МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

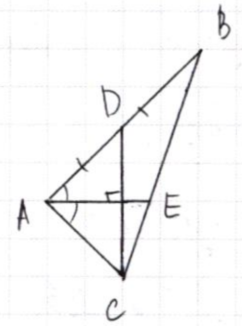
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Рассмотрим Δ-к у которого одна из медиан $\perp$-на одной из бессиктрис:

ΔABC



AE - бис-са

CD - медиана

Заметим, что для любого такого Δ-ка $AC = AD = 0{,}5\,AB$ (ΔADC равнобедр по признаку медиана = высота)

Пусть $AB = 2x$; $BC = y$ ($x; y$ - целые $\in \mathbb{N}$)

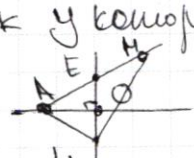
$\Rightarrow \quad 3x + y = 900$

$\Rightarrow x + \frac{y}{3} = 300 \quad \Rightarrow \quad y \vdots 3.$

Запишем неравенство Δ-ка:

$$\begin{cases} y + 2x > x \\ 3x > y \\ x + y > 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x \\ x > y/3 \end{cases} \quad \text{для любых } x; y \in \mathbb{N}$$

Заметим, что для всех подходящих под эти условия пар $(x; y)$ мы можем найти Δк у которого медиана $\perp$ бис-се (по th. cos. $y = x\cdot\sqrt{5 - 4\cos\alpha} \Rightarrow$ где α = угол из которого проведена бис-са



Возьмем две пересек-ся ($\perp$-но) прямые, Отметим A так, что $AO = x\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ отметим E так, что $\angle OAE = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AE = x$

Отметим $ME = AE$ и L так, что $OAL = \frac{\alpha}{2}$.

$\Rightarrow$ в Δ-ке AML AO - бис-са; LE - медиана $AO \perp EL$

и $AM = 2x$; $AL = x$; $LM = x\sqrt{5 - 4\cos\alpha} = y$ ч т д.)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow$ других ограничений на кол-во Δ-ков нет.

$x > \frac{y}{3} = 300 - x$

$\Rightarrow \quad 2x > 300 \quad x > 150$

$y > x > 150 \quad \Rightarrow$ т.к. $3x + y = 900$, то

$3x < 750 \quad \underline{x < 250}$, аналогично

" + " $\quad y < 450$.

$\Rightarrow \begin{cases} x \in (150; 250) \\ y \in (150; 450) \\ y \vdots 3 \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} y > x \\ x > \frac{y}{3} \end{matrix} \right)$ т.к. $y > x \quad x = \frac{900-y}{3}$

$y > \frac{900-y}{3}$

$\Rightarrow 4y > 900$

$\underline{y > 225}$

$\Rightarrow x < 225$

$\Rightarrow \quad x \in (150; 225)$

$y \in (225; 450)$

$\Rightarrow \min y \in \mathbb{N} \vdots 3 = 228 \quad \Rightarrow \max x = 224$

$\max y = 447 \quad \Rightarrow \min x = 151$

$\Rightarrow$ Всего вариантов: $224 - 151 + 1 = 74$

Ответ: 74.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$b = a\cdot q$ $\quad c = a\cdot q^2$ где q – какая-то неизвестная (множ. геометр. прогрессии)

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$ → заменим в предложенном в условии уравнении b и c.

$a(x-q)^2 = 0$

⇒ при условии $a \neq 0$ ⇒ $x = q$

⇒ т.к x – четвертый член геом. прогрессии, то $x = a\cdot q^3 = q$

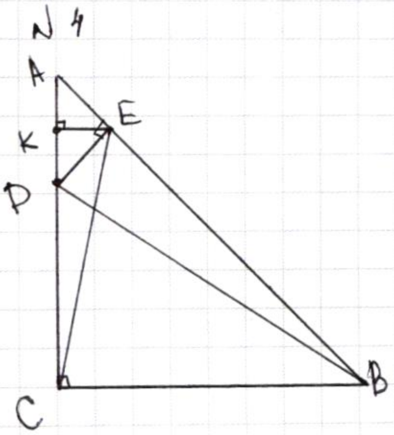
⇒ $a = \frac{1}{q^2}$ при $q \neq 0$

⇒ $c = a\cdot q^2 = 1$ $\quad (a \neq 0;\ q \neq 0)$

Если же $a = 0$ либо $q = 0$, то $c = 0$.

Ответ: 1.

№4



$AD : AC = 1:3$; $\angle CED = 30^\circ$

$DE \perp AB$ | $tg\angle BAC$ – ?

Решение:

① Пусть $AD = x$ ⇒ $AC = 3x$; $DC = 2x$.

② Четырехугольник BCDE – вписанный (т.к $\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ$ ⇒ сумма противолеж-х углов $= 180^\circ$)

⇒ $\angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$ – по признаку впис-ых четыр-ов.

③ $tg\angle DBC = tg 30^\circ = \frac{2x}{CB}$

$tg\angle BAC = \frac{CB}{3x} = \cancel{2x}\frac{1\cdot 2}{\frac{2x}{CB}\cdot 3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{tg 30^\circ} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{3}}{1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ⓐ Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Отметим точку $k \in AD$, такую, что $Ek \perp AD$.

Пусть $DE = 2y \Rightarrow$ т.к. $DE / AE = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ($\triangle ADE$)

$\Rightarrow AE = \sqrt{3} \cdot y$

$\Rightarrow AE^2 + DE^2 = AD^2 = x^2$ $\qquad 3y^2 + 4y^2 = x^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{7}\, y$ (т.к. $x; y > 0$)

Пусть $Ak = z \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$ $\frac{kE}{Ak} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ($\triangle AkE$)

$\Rightarrow kE = 2z$

$Ak^2 + kE^2 = AE^2$

$3z^2 + 4z^2 = 3y^2 = 3 \cdot \frac{x^2}{7} = 7z^2$

$\Rightarrow z^2 = \frac{3x^2}{49} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}\,x}{7}$

$\Rightarrow kE = 2 \cdot z = \frac{2 \cdot \sqrt{3}\,x}{7}$

$\Rightarrow S_{CED} = \frac{kE \cdot CD}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}\,x}{7 \cdot 2} \cdot 2x =$ вспомним, что $AC = \sqrt{7} = 3x$ $=$
$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$= \frac{\cancel{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 \cdot 2}{\cancel{7} \cdot 7} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{9} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

б) Ответ: $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

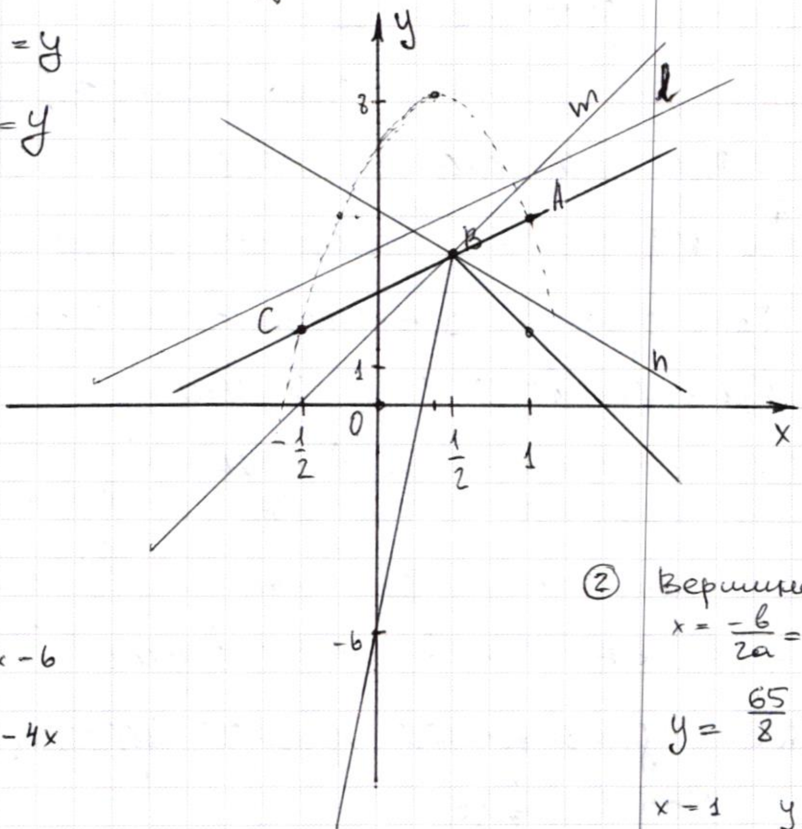
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Начертим графики обеих функций: $[-\frac{1}{2}; 1]$

① $8x - 6|2x-1| = y$

② $-8x^2 + 6x + 7 = y$



① $x = \frac{1}{2}$ $y = 4$

$\Rightarrow$ $x < \frac{1}{2}$ $y = 20x - 6$

$x > \frac{1}{2}$ $y = 6 - 4x$

② Вершина

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{8}$

$y = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$

$x = 1$ $y = 5$

$x = -1/2$ $y = 2$

точка: $A(1;5)$

$B(1/2; 4)$

$C(-\frac{1}{2}; 2)$

Заметим, что прямая, проходящая через точки ABC удовлетворяет условию. Для такой прямой

$a = 2$ $b = 3$.

Докажем, что другие прямые не подходят.

1 в. ① прямая ∥-а AB. • Если в точке $x = \frac{1}{2}$ $y < y_B$, то она не подходит т.к. $ax + b < 8x - 6|2x-1|$

• Если в точке $x = \frac{1}{2}$ $y > y_B$, то в $x = -\frac{1}{2}$ $y_C < y$

$\Rightarrow$ она тоже не подходит т.к. $ax+b > -3x^2+6x+7$.

2в. Другой угол наклона, но проходит через В.

(т) Пусть угол наклона > чем у АВ, тогда
при $x=1$ $y > y_A$ Ш

(п) Пусть угол наклона < чем у АВ, тогда
при $x=-\frac{1}{2}$ $y > y_C$ Ш

= Нетрудно заметить что композиция изменения угла наклона и парал-ного переноса даёт все возможные варианты прямых
$\Rightarrow$ композиция 1 варианта и 2го тоже вызовет противоречие с условием.

(~~Если угол наклона > чем у АВ~~
Если угол наклона < чем у АВ и $f(\frac{1}{2}) > B$ $\Rightarrow$ $f(-\frac{1}{2}) > y_C$
Если угол наклона > чем у АВ и $f(\frac{1}{2}) > B$ $\Rightarrow$ $f(1) > y_A$
Если $f(\frac{1}{2}) < B$ Ш в любом случае) Ш

$\Rightarrow$ АВ — единственная прямая подходящая под условие

Ответ: $(2;3)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

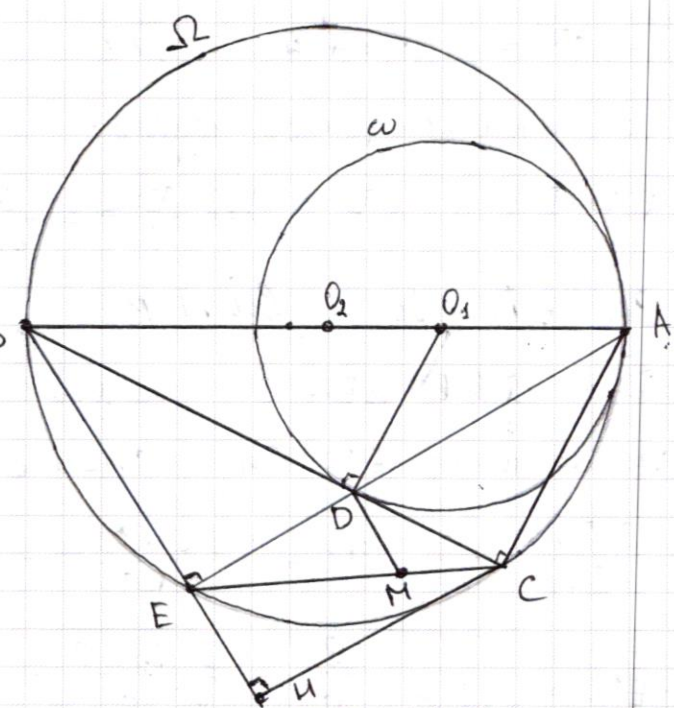
№5

O_1 - центр ω

O_2 - центр Ω

R - радиус Ω

r - радиус ω



$CD = 2$

$BD = 3$

$\Rightarrow BC = 5$

Решение.

1) D - точка касания $\Rightarrow O_1D \perp BC$

2) $AC \perp BC$ т.к $\angle BCA$ опирается на диаметр AB

3) из и (1-2) $\Rightarrow O_1D \parallel AC$

$\Rightarrow$ из подобия треугольников BO_1D и BAC ($\angle B$-общий, $\angle O_1DB = \angle ACB = 90°$)

$$\Rightarrow \frac{BO_1}{BD} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{array}{l} 10R - 5r = 6R \\ 4R = 5r \quad r = 0{,}8R \end{array}$$

4) Из прямоугольного треугольника $BO_1D \Rightarrow$

$$(2R-r)^2 = BD^2 + DO_1^2 = 3^2 + r^2$$

$$4R^2 + r^2 - 4Rr = 9 + r^2$$

$$4R^2 - 4Rr - 9 = 0 \Rightarrow 4R^2 - 3{,}2R^2 - 9 = 0$$

$$0{,}8R^2 = 9 \qquad R = 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$r = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

Ответ: $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$; $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

Теперь найдем площадь BACE:

① $AC = \sqrt{BA^2 - BC^2} = \sqrt{(2R)^2 - BC^2} = \sqrt{9 \cdot 5 - 25} = \sqrt{20}$

② $AD = \sqrt{DC^2 + AC^2} = \sqrt{20 + 4} = \sqrt{24}$

③ По теореме о пересекающихся хордах:

$BD \cdot DC = ED \cdot DA \Rightarrow ED = \frac{BD \cdot DC}{DA} = \frac{6}{\sqrt{24}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$

④ Проведем $CH \parallel ED$; $H = CH \cap BE$.

$\Rightarrow \triangle BED$ и ~~$\triangle BCH$~~ $\triangle BHC$ – подобны

($\angle B$ общий; $ED \parallel CH$, $CH \perp BE$)

$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{ED}{CH} \Rightarrow CH = \frac{ED \cdot BC}{BD} = \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{5}{\sqrt{6}}$

⑤ $BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{54-9}{6}} = \sqrt{\frac{45}{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow$ ⑥ $S_{CEB} = \frac{BE \cdot CH}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{5}{\sqrt{6}}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot 5}{6 \cdot 2} =$

$= \frac{5\sqrt{5}}{4}$

⑦ $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot 5}{2} = \sqrt{5} \cdot 5$

⑧ $S_{BACE} = S_{ABC} + S_{CEB} = \sqrt{5} \cdot 5 + \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{4 \cdot 5\sqrt{5} + 5\sqrt{5}}{4} =$

$= \frac{25}{4} \cdot \sqrt{5}$

Ответ: $\frac{25}{4}\sqrt{5} = S_{BACE}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$ $\Rightarrow$ ОДЗ: $xy-6y-x+6\geqslant 0$

$x-6y\geqslant 0$

$x\geqslant 6y$

$x(y-1)\geqslant 6(y-1)$

$y>1 \Downarrow x\geqslant 6$ $\quad$ $y<1 \Downarrow x\leqslant 6$

$y=1 \Downarrow x$ – любой

$y>1 \Downarrow \begin{cases}x\geqslant 6\\ x\geqslant 6y>6\end{cases}$ $\quad$ $y<1 \Downarrow \begin{cases}x\leqslant 6\\ x\geqslant 6y\end{cases}$ $\Leftarrow$

$y=1 \Downarrow x\geqslant 6$

$$\begin{cases}(x-6y)^2=(y-1)(x-6) \quad ①\\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \quad ②\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0\\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0\end{cases} \ominus$$

$$34y^2-13xy+10y+13x-26=0$$

$$(y-1)13x=26-10y-34y^2 \quad \div \text{ с } ①$$

$\underline{y\neq 1}$ $\quad \dfrac{13x}{x-6}=\dfrac{26-10y-34y^2}{x^2+36y^2-12xy}$

(при $y=1$ ~~...~~ нет решения)

при $y>1$ ② $\Rightarrow D=144-8(y^2-2y+20)$

вершина функции $y^2-2y+20$ $y=1$

$\Rightarrow y>1$ $f(y)>19 \Rightarrow D<0$ при любых $y>1$

~~$\Rightarrow$ у ... $\leqslant 6$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№7

Если $x \vdots y$, то $x : y = \alpha$

$$f(\alpha) = \left[\begin{array}{l} \left[\frac{\alpha}{2}\right] \geqslant 0 \\ \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots \geqslant 0 \end{array} \right.$$ где k, m, n – простые делители α.

$\Rightarrow x \not\vdots y$ (*) $f(x) > 0$.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{где} \quad f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) - f(y \cdot 2) = 1 - f(2y)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \quad \text{если} \quad \begin{cases} \left|f(x)\right| < \left|f\left(\frac{1}{y}\right)\right| \\ f(2y) > 1 \end{cases}$$

$f(2y) > 1$ для любых целых $y > 1$ т.к $f(2) = 1$.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + 1 - f(2y) \qquad f(x) + 1 < f(2y)$$

* Стоит отметить, что для целых чисел $f(a) > 0$ т.к пусть $k; m; n; b \ldots$ – простые делители числа a. Тогда $f(a) = f(km) + f(nb\ldots) =$

$$= f(k) + f(m) + \ldots + f(n) + \ldots > 0 \text{ т.к}$$

$$f(k) > k - 1 > 0$$

$\Rightarrow$ ~~при $x = 2$ $y \geqslant 3$; $x = 3$ $y \geqslant 4$; $x = 4$ $y \geqslant 4$~~

Составим таблицу значений функции для натуральных чисел от 2 до 22.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

число yz	2; 3	4; 5; 6; 9	7; 8; 10; 12; 15; 18;
$f(yz)$	1	2	3

$f(z)$	4	5	6	8
z	14; 16; 20; 21	11	13; 22	17

$f(z)$	9
z	19

Для любого x, чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ нужно чтобы $f(zy)$ было на 2 больше, чем $f(x)$.

$\Rightarrow$ $x=2$: $y = 4; 5; 6; 9; 7; 8; 10; 11$

$x=3$: $y =$

$x=4 \rightarrow y = 7; 8; 10; 11$

$x=5$ $\quad$ $x=6$ $\quad$ $x=9$

$x=7 \rightarrow y = 11$

$x = 8$ $\quad$ $x=10$ $\quad$ $x=12$ $\quad$ $x=15$ $\quad$ $x=18$

~~$x=11 \rightarrow y=11$~~

$x=13$ $\quad$ $x=22$ $\quad$ $x=11$; $x=19$; $x=17$ $\quad$ $y \in \varnothing$

$x=14, 16, 20, 21 \Rightarrow y = 11.$

$\Rightarrow$ Всего вариантов : ↓

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$S = 2\cdot 8 + 4\cdot 4 + 6\cdot 1 + 4\cdot 1 = 16 + 16 + 6 + 4 = 32 + 10 =$

$= 42.$

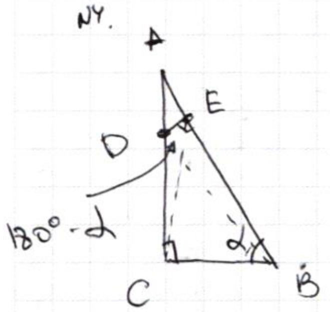
Ответ: 42 варианта.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

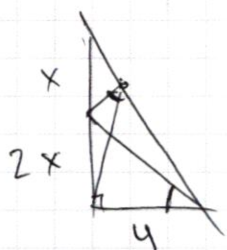
N4.



$AD:AC = 1:3$ $\quad tg\ BAC$

$\angle CED = 30°$

$180° - 30° - 180° + \alpha = \alpha - 30°$



$\frac{2x}{y} = tg\,30°$

$\frac{3x}{y} = tg\,\alpha = \frac{2x \cdot 3}{y \cdot 2} = \frac{3}{2} tg\,30°$

$AC = \sqrt{7}$

$\frac{2}{3}\sqrt{7}$

$\frac{\sqrt{7}}{3}$

N4

N5.

$144 - 4(2y^2 - 4y + 20)$

$144 - 8(y^2 - 2y + 20)$

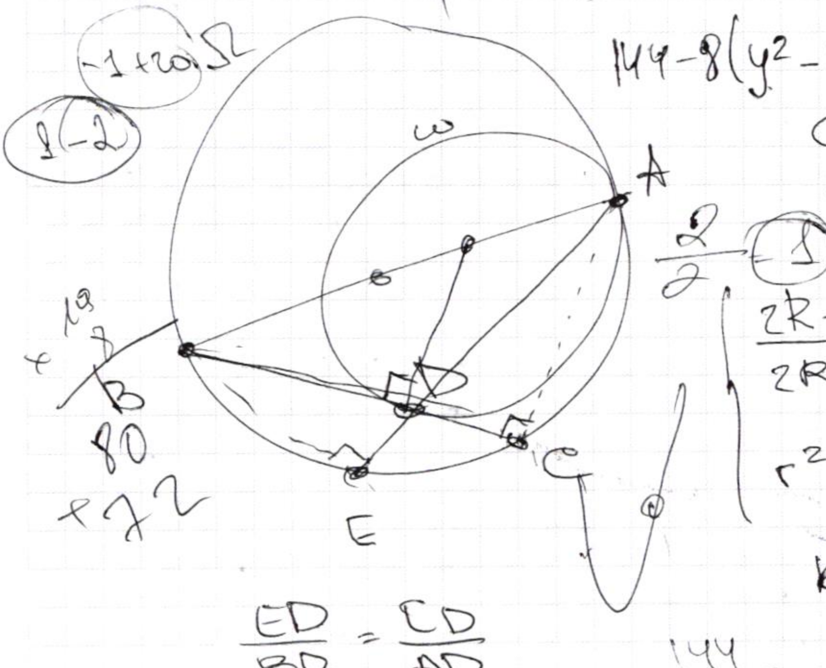
$\frac{ED}{DA} = \frac{BD \cdot DC}{DA^2}$

$CD = 2$

$BD = 3$

$-1 + 20$

$1(-2)$



$\frac{2}{2} = 1$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$

$r^2 + BD^2 = (2R - r)^2$

$R = \ldots$ $\qquad ED \cdot DA = 6$

$\frac{ED}{BD} = \frac{CD}{AD}$

$ED = \frac{CD \cdot BD}{AD}$

$\frac{144}{8} = 18$ $\quad r = \ldots$ 18

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№1.

$a; b; c \qquad a=a \quad b=a\cdot q \quad c=a\cdot q^2$

$ax^2-2\cdot aqx+aq^2=0$

$D=\cancel{(4aq} \; 4q^2a^2-4\cdot a\cdot aq^2=$
$=0$

$\Rightarrow \dfrac{+2aq}{2a}=q$

$(x-q)^2=0$

$\cancel{q} \; x=q.$

$\cancel{a} \; q=a\cdot q^3$

$a=\dfrac{1}{q^2}$

$\Rightarrow c=1.$

1	2:3	
2	4:5; 6:9	
3	$\cancel{7:8}$; 10:12	
4		
5	11	
6		

$8=2\cdot2\cdot2=1+1+1$

№ 3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

ОДЗ:
$xy-6y-x+6\geq 0$

$9=3\cdot3=1+1$

$12=3\cdot2\cdot2$

$1+2$

$\underline{x\geq 6y}$

$x^2+36y^2-12xy=xy-6y-x+6$

$x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0$

$\cancel{-8}\;\cancel{2y^2-2y}$

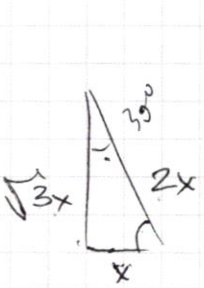
$x^2-12x+20-4y+2y^2=0$

$D=144-4\cdot(20-4y+2y^2)=144-80+16y-8y^2=-(8y^2-16y-64)$

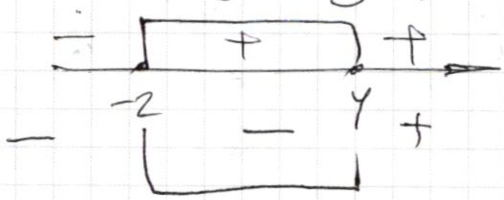
$x=\dfrac{+12\pm\sqrt{D}}{2}$

$-8(y^2-2y-8)$

$-8(y+2)(y-4)$



$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$\dfrac{2}{\sqrt{3}}= \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°$

$y\in[-2;4]$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$-4x+6=y$

$8x-12x+6=y$

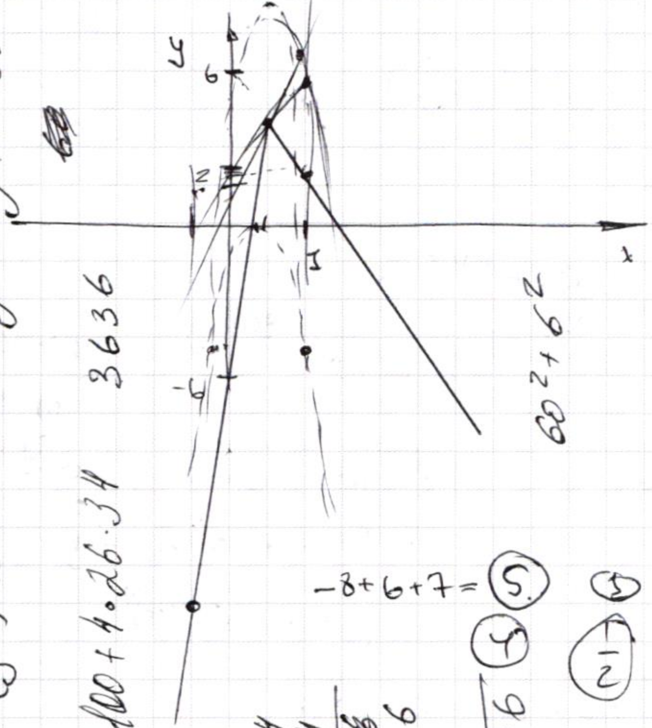
$2x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{2}$

$8x - 6 + 12x = 20x - 6$

$2x<1$

$x<\frac{1}{2}$



$\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$\frac{10\pm\sqrt{D}}{-2\cdot 34}$

$36+4\cdot7\cdot8 = 36+224 = 260$

$-8+6+7 = 5$

1

4

$\frac{1}{2}$

$\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\cdot 8} = \frac{3}{8}$

$-8\cdot\frac{9}{64} + \frac{6\cdot 3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + \frac{56}{8} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}.$

$-8\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{2} + 7 =$

$= -2-3+7 = 2.$

$\begin{cases} a+b=5 \\ \frac{a}{2}+b=4 \end{cases}$

$b=3$

$\frac{a}{2}=1$ $\quad a=2$

$34y^2 - 13xy + 10y + 13x - 26 = 0$

$2\cdot 17y^2 + 13x(y-1) - 26 + 10y = 0$

$(y-1)13x = 26 - 10y - 34y^2$

$60^2 = 3600$

$100+4\cdot 26\cdot 34$

3636

60^2+6^2

$104\cdot 34 = 3536$

2

$x^2-12x = -20+y-2$

$x^2-12x+18=0$

$36-12=24$

$36+18=54$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\mathbb{R}^+$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

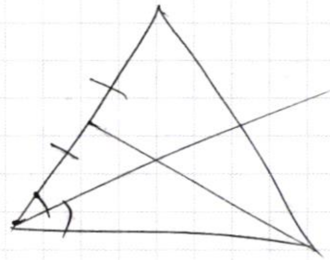
$f(p) = [p/2]$

$2 \le x \le 22$

$2 \le y \le 22$

$\} \; f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$

$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{22}$



$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(xy) = f(x) + f(y)$

$x^2 - 6x =$

$x(x-6) = -2y^2 + 6x + 4y - 20$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$x \geq 6y$

$\sqrt{xy - 6y - x + 6} \geq 0$

$y > \frac{900 - y}{3}$

$3y > 900 - y$

$4y > 900$

$y >$

$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$

$\sqrt{x^2 + 4x^2 - 2 \cdot \cos\alpha \cdot x \cdot 2x} = y$

$\sqrt{5x^2 - 4x^2 \cos\alpha} = y$

$y = x \cdot \sqrt{5 - 4\cos\alpha}$

$$\begin{cases} x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$34y^2 - 13xy + 6y + x - 6 + 12x + 4y - 20 = 0$

$\begin{array}{r} 900 \\ -225 \\ \hline 675 \end{array}$

$34y^2 - 13xy + \cancel{12x} \; 13x + 10y - 26 = 0$

$\cancel{y(34y + 10) = 13x}$

225.

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 36 - 13\frac{x}{y} + \frac{4}{y} + \frac{x}{y^2} \cdot 3 \cdot (1-y) - \frac{6}{y^2} = 0$

$\frac{y}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}} > \frac{y}{3}$

3 4 5 6 7

$7 - 3 = 4 \quad +1$

$3x$ и y - целые

min 3

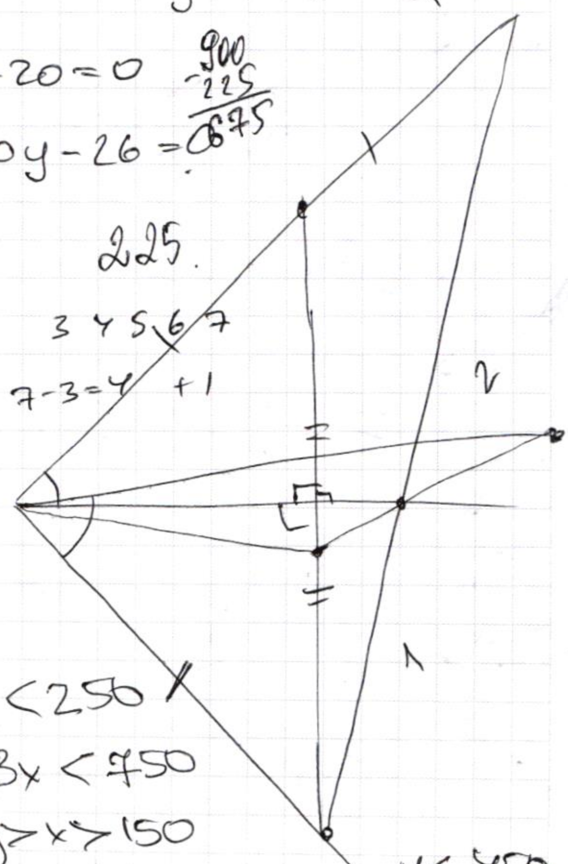
max 7

$3x + y = 900.$

$x + \frac{y}{3} = 300$

$\Rightarrow y \vdots 3.$

$$\begin{cases} y > x \\ x > \frac{y}{3} \end{cases}$$



$$\begin{cases} y + 2x > x \\ 3x > y \\ x + y > 2x \end{cases}$$

$x < 250$

$\Rightarrow 3x < 750$

$y > x > 150$

$y < 450$

$x > 300 - x$

$x > 150$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)