$

$$5x^2 - 4x + 7$$

$$D = 16 + 4 \cdot 7 = 8$$

$$0 - 6 \cdot 0 - 1 \leq b \leq 0 + 0 + 7$$

$$-6 \leq b \leq 7$$

$$2 + 2 + x + 8 + (8-8)x + 1 - x + 9 + 7$$

$$8x - 6 \mid 2x - 1 - ax - b \leq 0$$

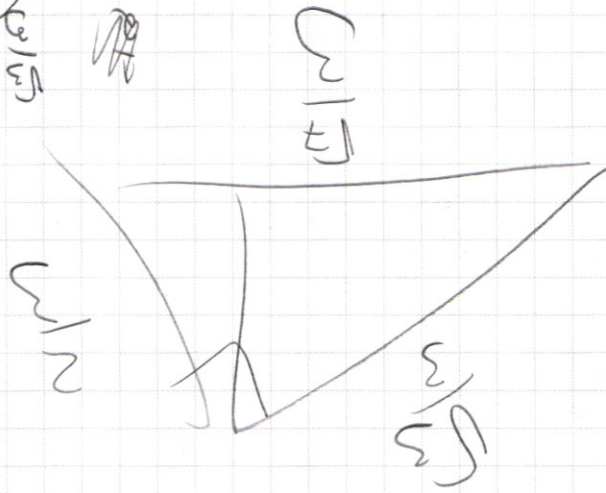
$$x(b-a) - 6 \leq 6 \mid 2x - 1$$

$$x(b-a) - b \geq 0$$

$$x^2(6x - 16a + 4) - 2x(b-a) - 6 \leq 364x^2$$

$$\frac{\sqrt{21}}{2} = y$$

$$\frac{y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$t = y + z$$

$$f(y) > f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x) = f\left(\frac{x}{2} \cdot x\right)$$

$$f(0) + f(x) = f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2 \cdot x) = f(x) + f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x) = f\left(\frac{x}{2} \cdot x\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) =$$

$$T = \left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$22 \ 12 \ 02 \ (5) \ 81 \ (1) \ 91 \ 51 \ 21$$

$$(1) \ 12 \ 13 \ 01 \ 68 \ (1) \ 9 \ (5) \ 2 \ (1)$$

$$8 = f(12)$$

$$6 = f(13)$$

$$5 = f(11)$$

$$3 = f(7)$$

$$2 = f(5)$$

~~$$f(x) =$$~~

$$T = \left[\frac{2}{3}\right] = f(2)$$

$$T = f(2)$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3x + y = 900$$

$$3x - 900 = y$$

$$3x - 900 < y < 3x$$

$$-900 < 0$$

$$3x - 900 = y > x$$

$$2x > 900$$

$$3x + y = 900$$

$$y < 3x$$

$$x < 2x + y$$

$$2x < x + y$$

$$3x - 900 = y > x$$

$$2x > 900$$

$$x > 450$$

$$y = 900 - 3x > x$$

$$900 > 4x$$

$$225 > x$$

$$\frac{900}{6} = 150$$

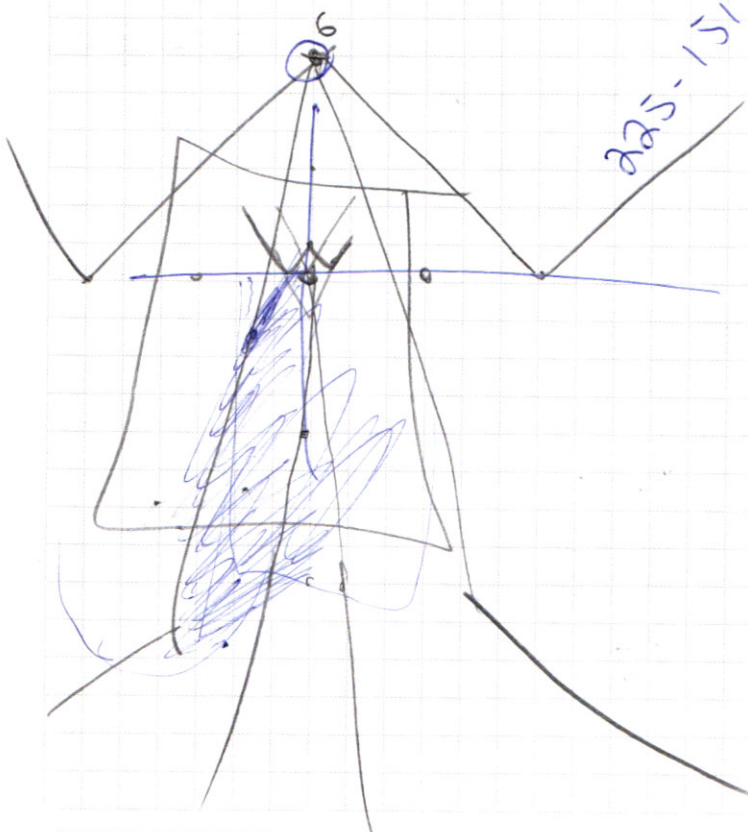
$$\frac{900}{3} = 300$$

225
-151

225
49 + 25 =

= 74

$$\frac{900}{6} = 150$$



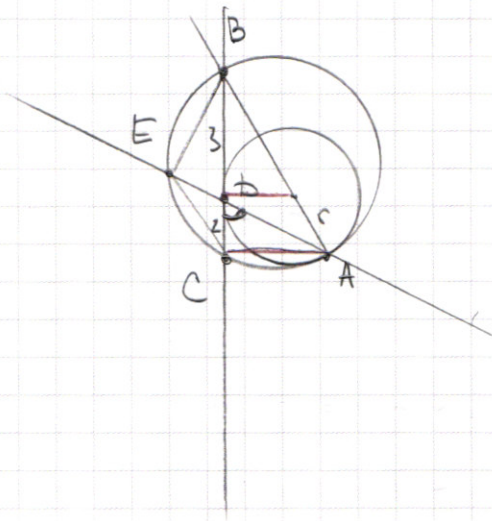
1-2
2-2 x 2

$$3x > y = 900 - 3x$$

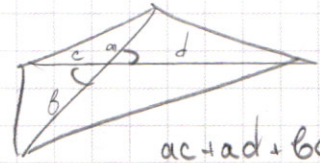
$$6x > 900$$

$$x > 150$$

$$x \in [151, 224]$$



$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{4}{5}$$



$$ac+ad+bc+bd=$$

$$ad+ind+ac=$$

$$=(c+d)(a+b)$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{5} = 1 - \frac{r}{2R}$$

$$\frac{r}{2R} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$1) 5r = 4R \Rightarrow 2R = \frac{5}{2}r$$

$$R = \frac{5}{4}r \quad 2) 3^2 + r^2 = (2R-r)^2$$

$$9 = \frac{25}{4}r^2 - r^2 = \frac{21}{4}r^2$$

$$\frac{36}{5} = r^2$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$R = \frac{45}{4}$$

$$\frac{3}{4\sqrt{6}} + \frac{4\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} = \frac{3 + 8 \cdot 6}{4\sqrt{6}} = \frac{51}{4\sqrt{6}}$$

$$67 \cdot 6 = 73$$

$$38 + 17 =$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ + 67 \\ \hline \end{array}$$

$$110 + 14 =$$

$$22 + 17 = 55$$

$$154 + 17 = 124$$

$$55 + 12 = 51$$

$$55 + 12 = 24$$

$$171$$

$$124 + 57 =$$

$$55 + 12 = 67$$

$$= 181$$

$$20 + 19 + 17 =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a \quad b \quad c \quad d$$

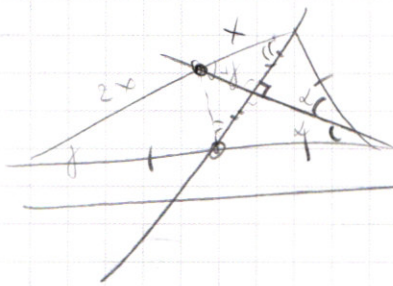
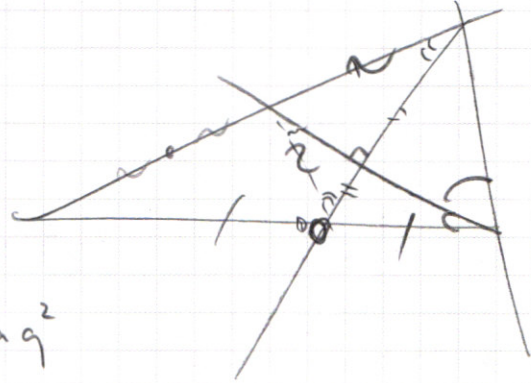
$$a; aq; aq^2; aq^3$$

$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$x^2 - 2qx + q^2 = 0$$

$$D = 4q^2 - 4q^2 = 0$$

$$x = \frac{2q \pm 0}{2} = q = aq^3 \Rightarrow 1 = aq^2$$



$$180 - 2 - 2 - \gamma$$

$$xy - 6y - x + 6 = y(x-6) - (x-6) = (x-6)(y-1)$$

$$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 =$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$(x-6)^2 = 2((y-1)^2 - 3^2) = 2((y-1-3)(y-1+3))$$

$$9v + 4v$$

$$13v$$

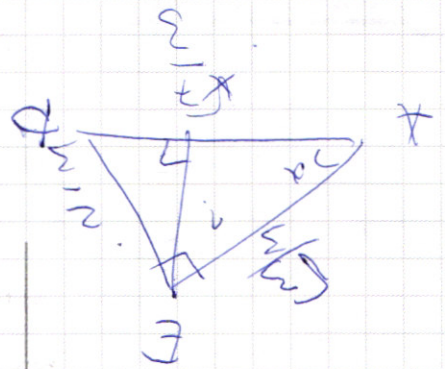
$$36v^2$$

$$u - 6v = x - 6 - 6y + 6$$

$$u - 6v = \sqrt{uv} \Rightarrow u^2 - 12uv + 36v^2 = uv \Rightarrow u^2 - 13uv + 36v^2 = 0$$

$$(u-9v)(u-4v) = 0$$

$$u^2 + 2v^2 = 18$$



$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$z = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$y = x$$

$$3 \times y = 900$$

$$y = 300$$

$$8x + y = 9000$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$y = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$x = 16 - y = 12$$

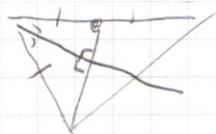
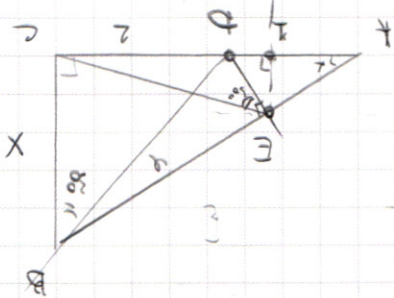
$$x = \frac{4 \cos 70^\circ \cdot y \sqrt{3}}{3}$$

$$x = \cos 70^\circ$$

$$AE^2 + ED^2 = 1$$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

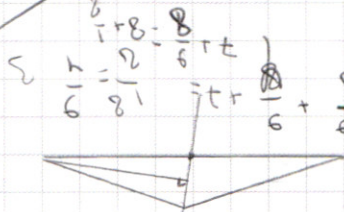
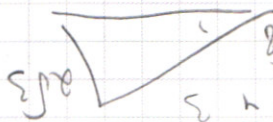
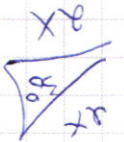
$$\frac{AE}{ED} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$2x + x + y = \sqrt{y^2 + x^2}$$

$$3x + y = z$$

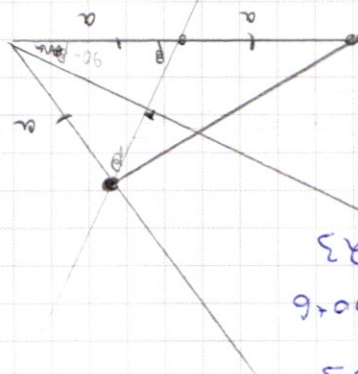
$$|6x^2 - y^2 - 12z^2|$$



$$a + 2a + b = 900$$

$$3 \times y = 900$$

$$y = 300$$



$$v = \sqrt{\frac{18}{85}}$$

$$u^2 + 2 \cdot u^2 = 8x^2$$

$$85 \sqrt{2} = 18$$

$$\frac{16}{85} = \frac{30 \cdot 6}{85}$$