

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.

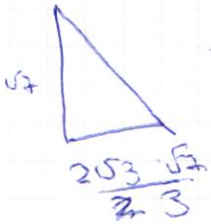
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

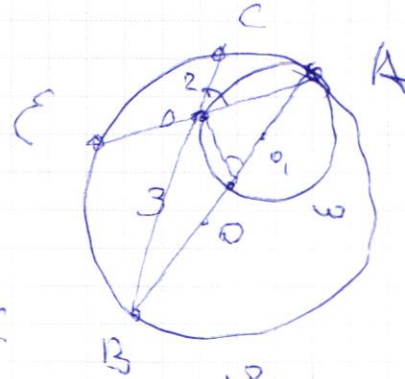
выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

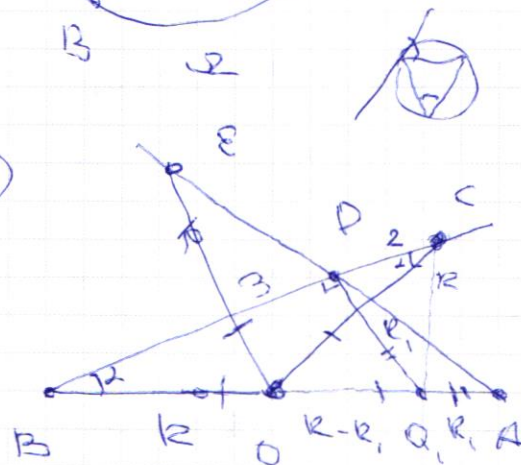
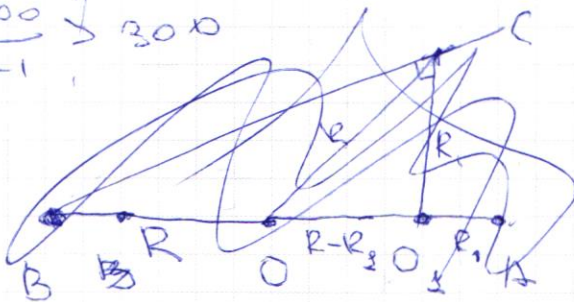
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$7 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{83} =$$



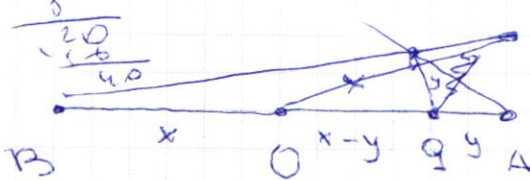
$$\frac{\sqrt{3} \cdot 300}{\sqrt{3} - 1} \approx 300$$



$$\text{tg } \alpha = \frac{R_1}{3}$$

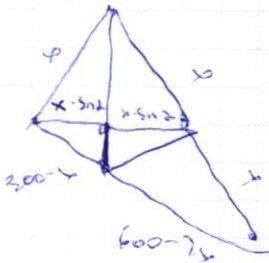
$$\frac{3}{x} = \text{cos } \alpha$$

$$\begin{array}{r} 810000 \\ - 10 \\ \hline 810000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ 101250 \end{array}$$



$$R_1 = \text{tg } \alpha \cdot 3$$

$$2R - \text{tg } \alpha \cdot 3 = \frac{3}{\text{cos } \alpha}$$



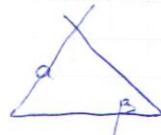
$$2x \sin \alpha = \sqrt{2x^2 + 2 \cdot 9(300-x)^2 - 4x^2}$$

$$\sqrt{6x^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{2x^2 + 2 \cdot 9(300-x)^2 - 4x^2}$$

$$6x^2 \sin^2 \alpha + x^2 = 2x^2 + 18(300-x)^2$$

$$810000 + 9x^2 - 18 \cdot 300x = 101250 + x^2 - 2 \cdot 27 \cdot 25$$

$$300 - x = \sqrt{\dots}$$



$$\frac{x}{3(300-x)} = \frac{300-x}{x}$$

$$x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$\underbrace{(x-6)^2}_{0^1} + 2 \underbrace{(y-1)(y+2)}_{0^1} = 0$$

$$\cancel{-2} \quad \cancel{4} \quad (x-6)^2 + (y-2)^2 - 20 + y^2$$

$$1) \quad y < 1 \quad x < 6 \quad y^2 - 2 \quad \underbrace{x-6}_{-2} \quad \underbrace{+36}_{40} \quad \underbrace{+y^2}_{20}$$

$$x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$x \geq 6y \quad (x-6)^2 + (y-1)^2 = y^2 - 20$$

$$(x-6)^2 = 2(4-y)(y+2)$$

$$\cancel{x-6} \quad 6-x = \sqrt{2(4-y)(y+2)} \quad (x-6)^2 + (\sqrt{2}y)$$

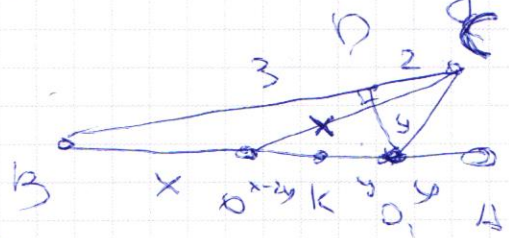
$$x = 6 + \sqrt{\dots}$$

$$g = 2x(2x-2y)$$

$$g = 4x(x-y)$$

$$y = x - \frac{g}{4x}$$

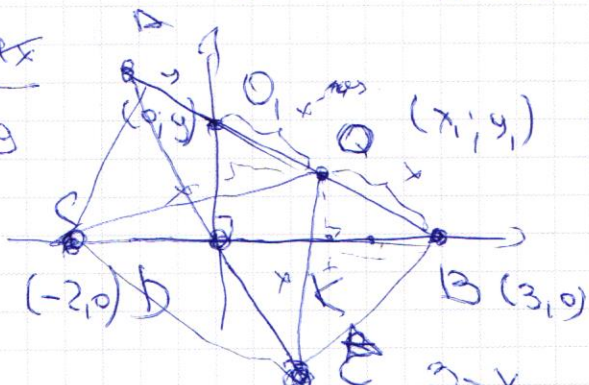
$$g = B \cdot k \cdot \frac{B \cdot A}{2x}$$



$$\frac{4x^2 + g}{4x^2 - g} = \frac{y_1 + 4x}{4x - y_1}$$

$$4x^3 - g^2 = 4x^2 + g y_1$$

$$y_1 = \frac{x(4x^2 - g)}{4x^2 + g}$$



$$\frac{x}{2x-y} = \frac{y_1}{y}$$

$$\frac{x}{2x + \frac{g}{4x}} = \frac{y_1}{x - \frac{g}{4x}}$$

$$CK = kB \Rightarrow \frac{3-x_1}{3} = \frac{x}{x + \frac{g}{4x}} \Rightarrow \frac{4x^2}{4x^2 + g}$$

$$3 - x_1(4x^2 + g) = 12x^2$$

$$x_1 = \frac{3(1 - 4x^2)}{4x^2 + g}$$

$$\frac{3(1-4x^2)}{4x^2 + g} = \frac{3 - 12x^2 + 8x^2 + 2 \cdot 18}{4x^2 + g} = \frac{3 - 4x^2 + 36}{4x^2 + g} = \frac{39 - 4x^2}{4x^2 + g}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f > 0 \forall a, b$
 $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$
 $f(p) = \lfloor p/2 \rfloor \quad \forall p \in \mathbb{N}$
 $(x, y) \in \mathbb{N}$
 $2 \leq x < 22$
 $2 \leq y < 22$

6 - 60 60 20

$f(x/y) < 0$
 $f(1) = 0$
 $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$
 $f(1) = f(1/2) + f(2) = f(1/3) + f(3)$
 $f(6) = 2 \quad f(10) = 3$
 $f(27) = 8$
 $f(4) = 0$
 $f(2) = 1$
 $f(3) = 1$
 $f(5) = 2$
 $f(7) = 3$
 $f(4) = 5$

$x = 24$
 $y = 1$
 $f(4) = 0$
 $f(2) = 1$

$f(\frac{3}{2} \cdot 2) = f(\frac{3}{2}) + 1$
 $f(\frac{3}{2}) = 0$
 $f(\frac{3}{2}) = 0$
 $f(\frac{3}{2}) = 0$

$f(\frac{3}{2}) = 0$
 $f(\frac{3}{2}) = 0$

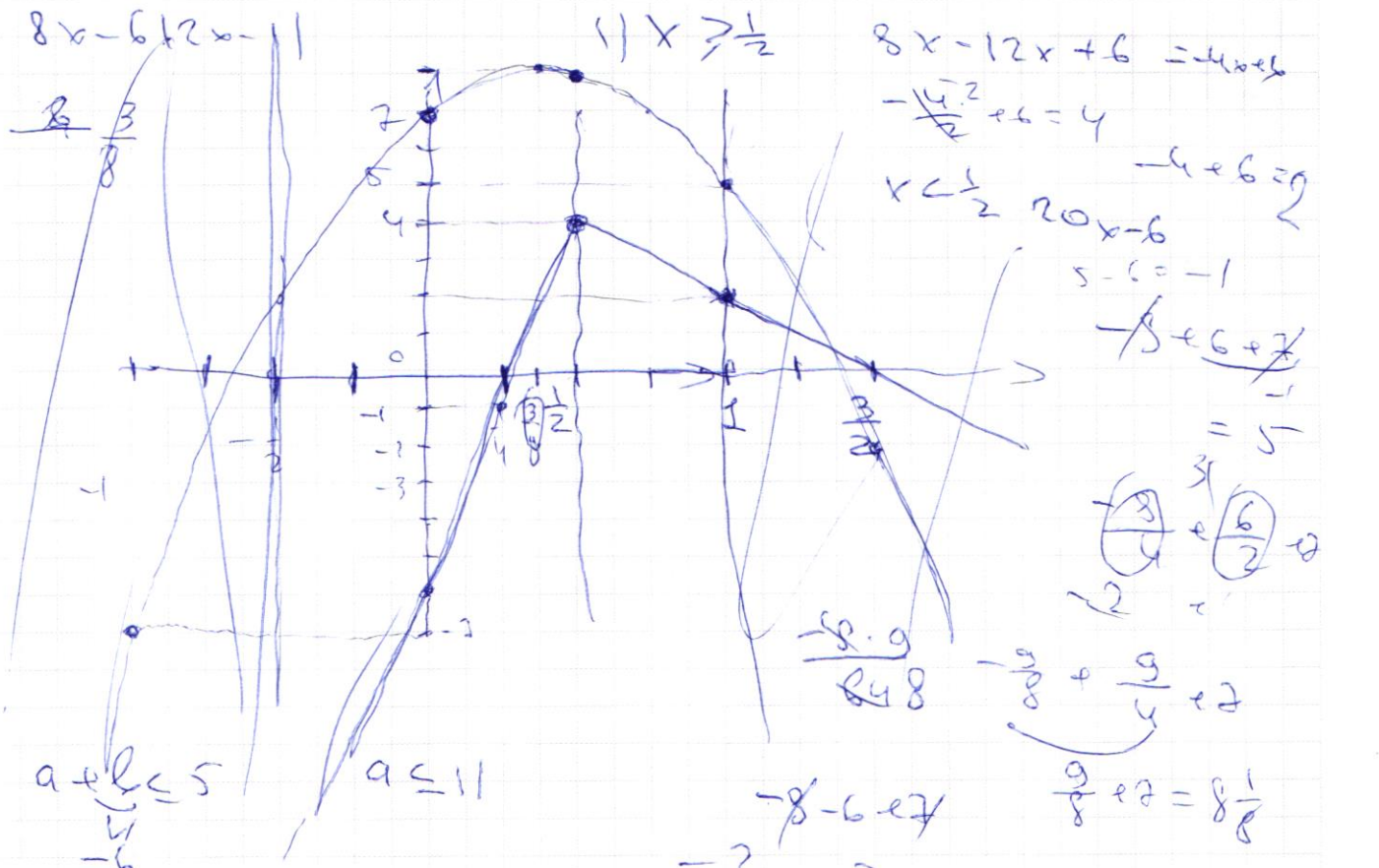
$\frac{48}{28} = \frac{12}{7}$

$f(2) = 1$
 $f(3) = 1$

$f(1) = 0$
 $f(\frac{2}{3}) = 0$

$f(\frac{p}{q}) = 0$
 $\Rightarrow f(p) = 2 \cdot 7$
 $f(9) = 8$

$\frac{210}{182} = \frac{15}{13}$
 $\frac{210}{182} = \frac{15}{13}$



$a + b \leq 5$
 $a \leq 11$
 $a \leq -2$
 $a \geq -4$
 $a + b \leq 6$
 $a + b + \frac{a}{2} \leq 5$
 $2 - \frac{a}{2} \leq 5$
 $\frac{a}{2} - b \leq 8$
 $a \leq 24$
 $\frac{11}{2} - b$
 $-9 \leq 11$
 $11x - 6$

$\frac{a}{2} + b \leq 6$
 $a + b + \frac{a}{2} \leq 5$
 $2 - \frac{a}{2} \leq 5$
 $\frac{a}{2} - b \leq 8$
 $a \leq 24$
 $\frac{11}{2} - b$
 $-9 \leq 11$
 $11x - 6$

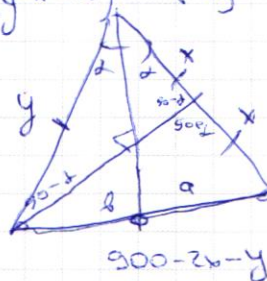
$2 \leq a + b$
 $-9 \leq a$
 $b \in [-18; 11]$
 $a \geq -6$
 $a = -9$
 $b = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$xy^2 - 2yx + 2yb - xy + b^2 = (2y-x+a)(y-x+b) \quad (2y) \quad (x \quad y)$$



так как



$$\frac{a}{y} = \frac{2x}{b} = \frac{2x}{y}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{900 - 2x - y}{a}$$

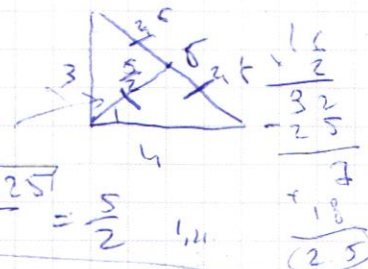
$$a(y + 2x) = -4x^2 - 2xy + 1800x$$

$$a = x(4x + 2y)$$

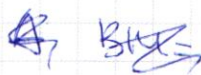
$$a = \frac{-2x(2x + y - 900)}{y + 2x}$$

$$y = x$$

$$A_4 = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{2}}$$

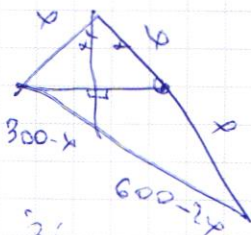


$$\cos \beta = \frac{\sin \alpha x}{300 - x}$$



$$900$$

$$= \sqrt{\frac{900 - 18 - 4 \cdot 9 \cdot 300x + 2 \cdot 9x^2 - 2x^2}{2}} \quad B_4 = \sqrt{\frac{-2x^2 + 2 \cdot 9(300 - x)^2 - 4x^2}{2}}$$



$$4 \cdot 360000 + 4x^2 - 4 \cdot 600x = 4x^2 + A_4^2 - 2 \cdot 2x \cdot A_4 \cdot \cos \alpha$$

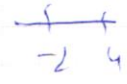
$$90000 + x^2 - 2 \cdot 300x = x^2 + A_4^2 - 2 \cdot x \cdot A_4 \cdot \cos \alpha$$

$$18 \cdot 10^4 + 2x^2 - 4 \cdot 300x = 2x^2 - A_4^2 \quad x^2 = 9(2x)$$

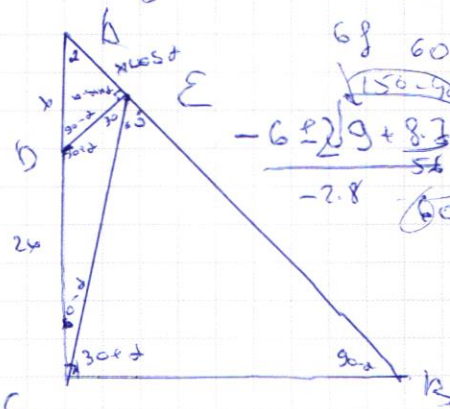
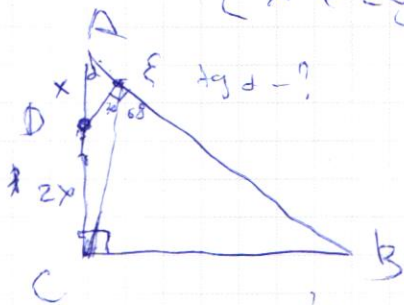
$$A_4 = \sqrt{1200x - 18 \cdot 10^4} = 10 \sqrt{12x - 1800}$$

$$x^2 = 4 \sin^2 \alpha x^2 + 9(300 - x)^2 - 2 \sin \alpha x \cdot 3(300 - x) \cdot \sin \alpha$$

$2 \frac{8 \cdot 1}{4} - \frac{9^{-3}}{2} - 8 + 6 + 7$
 $y(x-6) - x+6 = \sqrt{(x-6)(y-1)} \geq 0$ 1) $x \geq 6; y > 1$
 $(x-6)^2 = 6^2 - (2x+36)$ 2) $x < 6; y < 1$
 $(x-6)^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0$ 3) $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$
 $2(y^2 - 2y - 8)$
 $2(y-4)(y+2) = 0$



1) $x > 6; y > 1$ $x-6y > 0$
 $x > 6y$
 $x^2 - 12yx + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$
 $\begin{cases} x^2 - 13yx + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$
 $x = 12 \pm \sqrt{9 - 2y^2 + 4y - 20}$

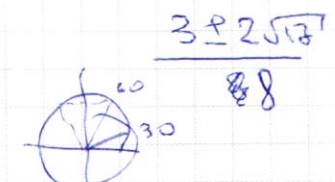


$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{x \cdot 6}{4}$
 $\text{tg } \alpha = \frac{CB}{3x}$

$x = 6 \pm \sqrt{-2y^2 + 4y - 11}$
 $60 - 90 - 1 + 90 = 180$
 $y = -4 \pm 2\sqrt{4}$
 $\frac{\Delta E}{AB} = \cos \alpha$
 $DE = x \cdot \sin \alpha$

$\frac{1}{4x} = \sin(90^\circ - \alpha)$
 $CE = 4x \cos \alpha$

$\frac{\sqrt{3}}{3x + \text{tg } \alpha} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{2}$
 $\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \text{tg } \alpha = 1$



$2\sqrt{3} \times \cos \alpha = 3 + \text{tg } \alpha$

$\text{tg } \alpha = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

$\cos^2 \alpha$

$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1$

$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \text{tg } \alpha = 1$

$1 + \sin \alpha \cos \alpha = \cos^2 \alpha$

$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$

$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\text{tg } \alpha}{\cos \alpha} = 1$

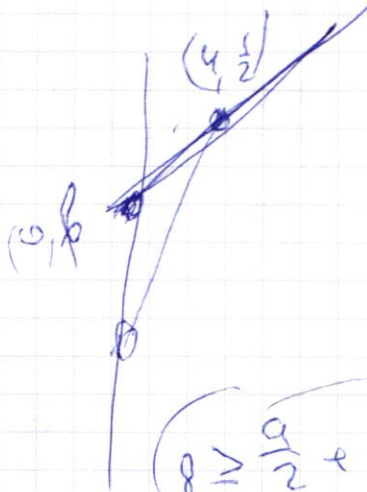
$\sin \alpha + \cos^3 \alpha = \cos^2 \alpha$

$a = \frac{3}{1}$
 $a^2 = 3$

$x = (300 - x) \cdot \sqrt{3}$

$\frac{x}{300 - x} = \pm \sqrt{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{x}{x=4} = \frac{y-b}{\frac{1}{2}-b} = \frac{2y-2b}{1-b}$$

$$x \cdot (1-b) = 8y - 8b$$

$$y = x \cdot \frac{(1-b)}{8} = a$$

$$a > \frac{1-b}{8}$$

$$8 \geq \frac{a}{2} + b \geq 4$$

$$2 \leq a + b \leq 5$$

$$-\frac{a}{2} + b \leq 2$$

$$\begin{cases} 2b - a \leq 4 \\ 2a + b \leq 5 \\ 8 \geq \frac{a}{2} + b \geq 4 \end{cases}$$

$$b = (2+4) \cos \alpha$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}$$

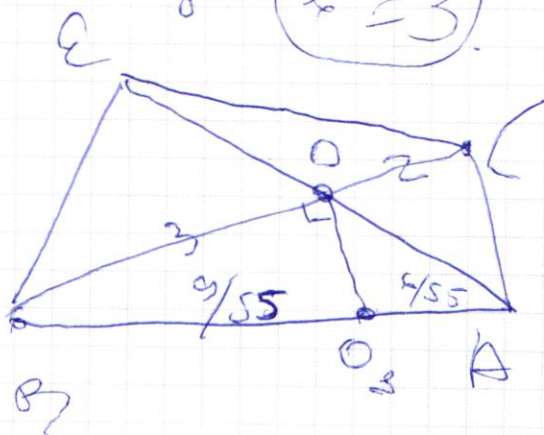
$$6 + 9 = 15$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + b &= x \\ a + 2b &= 2x \geq 8 \end{aligned}$$

$$a + b \leq 5$$

$$a + 2b - b \leq 5$$

$$b \geq 3$$



$$\frac{6\sqrt{5}}{2} - \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30 - 12}{2\sqrt{5}} = \frac{18}{2\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$x^2 = 4x^2 - 6 \cdot 300x + 3 \cdot 90000$$

$$2x^2 - 900x + 13500 = 0$$

$$x = \frac{900 \pm \sqrt{90000 - 4 \cdot 13500}}{2}$$

$$x = \frac{900 \pm \sqrt{810000 - 530000}}{2} = \frac{900 \pm \sqrt{280000}}{2}$$

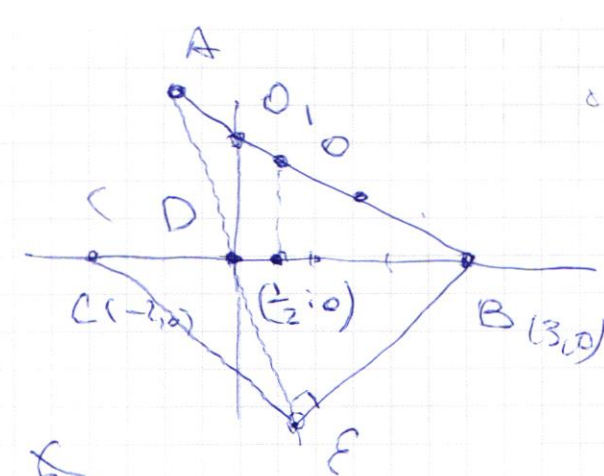
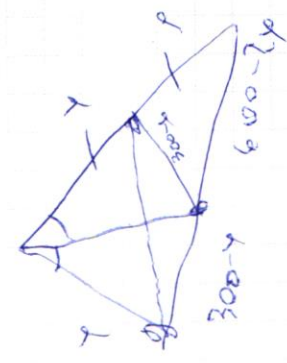
$$\frac{900 \pm 10\sqrt{2800}}{2}$$

$$x^2 - 900x + 13500 = 0$$

$$450 \pm 5 \cdot 9 \cdot \sqrt{2800}$$

$$(453 \cdot 300) \approx 3$$

$$C = 0.2x + 0.4y + 0.2z$$



$$= \frac{30 - 12}{255} = \frac{18}{255} = \frac{6}{85}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2y^2 - 7y + 2 = 138 - 12 \quad 3.6.$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$(y-1)^2 = -6y + 6 - 6 \quad 6-6.$$

$$\begin{array}{r} 163 \\ - 144 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$-6 \cdot 6 - 6y + 6 + (x-6)$$

$$\begin{cases} \text{D} = a - 6b > 0 \\ a^2 + 12b^2 - 13ab = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 36b^2 - 13ab = 0$$

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \quad a = 9b$$

$$(t - 9)(t - 4) = 0 \quad a = 4b$$

$$81b^2 + 16b^2 = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a, b, c — 1, 2, 3-ий члены г.п.р. Ч-ный корень $ax^2 - 2bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$\sqrt{ac} = b^2$, так как можно представить b и c , как: $b = a \cdot x$; $c = a \cdot x^2$

Тогда: $x_{1,2} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$

$a; \frac{ax}{b}; \frac{ax^2}{c}; \frac{x}{\frac{b}{a}}$ $ax^3 = x \quad | :x (x \neq 0)$
 $ax^2 = 1$ — это и есть третий член

Ответ: $ac = b^2$

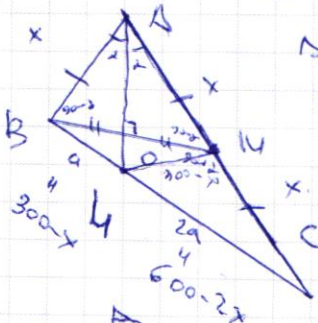
№2 $P = 900$

1) Пусть \perp медиана и биссектриса из \angle угла:



Тогда очевидно, что угол треугольничка боковой
там $90:2 = 45$ (так как биссектриса)

2) Значения на из \angle угла:



$\triangle ABM$ — р/к, т.к. AO — биссектриса и высота
 $\Rightarrow AB = MA; BO = OM \quad AB = BM = MC = x$

$P = 900 \Rightarrow BC = 900 - 3x = 3(300 - x)$

$BL = a \Rightarrow LC = 2a \quad (\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{MC} \text{ т.к. } AL \text{ — биссектриса})$

$3a = 3(300 - x) \Rightarrow a = 300 - x \quad \triangle BOL \sim \triangle COM$
(1 пр.)

подобны по отношению
и углу $\Rightarrow \frac{x}{300-x} = \frac{3(300-x)}{x}$

$$x^2 = 3(300-x)^2$$

$$x = \sqrt{3} \cdot 300 - \sqrt{3}x$$

$$x = \frac{\sqrt{3} \cdot 300}{1 + \sqrt{3}}$$

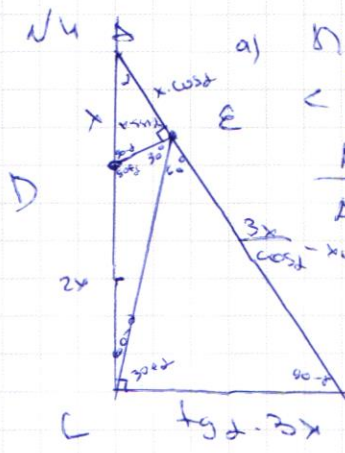
$$-x = \sqrt{3} \cdot 300 - \sqrt{3}x$$

$$x(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3} \cdot 300$$

$$x = \frac{\sqrt{3} \cdot 300}{\sqrt{3}-1}$$

Таких нет это $\neq 2$

$$300 - \frac{300}{1+\sqrt{3}} \neq 2$$



a) Провести высоту на катете, если $\angle DAE = \alpha$. $\triangle DAE \sim \triangle CAB$ (по 2 углам)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC} \quad \frac{x}{3x} = \frac{AE}{3x} = \frac{x \cos \alpha}{3x}$$

$$3x = AB \cdot \cos \alpha \Rightarrow AB = \frac{3x}{\cos \alpha}$$

По CB: $\frac{\sin 30}{2} = \frac{\sin(90-\alpha)}{CE}$

$$\frac{1}{2} = \frac{\cos \alpha}{CE} \quad CE = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{\sin 60}{3x \cdot \text{tg} \alpha} = \frac{\sin(90-\alpha)}{4x \cdot \cos \alpha} \quad \frac{\sqrt{3}}{3 \text{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \quad \text{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) $AC = \sqrt{7}$ $S_{CED} = ?$ $S_{CED} = S_{DCE} = S_{ADE}$
 ~~$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3x \cdot \cos \alpha$~~ S_{ADE}

$$S_{CED} = \frac{1}{2} \sin 30 \cdot DE \cdot CE = \frac{1}{4} \cdot x \cdot \sin \alpha \cdot 4x \cdot \cos \alpha = x^2 \cdot \text{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$AC = \sqrt{7} = 3x \quad x = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad CB = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3x}{3-3} \quad (\text{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

$$\frac{7}{\cos^2 \alpha} = \frac{7}{4} + \frac{4 \cdot 7}{3} \cdot \cos^2 \alpha$$

$$3 = 21 \cos^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha$$

$$25 \cos^2 \alpha = 3 \quad \cos^2 \alpha = \frac{3}{25}$$

$$S_{CED} = \frac{7 \cdot 2\sqrt{3}}{9 \cdot 9 \cdot 25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y + x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

ODЗ: $x \geq 6y$; $(x-6)(y-1) \geq 0$ (N3)
 $\Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \parallel \begin{cases} x > 6 & y > 1 \\ x < 6 & y < 1 \end{cases}$

а). $(x-6)^2 + 2(y-1)(y+2) = 0$

$y: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$

1) $2y \leq 1 \quad y \geq -2 \Rightarrow x < 6 \quad x \geq 6y$

$$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{9 - 2y^2 + 4y - 20}}{2}$$

$$D = -2y^2 + 4y - 11$$

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4 - 2 \cdot 11}}{2} < 0$$

$\Rightarrow D$ всегда отрицательна

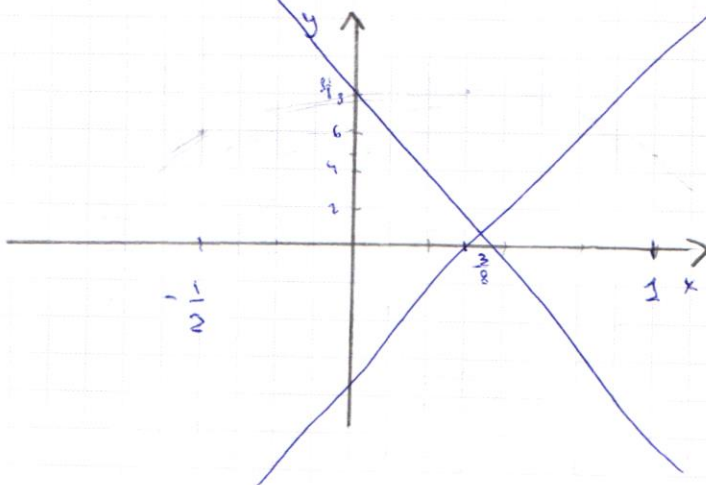
(2) всегда > 0 .

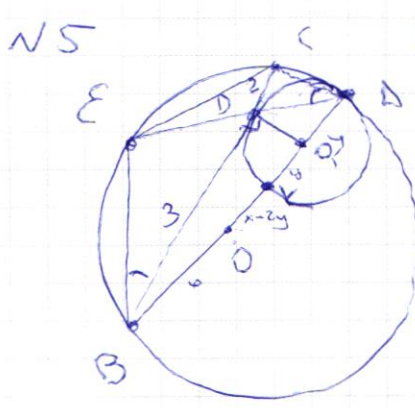
\Rightarrow не при каких x, y .

N6

$$8x - 6(2x - 1) \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7 \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

$-8x^2 + 6x + 7$ Вершина:
 $\frac{6}{2 \cdot -8} = -\frac{3}{8}$





$R_{\Omega} = x \quad R_{\omega} = y$
 $BK = C$ (генератор окружности): $BO^2 = BK \cdot BA$
 $3 = (2x - 2y) \cdot 2x$
 $y = x - \frac{3}{4x}$

$\frac{BT}{BD} = \frac{x}{2x - y}$
 $\frac{3 - x_1}{3} = \frac{x}{x - \frac{3}{4x}} = \frac{4x^2}{4x^2 - 3}$
 $12x^2 = 3(4x^2 - 3) - x(4x^2)$
 $x_1 = 3 - \frac{12x^2}{4x^2 - 3}$

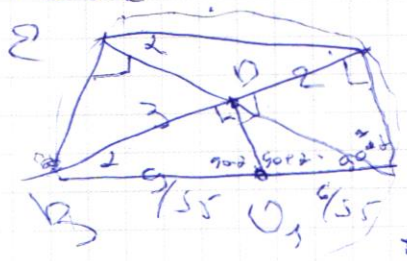
$CO \perp BS - P/S \Rightarrow CT = TB$

$\frac{3}{3} + \frac{12x^2}{4x^2 - 3} = 2 \cdot 5 - \frac{12x^2}{4x^2 - 3}$
 $\frac{24x^2}{4x^2 - 3} = 5$

$24x^2 = 20x^2 - 15$
 $4x^2 = -15 \quad x = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad (x > 0)$
 $R_{\Omega} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\frac{8 \cdot 5}{3} - \frac{8\sqrt{5} \cdot y}{2} = \frac{8}{3}$
 $2\sqrt{5}y = \frac{12}{3}$
 $y = \frac{5}{\sqrt{5}} = R_{\omega}$

$S_{BDC} = ?$



$\frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} = \frac{BO}{BA} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$
 $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$
 $\frac{CA}{6/\sqrt{5}} = \frac{5}{3}$
 $CA \cdot \sqrt{5} = 10$
 $CA = \frac{10}{\sqrt{5}}$
 $\angle BCA = \angle BEA = 90^\circ$

$S_{BCA} = \frac{5 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \frac{25}{\sqrt{5}}$

Продолжение есть на 7 странице

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 87

$$x, y \in \mathbb{N} \quad 2 \leq x \leq 22 \quad 2 \leq y \leq 22$$

$$f(2) = 1, f(3) = 2 \Rightarrow f(6) = 2 \quad f\left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) + f(3)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = f(1) = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = 0 & & f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{matrix}$$

А по-то: $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Обра. -11

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) $x=2, y=2 \quad f(1)=0 \Rightarrow$ 2) $x=3, y=2 \quad f\left(\frac{2}{3}\right)=0 \quad (x=2, y=3 \quad f=0)$

3) $x=4, y=2 \quad f(2)=2 \Rightarrow$ (уже обр +1) ...

Очевидно, что если: $x=x_1, y=y_2 \quad f\left(\frac{x_1}{y_1}\right) > 0 \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x_1}{y_1}}\right) = f\left(\frac{y_2}{x_2}\right) < 0$$

Все (x, y) разбиваются на пары + и -
целых. $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0, x=y$

Всего $\binom{21}{2} = 210$ пар $\Rightarrow 21+21$

Сколько $(x=y)$: 21 . Если $f\left(\frac{x}{x}\right) = f(1) = 0$

Сколько $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0, x \neq y, f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, если $f(p) = 0, f(q) \neq 0$.

проверим числа от 2 до 22:

$$f(2)=1, f(3)=2, f(4)=2, f(5)=2, f(6)=2, f(7)=3, f(8)=3, f(9)=2$$

$$f(10)=3, f(11)=5, f(12)=3, f(13)=6, f(14)=4, f(15)=5, f(16)=4$$

$$f(17)=8, f(18)=3, f(19)=9, f(20)=4, f(21)=4, f(22)=7$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{4}{5}\right) = f\left(\frac{6}{5}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) = f\left(\frac{9}{4}\right) = f\left(\frac{4}{9}\right) =$$

$$= f\left(\frac{9}{5}\right) = f\left(\frac{5}{9}\right) = f\left(\frac{9}{6}\right) = f\left(\frac{6}{9}\right) = f\left(\frac{7}{8}\right) = f\left(\frac{8}{7}\right) = f\left(\frac{10}{7}\right) = f\left(\frac{7}{10}\right) = f\left(\frac{8}{10}\right) = f\left(\frac{10}{8}\right) =$$

$$= f\left(\frac{12}{7}\right) = f\left(\frac{7}{12}\right) = f\left(\frac{12}{8}\right) = f\left(\frac{8}{12}\right) = f\left(\frac{12}{10}\right) = f\left(\frac{10}{12}\right) = f(11)$$

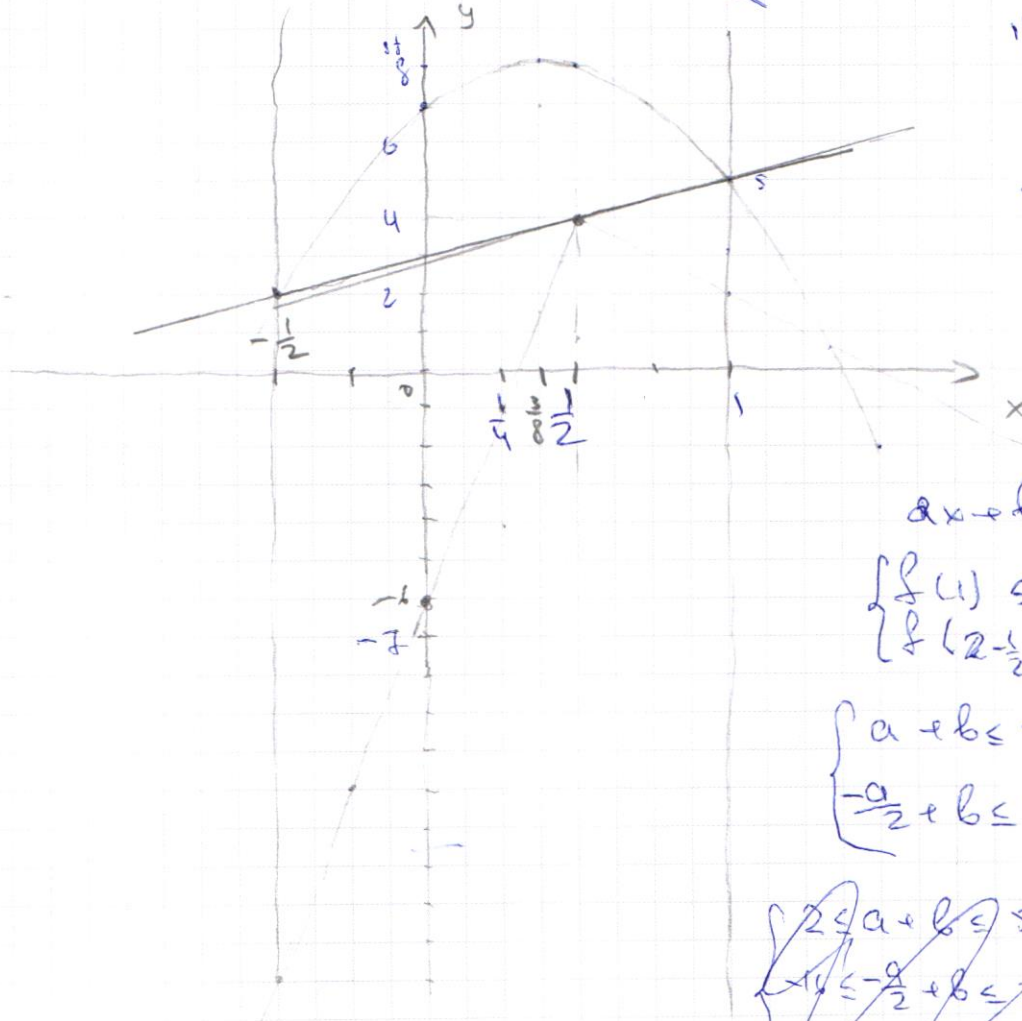
короче: $f=1 \quad 2 \text{ шт} \Rightarrow 2 \quad f=2 \quad 5 \text{ шт} \Rightarrow 10 \quad f=3 \quad 5 \text{ шт} \Rightarrow 15 \quad f=4 \quad 4 \text{ шт} \Rightarrow 16 \quad f=5 \quad 2 \text{ шт} \Rightarrow 10$

$$f=2 \quad 4 \text{ шт} \Rightarrow 8 \quad f=4 \quad 4 \text{ шт} \Rightarrow 16 \Rightarrow -(2+10+16+16+10)$$

$$\frac{21 \cdot 21 - 21 - (4 + 24 + 48)}{2} = \frac{21 \cdot 20 - 76}{2} = 172 \text{ млрд}$$

Ответ: 172

№ 8 $ax + b | 2x - 1 | \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$



- 1) $2x - 1 \geq 0$
 $x \geq 1/2$
 $-4x + 6$
- 2) $x < 1/2$ $20x - 6$
 Верш: $3/8$

$$ax + b = f(x)$$

$$\begin{cases} f(1) \leq 5 \\ f(1/2) \leq 2 \end{cases} \leftarrow \text{над параболой}$$

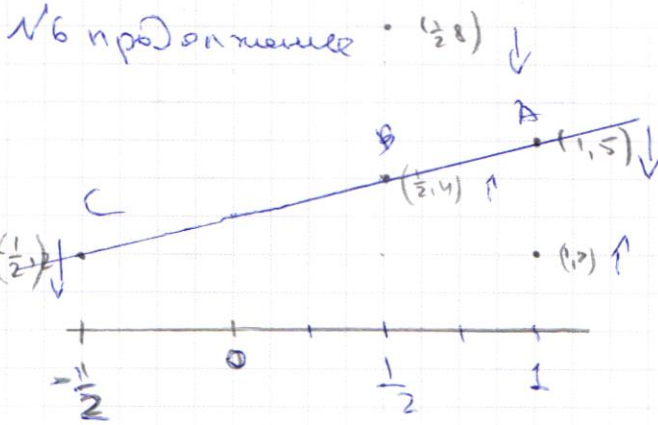
$$\begin{cases} a + b \leq 5 \\ -a/2 + b \leq 2 \end{cases} \begin{cases} f(1/2) \geq 4 \\ f(1) \geq 2 \\ f(1/2) \geq -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq a + b \leq 5 \\ -1 \leq -a/2 + b \leq 2 \\ 4 \leq a/2 + b \leq 8 \end{cases} \begin{cases} f(b) \leq 6 \\ b \leq 6 \\ f(b) \geq -6 \\ b \geq -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b - a \leq 4 \\ 2 \leq a + b \leq 5 \\ 16 \leq a + 2b \leq 8 \end{cases} \begin{cases} a + b \geq 8 \\ a + 2b - b \leq 5 \\ b \geq 3 \end{cases} \begin{cases} 2b - a \leq 4 \\ a \geq 2 \end{cases}$$

$a + b \geq 2$ $a \geq -2$
 продолжение на б

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Заметим, что $A, B, C \in l_{np}$.

$$\frac{y-5}{x-1} = \frac{y-4}{x-1/2} = \frac{y-2}{x-1/2}$$

$$\frac{1}{2}-1 = \frac{y-5}{4-5} \quad \frac{2x-2}{1-2} = \frac{y-5}{1}$$

$$y = 2x + 3$$

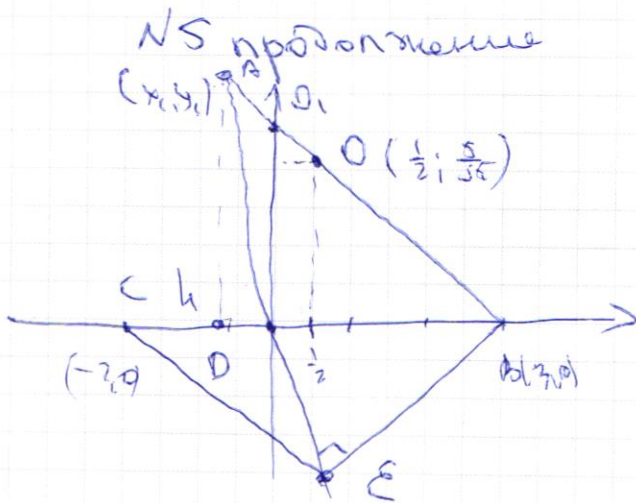
$$2 = -1 + 3 \quad \checkmark$$

При этом $a \neq b$ должно быть верно B на линии AC

↓

$$a = 2 \quad b = 3 \quad \text{только так}$$

Ответ: (2; 3)



$$A \in O, B \Rightarrow \frac{x-3}{-3} = \frac{y-5}{5/8}$$

$$-y_2 \cdot 5 = 2x_2 - 6$$

$$y_2 \cdot 5 = -2x_2 + 6$$

$$AO_1 = y = \frac{6}{5}$$

$$\frac{DB}{BB} = \frac{DO}{OB} \Rightarrow \frac{3}{3+x_1} = \frac{5/8}{5/8 - y_2}$$

$$5y_2 = 6 + 2x_1$$

$$\frac{DB}{DB+x_1} = \frac{BO}{AO_1} = 2x-y$$

$$E(x_2, y_2) \in AD: \quad \frac{3}{3+x_1} = \frac{5/8 \cdot 5}{5/8 \cdot 6} \Rightarrow 2 = 3+x_1$$

$$x_1 = -1, \quad y_1 = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

$$y_2 = -\frac{8}{5} x_2 \Rightarrow EB = \frac{5}{8} x + b_3 \Rightarrow 0 = \frac{3 \cdot 5}{8} + b_3 \quad b_3 = -\frac{35}{8}$$

$$\text{EIB: } \begin{cases} f_2 = \frac{\sqrt{5}}{8}x_2 - \frac{3\sqrt{5}}{8} \\ y_2 = -\frac{8}{\sqrt{5}}x_2 \end{cases} \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{8} \right) x_2 = \frac{3\sqrt{5}}{8} \cdot \sqrt{5}$$

$$\left(\frac{64}{5} + 5 \right) x_2 = 15 \cdot \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{25}{64+25} = \frac{25}{89} \quad y_2 = -\frac{8 \cdot 25}{89 \cdot \sqrt{5}} \quad \text{--- координаты}$$

$$\Rightarrow S_{\text{CEIB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 25}{89 \cdot \sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = \frac{75 \cdot \sqrt{5}}{89 \cdot \sqrt{5}} = \frac{75\sqrt{5}}{89}$$

$$S_{\text{BACE}} = \frac{25}{\sqrt{5}} + \frac{75\sqrt{5}}{89}$$

~~$$N3 \begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+10=0 \end{cases} \quad x^2-12x+2y^2-4y+10=0$$~~

~~$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{9 \cdot 4 - 2y^2 - 4y + 10}}{2} =$$

$$= 6 \pm \sqrt{-2y^2 + 4y + 26} = 6 \pm \sqrt{2(-y^2 + 2y + 13)}$$~~

~~$$D: -y^2 + 2y + 13 \geq 0 \quad y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 52}}{-2} = 1 \pm \sqrt{14}$$~~

~~$$1 - \sqrt{14} \quad 1 + \sqrt{14}$$~~

~~$$y \in [1 - \sqrt{14}; 1 + \sqrt{14}]$$~~

~~$$(x-6)(y-1) \geq 0$$~~

~~$$2y^2 - 4y + x^2 - 12x + 10 = 0$$~~

~~$$y = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 2x^2 + 24x - 20}}{2} =$$~~

~~$$= \frac{2 \pm \sqrt{-2x^2 + 24x - 16}}{2} \quad D = -2x^2 + 24x - 16 =$$

$$= -2(x^2 - 12x + 8)$$~~

~~$$\begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ x < 6 \\ y < 1 \\ x > 6 \\ y > 1 \\ x \cdot y \geq 0 \end{cases}$$~~

~~$$\text{if } x < 6 \text{ and } y < 1 \Rightarrow y \in [1 - \sqrt{14}; 1]$$

$$x \in [-6 - 2\sqrt{7}; 6]$$~~

~~$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 9 \cdot 8}}{2}$$~~

~~$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$~~

~~$$x^2 - 13xy + 6 + 3y^2 + 6y - 6 = 0$$~~

~~$$6 - 2\sqrt{7} \quad 6 + 2\sqrt{7}$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = \frac{13y - 1 \pm \sqrt{169y^2 + 1 - 26y - 12y^2 - 24y + 24}}{2}$$

$$= \frac{13y - 1 \pm \sqrt{157y^2 - 48y + 25}}{2}$$

1) ~~$y < \frac{1}{2} \Rightarrow x < 6 \Rightarrow 6 - \sqrt{-2y^2 + 4y + 26} = x$~~

2) $\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ \underbrace{(x-6)^2}_{a^2} + \underbrace{(y-1)^2}_{b^2} - 18 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ab = -6 \cdot b + 6 \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 18 \\ ab = a^2 + 36b^2 - 12ab \end{cases}$$

$$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$$

$$\begin{cases} a + 2b^2 = 18 \\ a^2 + 36b^2 - 13ab = 0 \end{cases} \quad \left(\frac{a}{b}\right) = c$$

$$c^2 - 13c + 36 = 0$$

$$c = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} c = 9 \\ c = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{b} = 9 \\ \frac{a}{b} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9b \\ a = 4b \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} x - 6 = 9y - 9 \\ x - 6 = 4y - 4 \end{cases}$$~~

1) $a = 9b$

$$81b^2 + 2b^2 = 18$$

$$83b^2 = 18 \quad b^2 = \frac{18}{83}$$

$$b = \sqrt{\frac{18}{83}} \quad b = \sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$a = \pm 9 = \sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$2) a = 4b$$

$$16b^2 + 2b^2 = 18$$

$$b = \pm 1$$

$$a = \pm 4$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x-6 = 9 \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{83}} \\ y-1 = 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} x-6 = -9 \cdot \sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1 = -3 \cdot \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x-6 = 4 & x=10 \\ y-1 = 1 & y=2 \end{cases} \quad \textcircled{4} \begin{cases} x-6 = -4 & x=2 \\ y-1 = -1 & y=0 \end{cases}$$

$$a - 6b \geq 0 \quad 1) 9b - 6b \geq 0 \quad 3b \geq 0 \Rightarrow b \geq 0$$

$$2) 4b - 6b \geq 0 \quad -2b \geq 0 \quad b \leq 0 \Rightarrow b \leq 0$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \begin{cases} x = 6 + 2 \sqrt{\frac{2}{83}} & ; & y = 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{83}} \\ x = 2 & & y = 0 \end{cases}$$