МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a_6

a

$b = qa$

$c = q^2 a$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2qax + q^2 a = 0$

$x^2 + 2q x + q^2 = 0$

$D = 0$

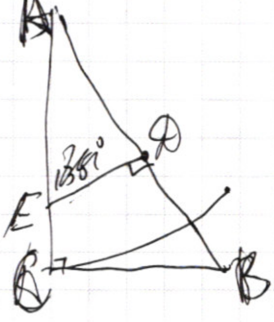
$4b^2 - 4ac = 0$

$-\frac{2b}{2a} = -q$

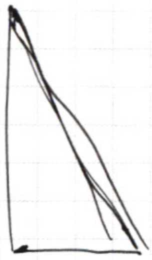
$q^3 a = -q$

$q^2 a = -1$

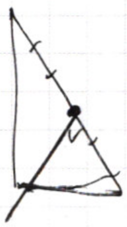
$c = -1$

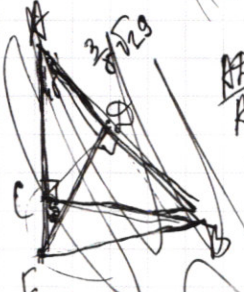


$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{3}{5} = \frac{AE}{AB}$



$AD \cdot AC = AE \cdot AB$





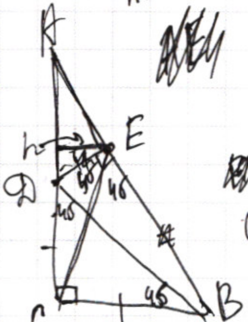
$\frac{AD}{AC}$

$\cancel{AD \cdot AB = AC \cdot AE}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{AE}{AB}$

$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{ED}{AD}$

$\angle CED = 45°$



$CD = BC$

$CD = \frac{2}{5} AC = BC$

$\operatorname{tg} = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{2}{5} AC}{AC} = 0{,}4$

$\frac{1}{2} CD \cdot h = S = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4\sqrt{29} \cdot \frac{6}{\sqrt{29}} = 1{,}2$

$\frac{ED}{AE} = 0{,}4$

$ED = 1{,}2$

$AD = 0{,}6\sqrt{29}$

$AD^2 = 0{,}16\, AE^2 + AE^2 = \frac{29}{25} AE^2$

$AD = \frac{3}{5} AC = \frac{\sqrt{29}}{5} AE$

$AD = \frac{\sqrt{29}}{5} AE = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

$AC = \frac{3}{\sqrt{29}} AE$

$AE = 3$

$CD = 0{,}4\sqrt{29}$

$h = \frac{\frac{1{,}2 \cdot 3}{2}}{0{,}6\sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{29}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{\sqrt3}=\frac{2\sqrt2}{3}$

$S=\frac12 ED\cdot BE+\frac12\cdot AC\cdot BC+\frac12\sin(90+\alpha)\cdot ED\cdot CD$

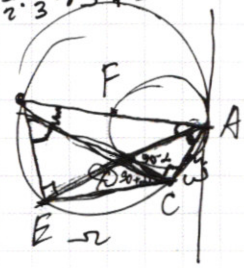
$\sin\alpha=\frac{2\sqrt2}{3}$

$\cos\alpha=\frac13$

$\sin\alpha/2=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\frac23}{2}}=\sqrt{\frac13}=\frac{1}{\sqrt3}$

$S=\frac12\cdot\sqrt3\cdot\sqrt6+\frac12\cdot\sqrt2\cdot4+\frac12\cdot\frac13\cdot\sqrt3\cdot1=$

$=S=\frac12\cdot3\sqrt2+2\sqrt2+\frac{\sqrt3}{6}$



$CD=1$

$BD=3$

$\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac13$

$\sin\angle ABC=\frac13=\cos\alpha$

$ED=\sqrt3$

$BE=\sqrt6$

$AE=\sqrt2$

$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt3$

$AB=3AC$

$9AC^2-AC^2=4^2$

$8AC^2=16$

$AC^2=2$

$AC=\sqrt2$

$9\quad 18-6$

$AB=3\sqrt2\Rightarrow R=\frac{3}{\sqrt2}$

$\frac92$

$1{,}25\cdot2$

$4{,}5\quad 4{,}5$

$BD^2=BF\cdot BA$

$BF=2(R-r)$

$9=3\sqrt2\cdot2\left(\frac{3}{\sqrt2}-r\right)$

$\frac{3}{2\sqrt2}=\frac{6}{2\sqrt2}-r$

$r=\frac{3}{2\sqrt2}$

$$\begin{cases}y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}\\2x^2+y^2-4x-4y+3=0\end{cases}$$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$(2x^2-2\cdot\sqrt2x\cdot\sqrt2+2)-2$

$2(x^2-2x+1)-2+(y^2-4y+4)-4+3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

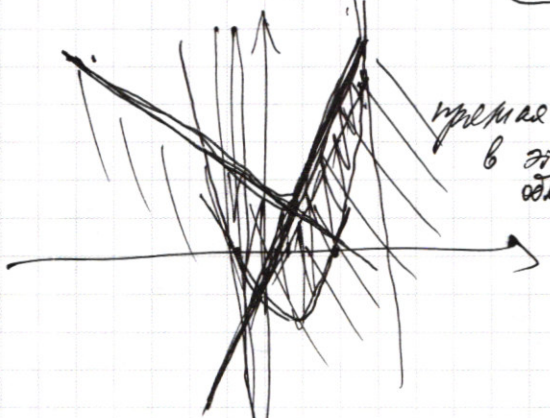
$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

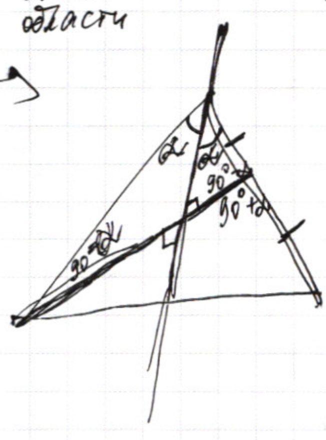
$y^2-5xy+4x^2+2x-y-2=0$

$(x-y)(4x-y)$

$4x^2-4xy-xy$

$y^2+0xy+2x^2-4x-4y+3=0$





$4x^2-4xy+y^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c, d – геом. прогрессия $\qquad c$ – ?

d – корень уравнения $ax^2+2bx+c=0$

Рассмотрим уравнение:

$D=4b^2-4ac$, а для геометрической прогрессии характерно свойство $b^2=ac$ (т.к. $a=b_1$, $b=b_1\cdot q$, $c=b_1\cdot q^2$, $d=b_1\cdot q^3$, где b_1 – первый член, а q – коэффициент прогрессии, т.е. каждый следующий член в q раз больше)

Тогда $D=0$, $x_1=x_2=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}=d$

$-\frac{b}{a}=-\frac{b_1 q}{b_1}=-q=d=\underbrace{q^3 b_1}_{\text{четвёртый член}}$

$q\neq 0$ (по определению)

тогда справедливо $q^2 b_1=-1$, а $q^2 b_1=c \Rightarrow c=-1$

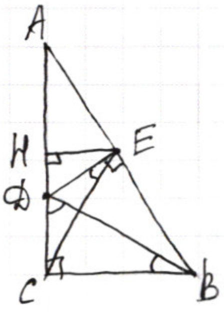
Ответ: -1.

№ 4

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, $AD:AC=3:5$, $DE\perp AB$, $\angle CED=45^\circ$

Найти: а) $\mathrm{tg}\angle BAC$

б) $S_{CED}\,\big|_{AC=\sqrt{29}}$.



Решение:

а) $\mathrm{tg}\angle BAC=\frac{BC}{AC}$

Т.к. $\angle DCB+\angle DEB=90^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow CDEB$ – вписанный (допустим, в окр. ω, которую мы рисовать не будем, чтобы не загромождать рисунок)

Тогда $\angle CED=\angle CBD=45^\circ$, т.к. они опираются на одну дугу окружности ω – на CD.

(см. стр. 2)

№ 4
(продолжение)

$\angle CBD + \angle CDB = 90°$, т.к. $\triangle CBD$ прямоугольный

$\angle CBD = 45° \Rightarrow \angle CDB = 90° - 45° = 45° = \angle CBD \Rightarrow \triangle CBD$ равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow CB = CD = AC - AD = AC - \frac{3}{5}AC = \frac{2}{5}AC$

$tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{\frac{2}{5}AC}{AC} = \frac{2}{5} = 0,4$

б) $\triangle ADE$ $(\angle AED = 90°)$:

$tg\angle BAC = \frac{ED}{AE} = 0,4$

$\cos\angle BAC = \frac{AE}{AD} = \frac{5AE}{3AC}$

$tg^2\angle BAC + 1 = \frac{1}{\cos^2\angle BAC}$

$\frac{4}{25} + 1 = \frac{1}{\left(\frac{AE}{AD}\right)^2} \Rightarrow \frac{29}{25} = \left(\frac{AD}{AE}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{AD}{AE} = \frac{\frac{3}{5}\sqrt{29}}{AE} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = 3 \Rightarrow ED = 1,2$

Проведём высоту EH в $\triangle ADE$

$EH = \frac{AE \cdot ED}{AD} = \frac{1,2 \cdot 3}{0,6\sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{29}}$
(для прямоугольного треугольника)

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot EH \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29} = 1,2$

Ответ: а) $tg\angle BAC = 0,4$
б) $S_{CED} = 1,2$

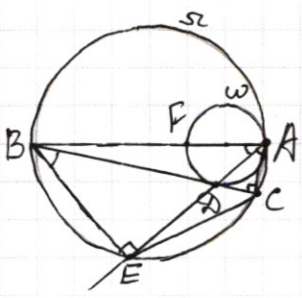
№ 5

Дано: окр. Ω касается окр. ω в точке A (внутр.), AB - диаметр Ω,

BC - хорда Ω и касательная ω (в D), $CD = 1$, $BD = 3$

Найти: R, r, S_{BACE}.

Решение:



По лемме Архимеда дуги BE и EC равны, следовательно, равны и углы $\angle BAE$ и $\angle CAE$.
Назовём $\angle BAE = \angle CAE = \alpha$. AD - биссектриса $\angle BAC \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$, AB - диаметр (см. стр. 3) $\Rightarrow \angle BCA = 90° = \angle BEA$ (опираются на диаметр)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

(продолжение)

$$\left.\begin{matrix}\frac{CD}{BD} = \frac{1}{3} = \frac{AC}{AB} \\ \angle BCA = 90^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \cos 2\alpha = \frac{1}{3}$$

$\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{AB} \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$

(углы острые) $AC = \sqrt{2}$

$AB = 2R \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (окр. Ω)

Пусть $AB \cap$ окр. ω в т. F. Тогда $BF \cdot BA = BD^2$ (теорема о касательной и секущей)

$BF = \frac{BD^2}{BA} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = AB - AF = \frac{6}{\sqrt{2}} - AF$

$AF = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2r \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ (окр. ω).

$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BED} + S_{CED}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{3}$ $\quad \sin\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{ED}{BD} = \frac{ED}{3}$ $\quad \angle EAC = \angle EBC = \alpha$ (опираются на дугу EC) $\quad ED = \sqrt{3}$

$\cos\alpha = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{BE}{BD} = \frac{BE}{3}$ $\quad BE = \sqrt{6}$

$S_{BED} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 1{,}5\sqrt{2}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot ED \cdot \sin(180^\circ - (90^\circ - \alpha)) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot ED \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0{,}5\sqrt{2}$

$S_{BACE} = 2\sqrt{2} + 1{,}5\sqrt{2} + 0{,}5\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

№6

$$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1| \qquad x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$$

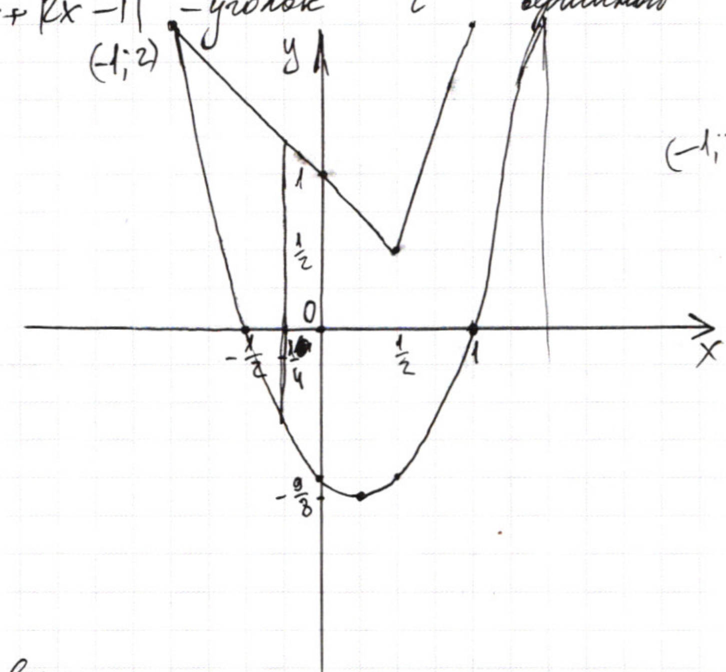
$2x^2 - x - 1$ — парабола с вершиной в точке $\left(\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$, направленная ветвями вверх и пересекающая OX в точках $(1;0)$ и $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

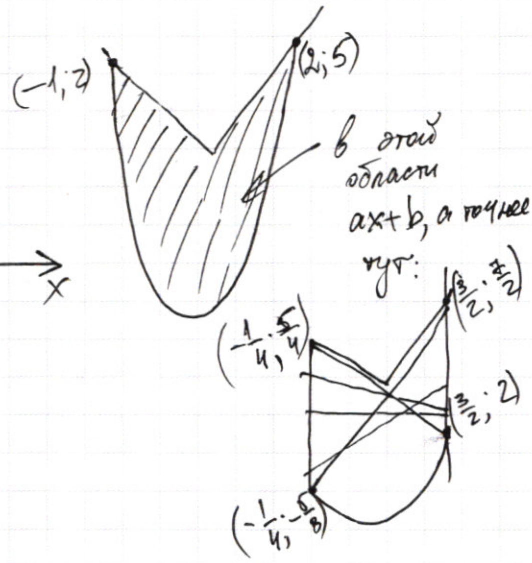
(см. стр. 4)

№6
(продолжение)

$ax+b$ — прямая, пересекающая Oy в точке $(0; b)$

$x+|2x-1|$ — уголок с вершиной в точке $(0{,}5; 0{,}5)$





Проверим прямую, проходящую через $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$:

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b \\ \frac{7}{2} = \frac{3}{2}a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{2}{8}a + b \\ \frac{28}{8} = \frac{12}{8}a + b \end{cases}$$

$$\frac{33}{8} = \frac{14}{8}a \qquad a = \frac{33}{14} \qquad b = \frac{98}{28} - \frac{99}{28} = -\frac{1}{28}$$

$$y = \frac{33}{14}x - \frac{1}{28} \qquad x = \frac{1}{2}: \quad y = \frac{32}{28} = \frac{8}{7} > \frac{1}{2}$$

Теперь сделаем всё то же самое для точек $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

$$\begin{cases} \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}a + b \\ \frac{4}{2} = \frac{3}{2}a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}a + b \\ \frac{8}{4} = \frac{6}{4}a + b \end{cases} \qquad \frac{3}{4} = \frac{7}{4}a$$

$$a = \frac{3}{7}$$

$$b = 2 - \frac{9}{14} = \frac{19}{14}$$

$$y = \frac{3}{7}x + \frac{19}{14} \qquad x = \frac{1}{2}: \quad y = \frac{22}{14} > \frac{1}{2}$$

Так как на крайних значениях решений нет, то их не окажется и в промежутках. Таким образом, a и b, удовлетворяющих условию, нет.

Ответ: a и b не существуют

(см. стр. 5)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

$$xy-2x-y+2=x(y-2)-(y-2)=(x-1)(y-2)$$

$$2(x^2-2x+1)-2+(y^2-4y+4)-4+3=0$$

$$=2(x-1)^2+(y-2)^2-3$$

заменим $x-1=u$, $y-2=v$ $\quad v-2u=y-\cancel{2}-2x+\cancel{2}=y-2x$

при условии, что $\begin{cases} uv\geq 0 \\ v\geq 2u \end{cases}$

$$\begin{cases} v-2u=\sqrt{uv} \\ 2u^2+v^2-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} v^2-4uv+4u^2=uv \\ 2u^2+v^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2-5uv+4u^2=0 \\ 2u^2+v^2-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (v-u)(v-4u)=0 \\ 2u^2+v^2-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=4u \end{array}\right. \\ 2u^2+v^2-3=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2u^2+u^2=3 \\ v=u \end{cases} \\ \begin{cases} 2u^2+16u^2=3 \\ v=4u \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=\pm 1 \\ v=u \end{cases} \\ \begin{cases} u=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ v=4u \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-1 \\ v=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=+1 \\ v=+1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ v=-\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \\ \begin{cases} u=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ v=\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \end{array}\right. \\ uv\geq 0 \\ v\geq 2u \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-1 \\ v=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ v=\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=-1 \\ y-2=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y-2=\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=2+\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ или $\left(\begin{array}{l} x=1+\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=2+\frac{4}{\sqrt{6}} \end{array}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

$1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$

$f(x/y) < 0$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(\frac{1}{y}) < -f(x)$

Если x не просто число, то его можно представить в виде $x = p \cdot z$, если z — составное, то его можно представить тоже через простое число, пока не останется составных чисел

(простое (обязательно))

$f(\frac{1}{y}) < -f(p) - f(z)$

Тогда

$f(\frac{1}{y}) < -[p_1/2] - [p_2/2] - \ldots$

при этом $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots$

$f(\frac{1}{y}) + f(2y) = f(2) = 1$

$1 - f(2y) < -[p_1/2] - [p_2/2] - \ldots$

$f(2y) - 1 > [p_1/2] + [p_2/2] + \ldots$

$f(2y) > 1 + [p_1/2] + [p_2/2] + \ldots$

$f(2) + f(y) > 1 + [p_1/2] + [p_2/2] + \ldots$ ($f(2) = 1$)

$f(y) > [p_1/2] + [p_2/2] + \ldots$ $\quad f(y) > f(x)$

Пусть $y = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots$

тогда $[n_1/2] + [n_2/2] + \ldots > [p_1/2] + [p_2/2] + \ldots$

Выразим числа от 2 до 21 через простые делители ($f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$)

в скобках сумма

$2=2$ (2)
$3=3$ (3)
$4=2\cdot2$ (4)
$5=5$ (5)
$6=2\cdot3$ (5)
$7=7$ (7)
$8=2\cdot2\cdot2$ (6)
$9=3\cdot3$ (6)
$10=2\cdot5$ (7)
$11=11$ (11)
$12=2\cdot2\cdot3$ (7)
$13=13$ (13)
$14=2\cdot7$ (9)
$15=3\cdot5$ (8)
$16=2\cdot2\cdot2\cdot2$ (8)
$17=17$ (17)
$18=2\cdot3\cdot3$ (8)
$19=19$ (19)
$20=2\cdot2\cdot5$ (9)
$21=3\cdot7$ (10)

(см. стр. 7)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

(продолжение)

$f(x) = 2^1, 3^1, 4^1, 5^2, 6^2, 7^3, 8^3, 9^2, 10^1, 11^1, 13^1, 17^1, \cancel{19}$

$f(y) = 3^1, 4^1, 5^2, 6^2, 7^3, 8^3, 9^2, 10^1, 11^1, 13^1, 17^1, 19^1$

$12^1\cdot 11^1\cdot 10^1\cdot 9^2\cdot 8^3\cdot 7^3\cdot 6^3\cdot 5^2\cdot 4^1\cdot 3^1\cdot 2^1\cdot 1^1 = 12!\cdot 9\cdot 8\cdot 49\cdot 36\cdot 5 =$

$f(x)=2$ $f(x)=3$ $f(x)=4$

$= 12!\; 3^2\cdot 2^3\cdot 7^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 5 = 12!\cdot 2^5\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^2 = \frac{12!\cdot 9!}{4!}\cdot 56 = \frac{12!\,9!}{3}\cdot 7 =$

$= 12!\cdot 8!\cdot 7\cdot \frac{9}{3} = 12!\cdot 8!\cdot \overset{7\cdot 3}{\cancel{63}} = \overset{21\cdot 12!\cdot 8!}{\cancel{126\cdot 12!\cdot 7!}}$

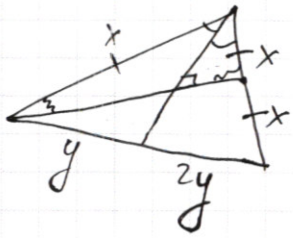
столько пар $(x;y)$ при $x \geq 2$

$+$ случаев для $x=1$

$+(13+7)$

Ответ: $\cancel{126\cdot 12!\,7!}$ $21\cdot 12!\cdot 8! + 20$

№2



1. остроугольный

(для любого треугольника медиана не может совпадать с биссектрисой, т.к. они уже будут параллельны.)

$3y = z$

$z + 3x = 1200 \Rightarrow z \vdots 3$

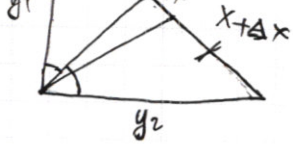
$x + y = 400$

$3y < 3x$ (неравенство треугольника)

$y < x$

x	y
399	1
398	2
...	...
201	199

199 треугольников $+ 299$



2. прямоугольный

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x-\Delta x}{x+\Delta x}$

$y_1 + y_2 + 2x = 1200$

$\underbrace{y_1\cdot\frac{2x}{x+\Delta x}}_{>2x} + 2x = 1200$ ←

599 1

301 299 } 299+ +199

(см. стр. 8)

№2 (продолжение)

3. тупоугольный

все то же самое, что и для 1. и 2.

Итого: $3\cdot(299+199)=3\cdot(500-2)=1500-6=1494$

Ответ: 1494.