МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) $a = z$; $b = zq$; $c = zq^2$ (три члена геом. прогрессии) $\Rightarrow b^2 = ac$ / $x^2q^2 = x \cdot xq^2$

2) $ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$; $\Rightarrow D = 0$, т.к. $(b^2 - ac) = 0$ (п.1)

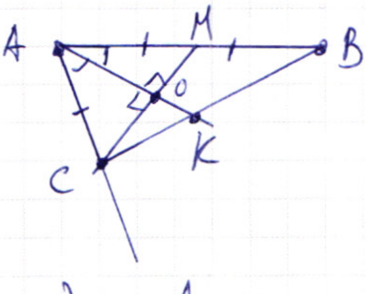
3) $x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ - корень уравнения; $x = \frac{-zq}{z} = -q$ - ~~четвер~~, но также x - четвертый член геом. прогрессии $\Rightarrow x = zq^3 \Rightarrow -q = zq^3 \,|:q \Rightarrow -1 = zq^2$

$zq^2 = c = -1$ (- третий член прогрессии);

Ответ: -1

№2;

1) a, b, c - стороны треугольника, $(a, b, c \in \mathbb{N})$;



Введем ΔABC; AK - бисс.; CM - медиана;

т. O - точка пересечения бисс. и медианы;

$AO \perp CO \Rightarrow$ $\angle AOC = 90^\circ$ (по условию), $\angle AOM = 90^\circ$

2) ΔAOM и ΔAOC - равны по 2м углам и стороне $\begin{cases} \angle BAK = \angle KAC \text{ (т.к. } AK\text{-бисс)} \\ AO \text{ - общая сторона} \\ \angle AOM = \angle AOC = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow AM = AC$

3) Пусть $a = CB$; $b = AC$; $c = AB$;

$AB = 2AM$, т.к. CM-медиана; $AC = AM$; $\Big\} \Rightarrow 2b = c$

4) $P = 1200 = a + b + c = a + 3b$; $a + 3b = 1200$

5) Чтобы получился треуг, то нужно, чтобы любые 2 стороны были больше третьей; $\Rightarrow$ ① $CB + AC > AB \to (a + b > c) \to (a + b > 2b) \to (a > b)$

② $CB + AB > AC$, это всегда выполн., т.к. $AB > AC$

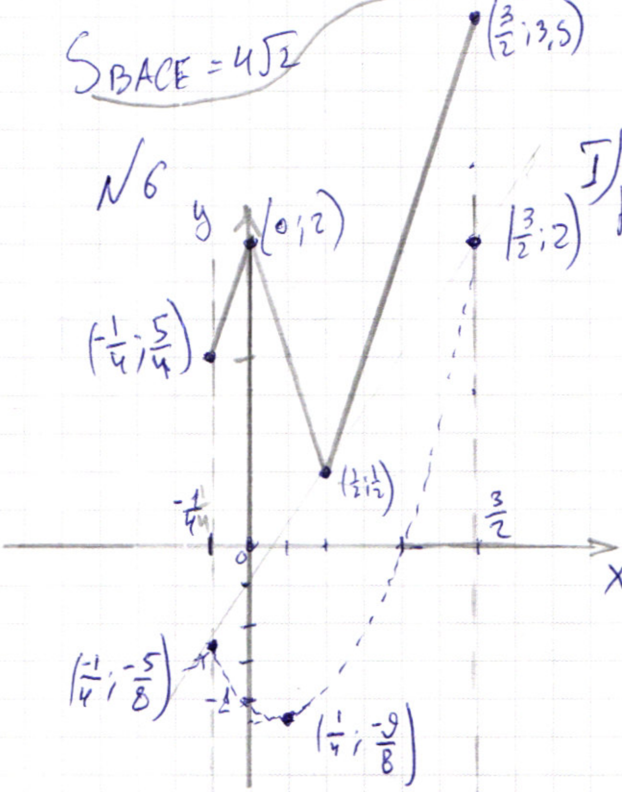
(продолжение (2 стр.) №3)

$S_{BACE} = S_{BEO} + S_{BDA} + S_{ACD} + S_{DEC} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R_{\Omega} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ – радиус большой окр; $R_{\omega} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ – малой окр.

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

№6



I) Нарисуем графики функций;

$y_1 = 2x^2 - x - 1$; – гр. парабола. ветви вверх

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{+1}{4}$

$y_0 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$

$\Rightarrow x_0; y_0$ – нашли т(y_1) по оси y.

1) y_1, при $x = -\frac{1}{4}$;

$y = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = \frac{-5}{8}$

2) y_1, при $x = \frac{3}{2}$; $y = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$

II) $y_2 = x + |2x - 1|$; y_0 – когда модуль $= 0 \Rightarrow 2x = +1$; $x_0 = \frac{+1}{2}$

$y_0 = \frac{1}{2}$; При увел x отн$\left(\frac{1}{2}\right)$ график будет возрастать; $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y_2 = 1,5 + 2 = 3,5$

Но при $x < 0$, график будет двигаться по другому.

$x = -\frac{1}{4}$; $y_2 = -\frac{1}{4} + \left|-\frac{1}{2} - 1\right| = -0,25 + 1,5 = 1,25$

III) Соединим т$\left(-\frac{1}{4}; \frac{-5}{8}\right)$ и т. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ – прямой, т.к. тогда условие удовл.

$y = kx + b$; $\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}k + b \\ 2 = \frac{3}{2}k + b \end{cases}$; $-\frac{5}{8} - 2 = -\frac{1}{4}k - \frac{3}{2}k$; $\frac{-5-16}{8} = \frac{-1-6}{4}k$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение №2) ③ $AC + AB > CB \Rightarrow 3b > a$

Итого: $b < a < 3b$; $4b < 3b + a < 6b$; $4b < 1200 < 6b$

$\begin{cases} b < a < 3b \\ a + 3b = 1200 \end{cases}$

$\Downarrow$

$b_{max} = \cancel{300}$ 299;

$b_{min} = 201$;

б) $b \in [201; 299]$, $\in N$

Если b - принадлежит данном отрезку, то „a" находится единственным образом $a = 1200 - 3b$

$\Rightarrow$ Надо посчитать способов выбрать „b" А таких способов выбрать = $299 - 201 + 1 = 99$;

Ответ: 99 способов составить треугольники с $P = 1200$;

№3; $\sqrt{xy - 2x - y + 2} = \sqrt{y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(y-2)(x-1)}$, ОДЗ: $\left[\begin{cases} x < 1 \\ y < 2 \end{cases} \begin{cases} x > 1 \\ y > 2 \end{cases}\right.$

Пусть; $x - 1 = u$; $y - 2 = v$; $\Rightarrow v - 2u = y - 2 - 2x + 2 = y - 2x$

$\Downarrow$ $\left[\begin{cases} u < 0 \\ v < 0 \end{cases} \begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases}\right.$

$\{ v - 2u \geq 0$

1) $v - 2u = \sqrt{vu}$;

$u^2 = x^2 - 2x + 1$; $2u^2 = 2x^2 - 4x + 2$

$v^2 = y^2 - 4y + 4$;

2) $2u^2 + v^2 - 3 = 0$

$2u^2 + v^2 = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6$

$\begin{cases} v - 2u = \sqrt{vu} \quad |^2 \\ 2u^2 + v^2 - 3 = 0 \end{cases}$

3) $v^2 - 4uv + 4u^2 = vu \Rightarrow v^2 + 4u^2 = 5vu \Rightarrow v^2 + 2u^2 = 5vu - 2u^2$

$\Rightarrow 5vu - 2u^2 - 3 = 0$ (подставим во второе уравн.)

$2u^2 - 5vu + 3 = 0$; $D = 25v^2 - 24$ $\Rightarrow 25v^2 - 24 \geq 0$; $v^2 \geq \frac{24}{25}$; $v \in (-\infty; -\frac{2\sqrt6}{5}] \cup [\frac{2\sqrt6}{5}; +\infty)$

$y \in (-\infty; -\frac{2\sqrt6}{5} + 2] \cup [\frac{2\sqrt6}{5} + 2; +\infty)$

(продолжение №5)

6) $\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опир. на диаметр.

$\triangle BDO_w \sim \triangle BCA$ (по 2м углам) $\left.\begin{matrix}\angle B\text{-общий}\\ \angle BDO_w = \angle BCA = 90^\circ\end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_w}{BA}$

$\frac{3}{4} = \frac{BO_w}{BA}$; $3BA = 4BO_w$; $3 \cdot 2R_\Omega = 4(2(R_\Omega - R_w) + R_w)$

$6R_\Omega = 4(2R_\Omega - R_w)$; $6R_\Omega = 8R_\Omega - 4R_w$; $2R_\Omega = 4R_w$; $R_\Omega = 2R_w$

$R_w = \frac{1}{2}R_\Omega$

7) Вспомним п.1. $4R_\Omega^2 - 4R_\Omega R_w - 9 = 0$

$4R_\Omega^2 - 4R_\Omega \cdot \frac{1}{2}R_\Omega - 9 = 0$; $4R_\Omega^2 - 2R_\Omega^2 = 9$; $2R_\Omega^2 = 9$; $R_\Omega^2 = \frac{9}{2}$

$R_\Omega = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $R_w = \frac{3}{2\sqrt{2}}$; $R_\Omega - R_w = \frac{1}{2}R_\Omega = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

б) (п.5) $DA^2 = 4 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{4\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{81}{13,5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{81}{27} \cdot \frac{2}{1} = 3$

$DA = \sqrt{3}$;

1) $AC^2 = DA^2 - DC^2$; $AC^2 = 2$; $AC = \sqrt{2}$

2) $S_{\triangle DAC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{BCA} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $\Rightarrow S_{BDA} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

3) $\triangle ADB \sim \triangle CDE$ (п.2а) $\Rightarrow S_{BDA} = k^2 S_{EDC}$; $k = \frac{AD}{DC} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot S_{EDC} \Rightarrow S_{EDC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) (п.2а) $DE = \frac{3}{DA} = \sqrt{3}$; $BE^2 = BD^2 - ED^2$; $BE^2 = 9 - 3 = 6$; $BE = \sqrt{6}$

$S_{BED} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение №3)

$u_1 = \frac{5v + \sqrt{25v^2-24}}{4}$; $u_2 = \frac{5v - \sqrt{25v^2-24}}{4}$;

1) $u_1 > 0$, когда $5v + \sqrt{25v^2-24} \geq 0$; $\sqrt{25v^2-24} > -5v \Rightarrow \left[\begin{cases} -5v<0 \\ 25v^2-24>0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} v>0 \\ v>\frac{2\sqrt6}{5}\end{cases}\right.$; $\begin{cases} -5v>0 \\ 25v^2-24>25v^2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

$v > \frac{2\sqrt6}{5}$;

$u_1 < 0 \Rightarrow 5v + \sqrt{25v^2-24} < 0$; $\sqrt{25v^2-24} < -5v \Rightarrow \begin{cases} 25v^2-24>0 \rightarrow v<\frac{-2\sqrt6}{5} \\ -5v>0 \rightarrow v<0 \\ 25v^2-24<25v^2 \rightarrow \text{любое} \end{cases}$

$v < \frac{-2\sqrt6}{5}$

2) $u_2 > 0$; $5v - \sqrt{25v^2-24} \geq 0$; $5v > \sqrt{25v^2-24} \Rightarrow \begin{cases} 25v^2-24>0 \\ 5v>0 \\ 25v^2 > 25v^2-24 \end{cases}$ $v > \frac{2\sqrt6}{5}$

$v > \frac{2\sqrt6}{5}$

$u_2 < 0 \Rightarrow v < \frac{-2\sqrt6}{5}$

~~uuuu~~ $v - 2u = \sqrt{uv^2} \Rightarrow$

1) $v - 2u \geq 0 \Rightarrow$ 1*) $v - 2u_1 \geq 0$; $v - \frac{5v + \sqrt{25v^2-24}}{2} \geq 0$; $2v - 5v - \sqrt{25v^2-24} \geq 0$;

$-3v \geq \sqrt{25v^2-24} \Rightarrow \begin{cases} -3v \geq 0 & v \leq 0 \\ 25v^2-24 \geq 0 & v^2 \geq \frac{24}{25} \\ 9v^2 \geq 25v^2-24 & \rightarrow 24 \geq 16v^2; \end{cases} \Big| \rightarrow v \leq \frac{-2\sqrt6}{5}$ $\frac{24}{16} \geq v^2$; $\sqrt{\frac32} \geq v \geq -\sqrt{\frac32}$

~~$v \in \left[-\sqrt{\frac32}; \frac{-2\sqrt6}{5}\right]$, когда u_1 - существует.~~ $v \in \varnothing \Rightarrow u_1$ - не сущ.

2*) $v - 2u_2 \geq 0$; $v - \frac{5v - \sqrt{25v^2-24}}{2} \geq 0$; $2v - 5v + \sqrt{25v^2-24} \geq 0$;

$\sqrt{25v^2-24} \geq 3v \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3v \leq 0 & v\leq 0 \\ 25v^2-24 \geq 0 & v^2 \geq \frac{24}{25} \end{cases} \Big| \rightarrow v \leq \frac{-2\sqrt6}{5} \\ \begin{cases} 3v \geq 0 \\ 25v^2-24 \geq 9v^2 \end{cases} \Big| \begin{matrix} v\geq 0 \\ 16v^2 \geq 24 \end{matrix} \Big| \rightarrow \begin{matrix} v \geq 0 \\ v^2 \geq \frac32 \end{matrix} \Big| \rightarrow \sqrt{\frac32} \leq v \end{array}\right.$

$v \in \left(-\infty; \frac{-2\sqrt6}{5}\right] \cup \left[\sqrt{\frac32}; +\infty\right)$, когда u_2 - существ.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

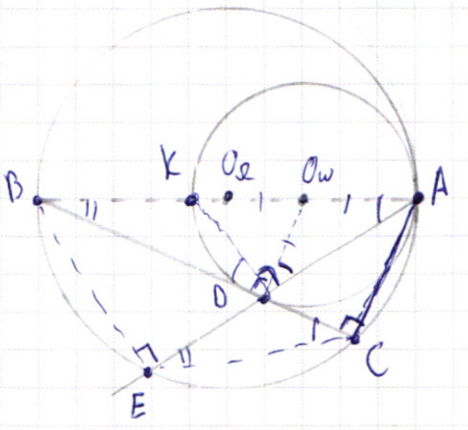
(продолжение N 4) ; $S_{EDC} = EH \cdot \frac{1}{2} \cdot DC$

$DC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$; $EH = \frac{3}{5\sqrt{1,16}} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5\sqrt{1,16}} = \frac{6\sqrt{29}}{25 \cdot 1,16}$

$S_{EDC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{6\sqrt{29}}{25 \cdot 1,16} = \frac{12 \cdot 29}{11,6 \cdot 25} = \frac{29}{25} \cdot \frac{120}{116} = \frac{29}{25} \cdot \frac{60}{58} = \frac{29}{25} \cdot \frac{30}{29} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: $tg = 0,4$; $S = 1,2$

N5



Найти: R_Ω ; R_w ; S_{BACE} ; $CD = 1$; $BD = 3$

Решение:

а) 1) $BA \cap W = т.K$

$BK = 2(R_\Omega - R_w) = 2R_\Omega - 2R_w$

$BA = 2(R_\Omega - R_w) + 2R_w = 2R_\Omega$

т. B и W ; $BD^2 = BK \cdot BA$ (т. о кас. и секущей к окр)

$9 = 4R_\Omega^2 - 4R_\Omega R_w$

2) $\angle ABC = \angle AEC$ – опир. на 1 дугу
$\angle BAE = \angle BCE$ – опир. на 1 дугу
$\Rightarrow \triangle BDA \sim \triangle EDC$ (по 2м углам)

$\Rightarrow \frac{BD}{ED} = \frac{DA}{DC}$; $BD \cdot DC = DA \cdot ED$

$3 = DA \cdot DE$; $DA = \frac{3}{DE}$; $DE = \frac{3}{DA}$

3) $\triangle BK$, $\angle KDB = \angle KAD$ (т.к. угол между кас. и сек.) ; $\angle KDB = \angle BCE$

4) $\triangle BKD \sim \triangle EDC$ (по 2м углам) $\angle KBD = \angle DEC$, $\angle KDB = \angle DCE$ $\Rightarrow \frac{BK}{ED} = \frac{KD}{DC}$

$KD = \frac{BK}{ED} \cdot DC = \frac{BK}{ED} = \frac{DA \cdot BK}{3} = \frac{DA \cdot 2(R_\Omega - R_w)}{3}$

5) DO_w – медиана $\triangle KDA$, но $O_wD = O_wK$ $\Rightarrow \triangle KDA$ – прямоуг (т.к. медиана равна половине стороны) $\Rightarrow KD^2 + DA^2 = KA^2$

$DA^2 \left(\frac{4(R_\Omega - R_w)^2}{9} + 1\right) = 4R_w^2$; $DA^2 = 4R_w^2 : \left(\frac{4(R_\Omega - R_w)^2 + 9}{9}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение (2стр.) №3)

$-\sqrt{\frac{3}{2}} \le v \le \frac{-2\sqrt{6}}{5}$ $\quad u_1 = \frac{5v + \sqrt{25v^2 - 24}}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{-5\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{27}{2}}}{4} \ge u_1 \ge \frac{-2\sqrt{6}}{4}$

$-\sqrt{\frac{3}{2}} \le y-2 \le \frac{-2\sqrt{6}}{5}$ $\quad x = u_1 + 1;$

1) $-\sqrt{\frac{3}{2}} + 2 \le y \le \frac{-2\sqrt{6}}{5} + 2$ $\quad \frac{-2\sqrt{6}}{4} + 1 \le x \le \frac{-2\sqrt{\frac{3}{2}}}{4} + 1$ $\quad \frac{-2\sqrt{\frac{3}{2}}}{4} \ge u_1 \ge \frac{-2\sqrt{6}}{4}$

$\le u_1 \le \frac{5\left(\frac{-2\sqrt{6}}{5}\right)}{4} = \left(\frac{-2\sqrt{6}}{4}\right)$

2) $v \le \frac{-2\sqrt{6}}{5}$ $\quad v \ge \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\quad u_2 = \frac{5v - \sqrt{25v^2 - 24}}{4}$

$y-2 \le \frac{-2\sqrt{6}}{5}$ $\quad$ ОДЗ: $v \ge \frac{2\sqrt{6}}{5}$

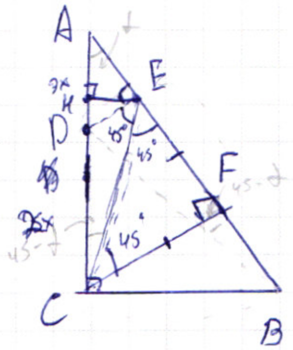
① $y \le \frac{-2\sqrt{6}}{5} + 2$, ② $y \ge \frac{2\sqrt{6}}{5} + 2$ $\quad$ ① $u_2 \le \frac{-2\sqrt{6}}{4}$ $\quad$ ② $u_2 \ge \frac{2\sqrt{6}}{4}$

$x \le \frac{-2\sqrt{6}}{4} + 1$ $\quad x \ge \frac{2\sqrt{6}}{4} + 1$

Ответ: $\begin{cases} y \le \frac{-2\sqrt{6}}{5} + 2 \\ x \le \frac{-2\sqrt{6}}{4} + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y \ge \frac{2\sqrt{6}}{5} + 2 \\ x \ge \frac{2\sqrt{6}}{4} + 1 \end{cases}$

№4 $180-135=45$

$AC=\sqrt{29}$



Найти: $tg(BAC)$; S_{CED} -?

Решение:

а) 1) $\angle DEA = 90°$ (т.к. $DE \perp AB$) $\Rightarrow \angle DEB = 90°$ (смежные)

$\Rightarrow \angle DEC = 45°$ (по усл.) $\Rightarrow \angle DEB = \angle DEC + \angle CEB \Rightarrow \angle CEB = 45°$

2) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (по 2 равн. углам) ($\angle A$ - общ. $\angle AED = \angle ACB = 90°$)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{ED}{CB}$; $AC \cdot AD = AB \cdot AE$;

3) $CF \perp AB$, $DE \perp AB$ $\Rightarrow DE \parallel CF$; $\angle DEC$ и $\angle ECF$ - накрест леж. $\Rightarrow \angle ECF = 45° = \angle DEC$

4) $\triangle ECF$ - Р/б - т.к. ($\angle CEF = \angle ECF$) $\Rightarrow CF = EF = y$

5) По т. Фалеса $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DC}{EF}$ (т.к. $DE \parallel CF$) $\Rightarrow AE = 1{,}5\, EF = 1{,}5y$

6) $AF = 2{,}5y$, $CF = y$; $tg(BAC) = \dfrac{CF}{AF} = \dfrac{y}{2{,}5y} = \dfrac{1}{2{,}5} = \dfrac{1}{\frac{5}{2}} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

б) 1) $\triangle AED \sim \triangle AFC$ (по 2 углам) ($\angle A$ - общ. $\angle AED = \angle AFC = 90°$)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{ED}{FC}$; $\dfrac{1{,}5y}{2{,}5y} \cdot y = ED \Rightarrow ED = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{5} y = \dfrac{3}{5} y$

2) $EH \perp AD$; $tg\,\alpha = 0{,}4 \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1{,}16 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1{,}16}$

$\Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{0{,}16}{1{,}16}$; $\sin\alpha = \dfrac{0{,}4}{\sqrt{1{,}16}} = \dfrac{EH}{AE}$

$EH = \dfrac{0{,}4}{\sqrt{1{,}16}} \cdot AE = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{2} y \dfrac{1}{\sqrt{1{,}16}} = \dfrac{3}{5\sqrt{1{,}16}} y$

$S_{\triangle AED} = 3x \cdot \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{5}\sqrt{1{,}16}} \cdot y \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cancel{3}}{2} y \cdot \dfrac{3}{\cancel{5}} y = \dfrac{1}{2} EA \cdot ED = \dfrac{1}{2} EH \cdot AD$

$\dfrac{2x}{\sqrt{1{,}16}} = y$; $x = \dfrac{1}{5}\sqrt{29}$; $y = \dfrac{2\sqrt{29}}{5\sqrt{1{,}16}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(№6) $-\frac{21}{8} = \frac{-7}{4}k$; $-\frac{21}{8} \cdot \frac{4}{-7} = k$; $k = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$

b: $2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + b$; $b = 2 - \frac{9}{4}$; $b = -\frac{1}{4}$;

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ - уравнение прямой; - которая находится ниже всех; Но эта прямая задевает второй графиик, т.к. если $y = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ - верно $\Rightarrow$ это единственная прямая, $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$; ~~касательная~~

Ответ: $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$

$-5\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{27}{2}}$ и $\left(-2\sqrt{6}\right)$

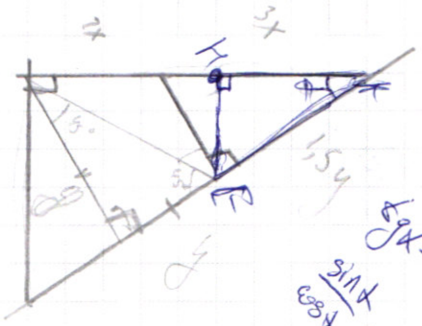
$-5\sqrt{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}$

$-2\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\frac{3}{2}$ $\frac{4\cdot 6}{5}$

$\frac{3}{2}$ и $\frac{24}{5}$



$tg\, t = 0{,}4$

$\frac{\sin t}{\cos t} = 0{,}4;$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + tg^2 t$

$1{,}16 = \frac{1}{\cos^2 t};$

$\cos^2 t = \frac{1}{1{,}16};$

$\cos t = \sqrt{\frac{1}{1{,}16}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}16}}$

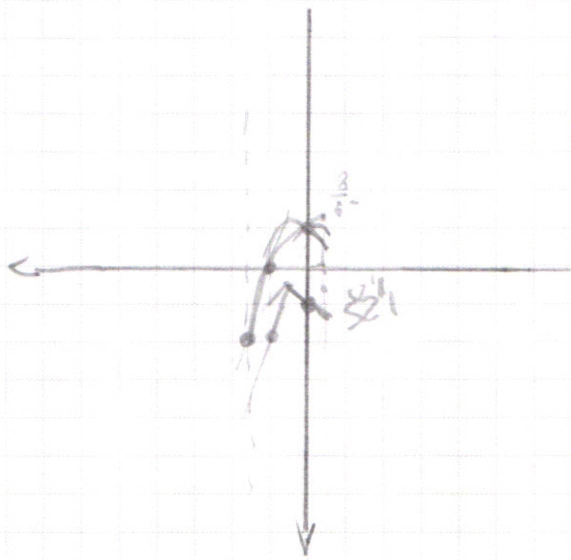
$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{1{,}16} = \frac{1{,}16 - 1}{1{,}16} = \frac{0{,}16}{1{,}16}$

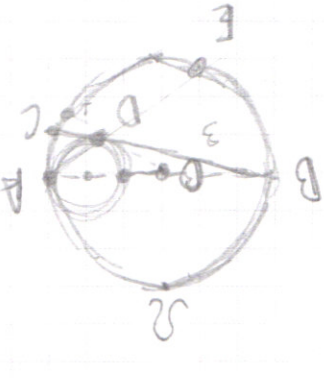
$\sin t = \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}16}}$

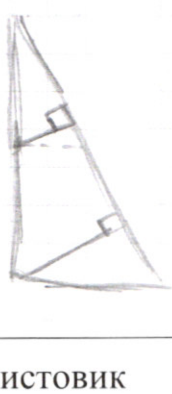
$\frac{EH}{HE} = \sin t;$

$EH = 1{,}5y \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}16}} = \frac{3}{5}y \cdot \frac{1}{\sqrt{1{,}16}}$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$







☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a;b;c$

$ax^2+2bx+c=0;$

$D=4b^2-4ac=4(b^2-ac);$

$\Rightarrow D=0$

$a=x$, $b=xq$, $c=xq^2$

$b^2=ac$

$x^2q^2=x^2q^2$

$a<b+c$;

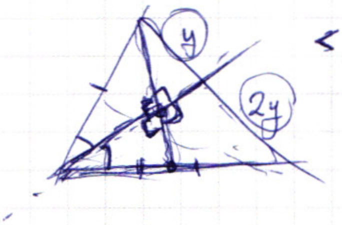
$a+b+c=1200$

$<y+2y$

201 - 1

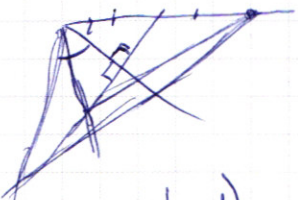
102 - 2

299 - 99



$(y-2x)^2+(y+2x)=xy+2$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$



$y-2x=t;$

$t^2=y^2+4x^2-4xy$

$y(x-1)+2(-x+1)$

$y(x-1)-2(x-1)$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$(x-1)=u$

$(y-2)=v$

$v=\sqrt{uv}+2u$

$\begin{cases} 2x^2+y^2-4(x+y)+3=0 \\ y-2x=\sqrt{y(x-1)} \end{cases}$

$\begin{cases} v-2u=\sqrt{uv} \\ 2u^2+v^2-3=0 \end{cases}$

$v^2+4u^2-4uv=uv$

$v^2+4u^2=5uv$

$5uv-2u^2-3=0$

$2u^2=2(x^2-2x+1)=2x^2-4x+2$

$v^2=y^2-4y+4$

$2x^2+y^2-4x-4y+6$

$v^2=3-2u^2$

$v^2-4uv+4u^2=uv$

$v^2-5uv+4u^2=0;$

$v^2=4u^2+4u\sqrt{uv}+uv$

$3-2u^2-5uv+4u^2=0;$ $3+2u^2-5uv=0$

$2u^2-5vu+3=0$

$3-2u^2=4u^2+4u\sqrt{uv}+uv$

$0=6u^2+4u\sqrt{uv}+uv-3$

$25v^2=25(3-2u^2)=75-50u^2=51-50u^2$

$D=25v^2-4\cdot3\cdot2=25v^2-24$

$(6u^2+uv-3)(6u^2+uv-3)$

$16u^3v=36u^4+6u^3v-18u^2+6u^3v+u^2v^2-3uv-18u^2-3uv+9$

$4u^3v=36u^4-36u^2+u^2v^2-6uv+9$

$u=\frac{+5v+\sqrt{25v^2-24}}{4}$

$\frac{-5\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{25\cdot\frac{3}{2}-24}}{4}$

$\frac{-5\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{27}{2}}}{4}$

$uv(6+4u^2)=34u^4-33u^2+9$

$u^2v^2=u^2(3-2u^2)=3u^2-2u^4$

$f(x)>\sqrt{g(x)}$

$g(x)\geq0,$

$f(x)\geq0;$

$f(x)^2>g(x)$

$u(5v-2u)=3;$ $24=2\cdot2\cdot6$

$\sqrt{f(x)}>g(x)$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\geq0 \\ g(x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geq0 \\ f(x)>g(x)^2 \end{cases}\end{array}\right.$

25

$25+12,5=37,5$

-24

$13,5$

$\frac{27}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)