МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) ~~Пусть~~ Т.к a, b, c - ~~член~~ первые 3 члена ~~в~~ геометрической прогрессии, то пусть $b = aq$; $c = ~~q~~ aq^2$, тогда
пусть d - четвёртый член прогрессии, тогда $d = aq^3$

2) $ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

~~$D = a^2q^2 - 4a^2q^2 = -3a^2q^2$~~

~~$D = 4a^2q^2 - 4a$~~

$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$

$a(x+q)^2 = 0$

$a = 0$ или ~~a~~ $(x+q)^2 = 0$

$a = 0$ ⇓ ~~$d = 0$~~ $b = 0$ $c = 0$ $d = 0$

(Заметим, что если ~~при~~ $a = 0$; $b = 0$; $c = 0$, то $d = 0$ - корень $ax^2 + 2bx + c = 0$)

~~$x =$~~ $x + q = 0$

$x = -q$

⇓

$d = -q$

$aq^3 = -q$

$a~~q~~q^2 = -1$

$c = -1$

Ответ: 0 или -1

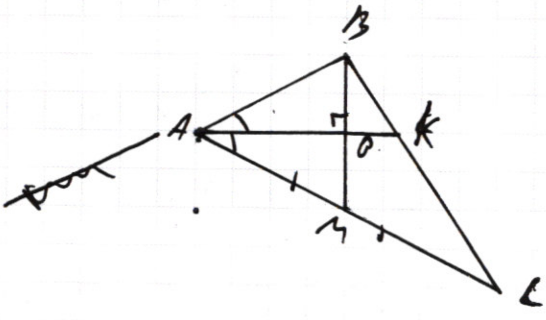
№2

$\triangle ABC$; AK - бис.

BM - медиана

$AK \perp BM$

$S_{ABM} = 1200$



$r = \varepsilon R$

$R = 2r + 1$

$2(R-r) + 2R$

$4(R-r)\cdot R =$

$ax^2 + bx + c = 0$

α

$\frac{3}{2}x$

$= y\varepsilon \cdot r^2$

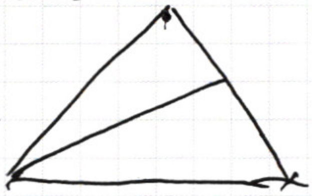
$a,\ aq$

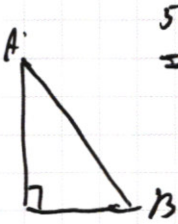
$ax^2 + aqx + aq^2\ c$

$1200 = 100 \cdot 12 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3 =$

$= 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

$5 \cdot 2 \cdot 3 =$





$x \vdots 2 \quad ; y \vdots 3$

$x\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\alpha} = 1200 - \frac{3}{2}x$

$x\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\alpha}\right) = 1200$

$\frac{3}{2} + \cdot$

$\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4} - x^2 \cdot \cos\alpha}$

$\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\alpha}$ - целое

$\cos\alpha = 1$

α_1

$2x^2 - 9xy + 6x + 5y - 5 = 0$

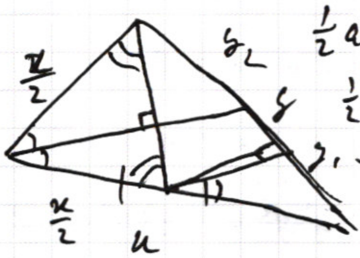
$\frac{3}{2}x + x\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\alpha} = 1200$

$x + \frac{3}{2} + \cos$

$x\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\alpha} = y$

x

$2x^2 - x(5y - 6) + y - 5 = 0$



$\frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$

$\frac{1}{2}ac \cdot \sin\alpha$

$\frac{1}{2}dc \cdot \sin\alpha$

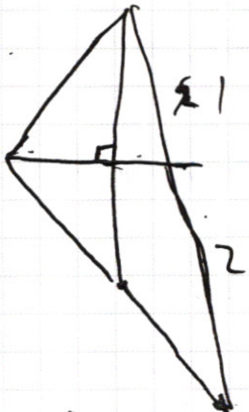
$\frac{1}{2}bd \cdot \sin\alpha$

$S = 1200 \quad \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot (ab + ac + cd + bd) =$

$= a(b+c) + d(b+c)$

$\frac{3}{2}x + y \qquad \frac{y_1}{y_2} = \frac{2}{1}$

$y \vdots 3 \qquad \frac{3}{2}x$



$1 \qquad 1{,}5$

$y - 2x = \sqrt{xy - 2xy + y + 2}$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

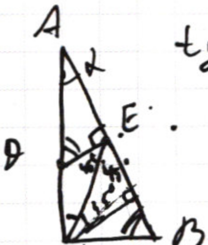
y^2

$\frac{3}{2}x \Rightarrow x \vdots 2$

$\Rightarrow \alpha =$

$\angle B = 180^\circ - 45^\circ - \alpha$

$180^\circ - \angle B - 45^\circ \qquad 180^\circ - \alpha - 45^\circ$



$\operatorname{tg}\angle A$

$\frac{AB}{AD} = \frac{DC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

$DE = \frac{2}{5}BC$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение:

1) Пусть $AC = x$; $BC = y$; $AB = z$

2) ~~BM - медиана ∆ABC; AK - бис. ∆ABC ⇒ AL и BK - это~~

BM - медиана ∆ABC, AK - бис. ∆ABC ⇒ BM и AK перес. внутри ∆ABC, пусть $BM \cap AK = O$

3) ∆ABM:

$BO \perp AO$ - высота и бис. ⇒ ∆ABM - р/б с осн. BM (по признаку) ⇒

4) ⇒ $\overset{AB}{A\cancel{BM}} = AM = \frac{x}{2}$ ($AM = \frac{x}{2}$, т.к. M - сер. ~~AC~~ AC, а $AC = x$) ⇒ ⇒ $z = \frac{x}{2}$

~~4) AK - бис. ∆ABC ⇒~~

~~$\Rightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{AB}{BAC}$ (по св.-ву бис. тр.)~~

~~$\frac{BK}{KC} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$~~

~~5)~~ 4) Пусть

$\angle BAC = \alpha$

5) $x + y + z = 1200$

$y = 1200 - x - z = 1200 - \frac{3x}{2}$

6) ∆ABC по т. cos

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$

$(1200 - \frac{3x}{2})^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} - x^2 \cdot \cos\angle\alpha$

$\cos\angle\alpha = \frac{x^2 + \frac{x^2}{4} - (1200 - \frac{3}{2}x)^2}{x^2}$

$\cos\alpha = \frac{x^2 + \frac{x^2}{4} - 1200^2 + 3600x - \frac{9}{4}x^2}{x^2} =$

$= \frac{x^2 - 2x^2 - 1200^2 + 3600x}{x^2} = \frac{-1200^2 + 3600x - x^2}{x^2}$

7) $-1 < \cos\alpha < 1$

(3) $-1 \underset{(1)}{<} \frac{-1200^2+3600x-x^2}{x^2} \underset{(2)}{<} 1$ (3)

(1) $\frac{-1200^2+3600x-x^2}{x^2} > -1$

(4) $\frac{x^2-3600x+1200^2}{x^2} < 1$

$f(x) = \frac{x^2-3600x+1200^2}{x^2}$

$D(f): x \neq 0$

$f(x)=0$ при $x^2-3600x+1200^2=0$

$D = 3\cdot 1200^2 - 4\cdot 1\cdot 1200^2 = 5\cdot 1200^2$

$x = \frac{3600 \pm 1200\sqrt{5}}{2\cdot 4}$

$x = 900 \pm 300\sqrt{5}$

$0 \quad 900-300\sqrt{5} \quad 900+300\sqrt{5} \quad x$

$\frac{x^2-3600x+1200^2-x^2}{x^2} < 0$

$\frac{1200^2-3600x}{x^2} < 0$

$\frac{1200-3x}{x^2} < 0 \quad |\cdot x^2,\ x^2>0,\ (x\neq 0)$

$\begin{cases} 1200-3x<0 \\ x\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x>1200 \\ x\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>400 \\ x\neq 0 \end{cases}$

$x>400$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $\frac{-1200^2+3600x-x^2}{x^2} < 1$

$\frac{x^2-3600x+1200^2}{x^2} > -1$

$\frac{2x^2-3600x+1200^2}{x^2} > 0$

$f(x) = \frac{2x^2-3600x+1200^2}{x^2}$

ОДЗ$(f(x))$; $x \neq 0$

$f(x)=0$ при $2x^2-3600x+1200^2=0$

$\cancel{2x(x-2400)}$

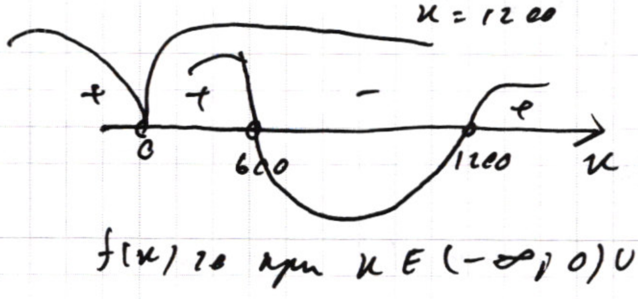
$2x^2-2400x-1200x+1200^2=0$

$2x(x-1200)-1200(x-1200)=0$

$(x-1200)(2x-1200)=0$

$x-1200=0$ или $2x-1200=0$

$x=1200$ $\quad$ $x=600$



$f(x)>0$ при $x \in (-\infty;0)\cup(0;600)\cup(1200;+\infty)$

(3) $\begin{cases} x>400 \\ x\in(-\infty;0)\cup(0;600)\cup(1200;+\infty) \end{cases}$

$x\in(400;600)\cup(1200;+\infty)$

Но при $x>1200$, периметр ABC будет больше 1200 $\Rightarrow$ $x\in(400;600)$

При $x\in(400;600)$ ~~можно~~ найдётся такой угол α ($\angle BAC$), что

8) будет существовать со сторонами ~~x, ...~~
x, y ($y=\sqrt{x^2+\frac{x^2}{4}-x^2\cdot\cos\alpha}$) и z ($z=\frac{x}{2}$), у которого
будет выполняться условие, что одна из бис, бис. перпендикулярна медиане будет выполняться, т.к. будет образовываться р/б треугольник с вершинами в основании медианы и вершиная тр. из которых проведены взаимоперп. медиана и бис.), и площадь этого тр. будет 1200 (такой угол найдётся, т.к будет существовать $\cos\alpha$), ~~...~~.

8) $\left.\begin{array}{l} z=\frac{x}{2} \\ z\in\mathbb{Z} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x}{2}\in\mathbb{Z} \Rightarrow x \vdots 2 \Rightarrow$ из чисел ~~...~~ в промежутке (400; 600) подойдут только числа {402; 404; ...; 598}, т.е. 99 чисел.

9) Заметим, что
$\forall x$ ~~$\in\mathbb{Z}$~~ : $\left.\begin{array}{l} y=1200-x-z \\ 1200\in\mathbb{Z} \\ x\in\mathbb{Z} \\ z\in\mathbb{Z}\ (\text{при } x \vdots 2) \end{array}\right| \Rightarrow y\in\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

Существует 99 таких треугольника

Ответ: 99.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

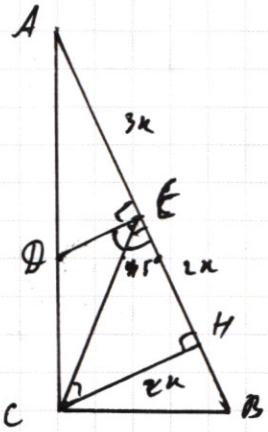
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle C = 90°$; $D \in AC$; $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$E \in AB$; $\angle CED = 45°$; $DE \perp AB$

б) $AC = \sqrt{29}$

~~Найти: A:a)~~

Найти: а) $tg \angle BAC$; б) ~~CED~~ S_{CED} - площадь $\triangle CED$

Решение:

а) 1) Пусть CH - высота в $\triangle ABC$;

2) $CH \perp AB$; $DE \perp AB \Rightarrow CH \parallel DE$ (по призн.)

3) в $\angle CAH$:

$DE \parallel CH$

$E \in AH$

$D \in AC$

3) ~~$A - D - C$; $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$~~

3) в $\angle CAH$:

$D \in AC$; $E \in AH$; $DE \parallel CH \Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ (т. о пропорц. отр.)

4) Пусть $AH = 5x$, тогда

5) $AE = \frac{3}{5} AH = 3x \Rightarrow$ 6) $EH = AH - AE = 5x - 3x = 2x$

5) $\angle BEC + \angle CED + \angle DEA = 180° \Rightarrow \angle BEC = 180° - \angle CED - \angle DEA = 180° - 90° - 45° = 45°$

6) $\triangle CHE$: $\angle ECH + \angle CHE + \angle HEC = 180°$

$\angle ECH = 180° - \angle CHE - \angle HEC = 180° - 90° - 45° = 45°$

7) Во $\triangle CEH$: $\angle HEC = \angle ECH = 45° \Rightarrow \triangle CEH$ - р/б с осн. EC (по призн.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CH = EH = 2x$

8) $\triangle ACH$: $\angle CHA = 90° \Rightarrow tg \angle HAC = \frac{CH}{AH} \Rightarrow tg \angle BAC = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

б) 9) Пусть $AC = \sqrt{29}$, тогда $AD = \frac{3}{5} \cdot AC = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29}$

10) $\frac{1}{\cos^2 \angle BAC} = 1 + tg^2 \angle BAC$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{1}{\cos^2\angle BAC} = 1 + \frac{4}{25} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\angle BAC} = \frac{29}{25} \Leftrightarrow \cos^2\angle BAC = \frac{25}{29} \Leftrightarrow$

$1 - \cancel{\sin^2\angle BAC}$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2\angle BAC = \frac{25}{29} \Leftrightarrow \sin^2\angle BAC = \frac{4}{29} \Leftrightarrow \sin\angle BAC = \pm\frac{2}{\sqrt{29}}$, но $\angle BAC < 90^\circ$ (т.к. в пр. тр.) $\Rightarrow \sin\angle BAC > 0 \Rightarrow \sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{29}}$

11) В $\triangle AED$:

$\angle AED = 90^\circ \Rightarrow DE = AD \cdot \sin\angle DAE = \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

12) В $\triangle CAH$:

$\angle CHA = 90^\circ \Rightarrow CH = AC \cdot \sin\angle CAH = \sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = 2$

13) в $\triangle CHE$; $\angle CHE = 90^\circ \Rightarrow CE = \frac{CH}{\cos\angle ECH} = \frac{2}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2}$

14) в $\triangle CED$:

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE \cdot \sin\angle DEC = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ =$

$= \frac{3}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{6}{5}$

№ 5

Дано:

Ω с рад R

ω с рад r

Ω кас ω в A (внутр. обр.)

$R > r$

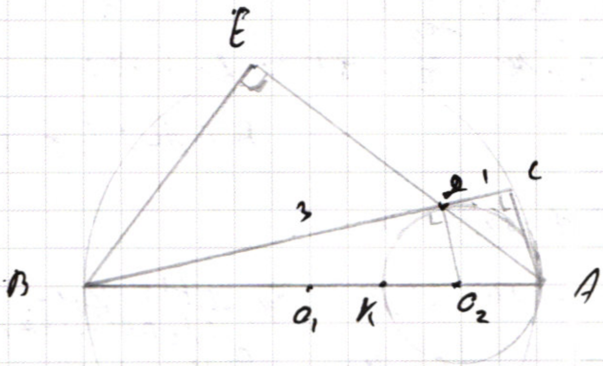
AB - диаметр Ω

BC - хорда Ω, BC кас ω в D

$AD \cap \Omega = \{A; E\}$

$(CD = 1;\ BD = 3)$

Найти: R, r, $S_{\triangle ACE}$



Решение:

1) Ω кас ω внутр. обр. (Ω больше ω) в т. A, AB - диаметр $\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1$ и O_2 (O_1 - центр Ω; O_2 - центр ω) лежат на AB (по св-ву)

2) Пусть $AB \cap \omega = \{A; K\}$, тогда AK диаметр ω, т.е. $AK = 2r$

3) AB - диаметр $\Omega \Rightarrow AB = 2R$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $BK = AB - AK = 2R - 2r$

5) BD - кас к ω из B
AB - ик из B к ω ($AB \cap \omega = \{K; A\}$) $\Rightarrow$ $AB \cdot BK = \cancel{2R \cdot r}\ BD^2$ (по св-ву)

$2R(2R-2r) = 9$

6) AB - диаметр Ω, C не совпадает с A и B $\Rightarrow$
$C \in$ ~~Ω, C новые~~

$\angle ACB = 90°$ (по св-ву)

Ан-но: $\angle AEB = 90°$

7) $\exists$ BD кас ω в D
O_2 - центр ω $\Rightarrow$ $\angle O_2DB = 90°$ (по св-ву кас) ~~и~~

8) $O_2D \perp BC$; $AC \perp BC \Rightarrow$ ~~B~~ $O_2D \parallel$ ~~BC~~ AC (перпенд к)

9) $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$:
B $D \in BC$
$O_2 \in AB$
$O_2D \parallel AC$ $\Rightarrow$ $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (как нув пара)

10) $BC = BD + DC = 4$

11) $BO_2 = BK + KO_2 = 2R - 2r + r = 2R - r$

12) $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \Rightarrow \dfrac{AB}{BO_2} = \dfrac{CB}{BD}$ ~~(как соотв. эл)~~

$\dfrac{2R}{2R-r} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 6R = 8R - 4r$

$2R = 4r$

$R = 2r$

(9)13) $\begin{cases} 2R(2R-2r) = 9 \\ R = 2r \end{cases}$

$\Downarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$4r(4r-2r)=9$

$4r\cdot 2r=9$

$8r^2=9$

$r^2=\frac{9}{8}$

$r=\pm\frac{3}{2\sqrt2}$, $r>0 \Rightarrow r=\frac{3}{2\sqrt2}$

14) $R=2r=\frac{3}{\sqrt2}$

15) $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{O_2D}{AC}=\frac{BD}{BC}$

$\frac{O_2D}{AC}=\frac{3}{4}$

$AC=\frac{4}{3}O_2D=\frac{4}{3}r=\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}\sqrt2}=\sqrt2$

16) $\triangle DCA$;

$\angle DCA=90^\circ \Rightarrow AD=\sqrt{DC^2+AC^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt3$

17) $\triangle DCA$;

$\angle DCA=90^\circ \Rightarrow \sin\angle CDA=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$

18) $\triangle BED$ и $\triangle ACD$;

$\angle CDA=\angle EDB$ (как верт.)

$\angle BED=\angle ACD=90^\circ$ $\Bigg| \Rightarrow \triangle BED\sim\triangle ACD$ (по 2-м углам)

19) $\triangle BED\sim\triangle ACD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{AD}=\frac{ED}{CD}$ (~~как сост.~~)

$ED=\frac{BD\cdot CD}{AD}=\frac{3\cdot1}{\sqrt3}=\sqrt3$

20) $AE=ED+AD=2\sqrt3$

21) $BACE$ – выпукл. 4-уг. $\Rightarrow S_{BACE}=BC\cdot AE\cdot\frac12\sin\angle CDA=$

$=4\cdot\cancel{2}\cancel{\sqrt3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt2}{\cancel{\sqrt3}}=4\sqrt2$

Ответ: $\frac{3}{2\sqrt2}$; $\frac{3}{\sqrt2}$; $4\sqrt2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\cancel{\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ y-2x\geq 0 \end{cases}}$$

№7

1) $f(x)=f(1\cdot x)=f(1)+f(x) \Rightarrow f(x)=f(1)+f(x) \Rightarrow$

$f(1)=0$

2) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 – простые числа $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(2)=[\frac{2}{2}]=1;\ f(3)=1;\ f(5)=2;\ f(7)=3;\ f(11)=5,\ f(13)=6;$

$f(17)=8;\ f(19)=9$

3) Теперь посчитаем для 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, и 21:

$f(4)=f(2^2)=f(2)+f(2)=2;\ f(6)=f(2)+f(3)=2;\ f(8)=f(4)+f(2)=3;\ f(9)=f(3)+f(3)=$

$=2;\ f(10)=f(2)+f(5)=3;\ f(12)=f(6)+f(2)=3;\ f(14)=f(7)+f(2)=4;$

$f(15)=f(5)+f(3)=3;\ f(16)=f(4)+f(4)=4;\ f(18)=$

$=f(6)+f(3)=3;\ f(20)=f(10)+f(2)=4;\ f(21)=f(7)+f(3)=4$

4) Заметим, что $\cancel{f(x^{-1}\cdot x^2)=f(x^{-1})}+f(x^2)=$

$\cancel{=f(x^{-1})+f(x)\Rightarrow}$

$f(x)=f(\frac{x^2}{x})=f(x^2\cdot\frac{1}{x})=f(x^2)+f(\frac{1}{x})=f(x)+f(x)+f(\frac{1}{x})\Rightarrow$

(при $x\neq 0$)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow f(x) = f(\frac{1}{x}) + 2f(x) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x) \Rightarrow$

~~$\Rightarrow f(1)=0;\ f(\frac{1}{2}) = -1;$~~ $f(\frac{1}{x})$ ~~при~~ n

$\Rightarrow$ при ~~n~~ ~~$1 \le x \le 821$;~~ ~~$f(\frac{1}{x}) \in \{0; -1;$~~ $-2; -3; -4;$

$\Rightarrow f(1)=0;\ f(\frac{1}{2}) = -1;\ f(\frac{1}{3}) = -1;\ f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{5}) = f(\frac{1}{6}) = f(\frac{1}{9}) = -2;$

$f(\frac{1}{8}) = f(\frac{1}{7}) = f(\frac{1}{10}) = f(\frac{1}{12}) = f(\frac{1}{15}) = f(\frac{1}{18}) = -3;$

$f(\frac{1}{20}) =$ ~~$f(\frac{1}{21})$~~ $= f(\frac{1}{14}) = f(\frac{1}{16}) = -4;\ f(\frac{1}{4}) = -5;\ f(\frac{1}{12}) = -8;\ f(\frac{1}{18}) = -9$

$f(\frac{1}{13}) = -6$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x) = 0$ ~~в одном~~ 1 случае

$f(x) = +1$ в 2-х случаях

$f(x) = +2$ в 4-х случаях

$f(x) = +3$ в 6 случаях

$f(x) = +4$ в 4-х случаях

$f(x) =$ ~~-5 в 1 сл.~~ $f(x) = 5$ - 1 случай

~~$f(x) = 6; 5; 8; 9; 6$ 1 случае~~

$f(x) = 6$ - 1 случай ~~в каждом~~

$f(x) = 8$ - 1 случай

$f(x) = 9$ - 1 случай

$f(\frac{1}{y}) = 0$ в 1 случае

$f(\frac{1}{y}) = -1$ в 2-х случаях

$f(\frac{1}{y}) = -2$ в 4-х случаях

$f(\frac{1}{y}) = -3$ в 6 случаях

$f(\frac{1}{y}) = -4$ в 4-х случаях

$f(\frac{1}{y}) = -5$ в 1 случае

$f(\frac{1}{y}) = -6$ в 1 случае

$f(\frac{1}{y}) = -8$ в 1 случае

$f(\frac{1}{y}) = -9$ в 1 случае

$f(\frac{x}{y}) < 0$ если $f(x) < -f(\frac{1}{y})$

(при $f(\frac{1}{y}) < 0$)

При $f(x) = 0$ – ~~18 вар.~~ 20 вариантов

$f(x) = 1$ – 18 вар (при $f(\frac{1}{y}) < -1$)

$f(x) = 2$ – 14 вар (при $f(\frac{1}{y}) < -2$)

$f(x) = 3$ – 8 вар (при $f(\frac{1}{y}) < -3$)

$f(x) = 4$ – 4 вар при $f(\frac{1}{y}) < -4$)

$f(x) = 5$ – 3 вар (при $f(\frac{1}{y}) < -5$)

$f(x) = 6$ – 2 вар (при $f(\frac{1}{y}) < -6$)

$f(x) = 8$ – 1 вар. ($f(\frac{1}{y}) < -8$); $f(x) = 9$ – 0 вар ($f(\frac{1}{y}) < -9$)

$\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Всего $20+18+14+8+4+3+2+1+0=70$ вариантов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего 70 ~~шт~~ возможных пар

Ответ: 70

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$

12) $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$

$f(xy\cdot\frac{1}{y})$

(1) $y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$f(x)$

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ y-2x\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \\ y\geq 2x \end{cases}$

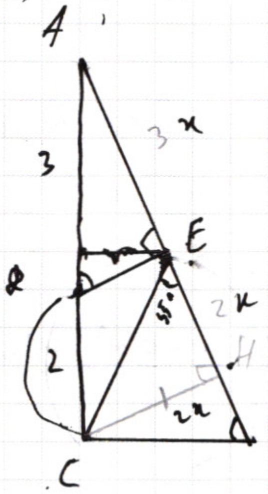
a) $\cancel{y^2-5xy+}$

$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \\ \cancel{y\geq 2x} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ y\geq 2x \end{cases}$

B $f(3)$

$f[7]=3$

f



AH $\frac{CH}{AH}=\frac{2}{5}$

$(R-r)^2+r^2=9$

2R

Ω u

№4

a) ~~Дано~~ ~~ABC~~ прям тр., $\angle C=90°$

$D\in AC$; $E\in AB$

$AD:AC=\frac{3}{5}$

~~$DE\perp AB$~~

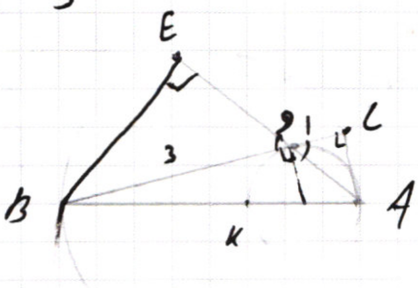
$\angle CED=45°$

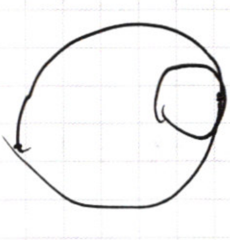
~~Найти~~: $tg\angle BAC$

$f(xy\cdot\frac{1}{y})=$

$=f(x)+f(y\frac{1}{y})$

$\angle CED$





$f(x)=f(1\cdot x)=f(1)+f(x)$

$AB=R$

3) $f(1)+f(x)=f(x)$

$BK=R-r$

$f(1)=0$

$R\cdot(R-r)=9$

$R^2-Rr=9$

$f(3)=f(1\cdot 3)=f(1)+f(3)=$

$=f(2)=0$; $f(3)=1$; $f(5)=2$; $f(6)=f(6)=f$

$f(7)=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(1)=0;\ f(2)=1;\ f(3)=1;\ f(5)=2;\ f(7)=3;\ f(11)=5;\ f(13)=6$

$f(15)=7;\ f(19)=9$

$f(17)=8$

$4R(R-r)=8=4R^2-4rR=8$

$x\cdot\frac{1}{y}$ $\quad x_1+x_2=3600$

$x_1\cdot x_2=1200^2$

$x\cdot\frac{1}{y}=$ $\quad D=1200^2\cdot 9-1200^2=$

$f(y)=a$ $\quad =8\cdot 1200^2$

$2R\cdot(2R-2r)=8$

$(R-r)^2$

$(2R-r)^2-r^2=8$

$4R^2-4Rr=8$

$2\sqrt{2}\cdot 2400\sqrt{2}$

$\frac{3600\pm 2400\sqrt{2}}{4}$

$f(x^n)=f(x)\cdot n$

$f(x^{-1})=-f(x)$

$\boxed{900\pm 600\sqrt{2}}$

$2x^2-x-1\leq ax+b$

$2x^2-x(1+a)-1-b\leq 0$

$x\in[x_1;x_2]$

$x+2(x-1)\geq ax+b$

$\begin{cases} x\geq 1 \\ x(3-a)-a-1-b\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\leq 1 \\ -x(a+1)+1-b\geq \end{cases}$

$2x^2-2400x-1200x+1200^2$

$2x(x-1200)-1200(x-1200)$

$(2x-1200)(x-1200)$