МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть q — шаг геометрической прогрессии. То есть $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, где $a_1, a_2 \dots a_{n+1}$ — последовательные члены геометрической прогрессии.

Тогда $b = q \cdot a$; $c = q^2 \cdot a$.

Подставим b и c в уравнение.

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$, при $a \neq 0$ | Если $a = 0$, то $c = a \cdot q^2 = 0$

$x^2 + 2qx + q^2 = 0$,

$(x+q)^2 = 0$,

$\underline{x = -q}$.

Т.к. корень этого уравнения — четвертый член геометрической прогрессии, то его можно представить, как $q \cdot c$.

$\Rightarrow$ $q \cdot c = -q$, при $q \neq 0$ | Если $q = 0$, то $c = a \cdot q^2 = 0$

$\underline{c = -1}$.

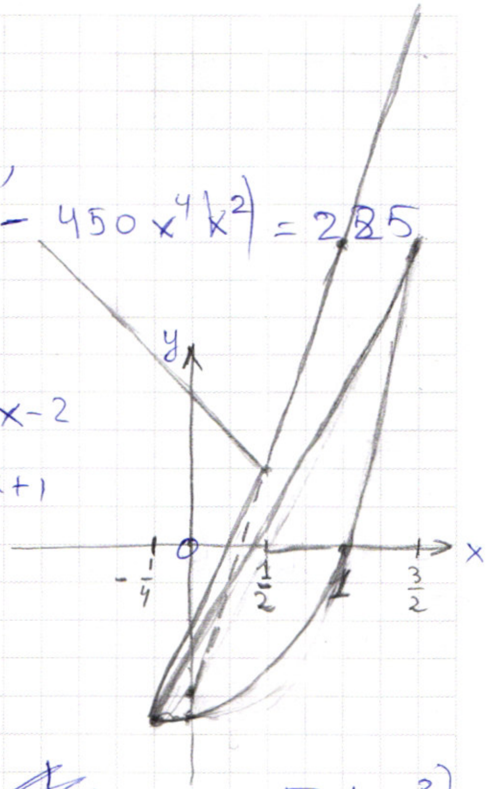
Ответ: $\begin{cases} -1, a \neq 0, q \neq 0; \\ 0, (a = 0 \text{ или } q = 0) \text{ или } (a = 0 \text{ и } q = 0). \end{cases}$

$a = 25k^2x^2 - 9x^2$

$5kx\left(25x^2 + k^2\left(25k^2x^2 - 9x^2\right)^2\right) = 225,$

$125kx^3 + 5kx\cdot\left(625k^6x^4 + 81x^4k^2 - 450x^4k^2\right) = 225$

$\cancel{x}\ 125kx^3 +$



$\left[\begin{array}{l} 4x - y - 2 = 0; \\ x - y + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = y + 2 \\ x = y - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4x - 2 \\ y = x + 1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 - ax - b \le 0 \\ x + |2x-1| - ax - b \ge 0 \end{cases}$

$\frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$\begin{cases} 2x^2 - x(a+1) - 1 - b \le 0 \\ x + 2x - 1 - ax - b \ge 0 \\ x(3-a) - 1 - b \ge 0 \end{cases}, x \ge \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$

$b \in \left[-1; -\frac{9}{8}\right]$

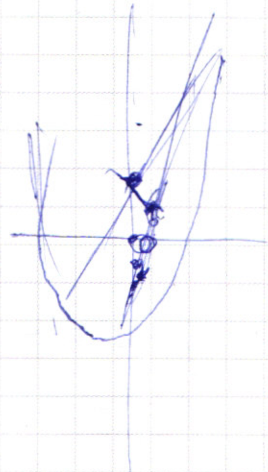
$\begin{cases} 2x^2 - x(a+1) - 1 - b \le 0 \\ x - 2x + 1 - ax - b \ge 0 \\ -x(a+1) + 1 - b \ge 0 \end{cases}, x \le \frac{1}{2}$

$2x^2 - \cancel{x(a+1)} - 1 - \cancel{b} \le -\cancel{x(a+1)} + 1 - \cancel{b},$

$2x^2 \le 2,$

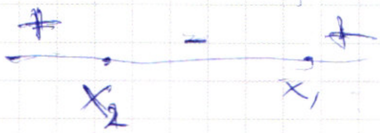
$x^2 \le 1$

$|x| \le 1$



$2x^2 - x(a+1) - 1 - b \le 0$

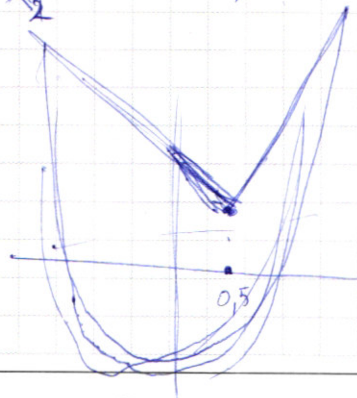
$D = (a+1)^2 + 8 + 8b$



$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{x(a+1) + \sqrt{(a+1)^2 + 8 + 8b}}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{x(a+1) - \sqrt{(a+1)^2 + 8 + 8b}}{4} = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 0} = 3$

$\frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

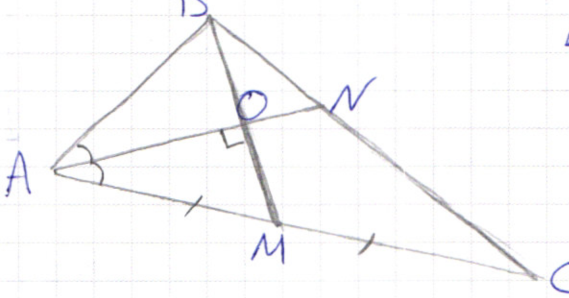
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Докажем, что если одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан, то одна из сторон в два раза больше другой.



ΔABC

AN - биссектриса.
$(\angle BAO = \angle OAM)$

BM - медиана.
$(AM = MC)$

O - точка пересечения AN и BM.

$AN \perp BM$.

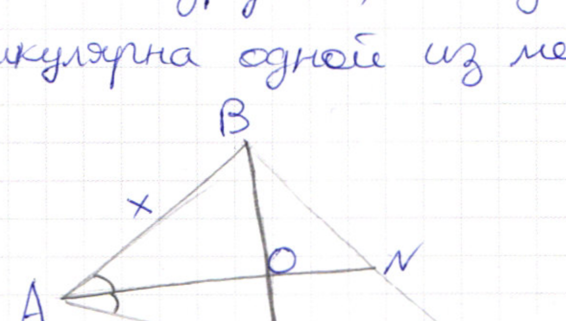
~~ΔAOM - прямоугольный~~

$\Delta AOM = \Delta AOB$ т.к.

$\angle AOM = 90°$, AO - общая, $\angle BAO = \angle OAM$

$\Rightarrow AB = AM \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 2$

Докажем, что если одна сторона в два раза больше другой, то одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.



ΔABC

AN - биссектриса
$(\angle BAO = \angle OAM)$

BM - медиана
$(AM = MC)$

O - точка пересечения AN и BM. $AC = 2AB$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$$

Рассмотрим 1 уравнение системы.

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$,

$(y-2x)^2=xy-2x-y+2$,

$y^2+4x^2-4xy-xy+2x+y-2=0$,

$y(y-x)+4x(x-y)+4x-y-2x+2y-2=0$,

$(4x-y)(x-y)+4x-y-2x+2y-2=0$,

$(4x-y)(x-y+1)-2(x-y+1)=0$,

$(4x-y-2)(x-y+1)=0$,

$$\left[\begin{array}{l} y=4x-2; \\ y=x+1. \end{array}\right.$$

ОДЗ

$$\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ xy-2x-y+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ y(x-1)-2(x-1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ (y-2)(x-1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 2 \\ x\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq 2 \\ x\leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Подставим во 2 уравнение системы.

1.) $y=4x-2$

$2x^2+16x^2+4-16x-4x-16x+8+3=0$,

$18x^2-32x+15=0$

$D=1024-1080<0$

Решений нет

2.) $y=x+1$

$2x^2+x^2+1+2x-4x-4x-4+3=0$,

$3x^2-6x=0$,

$3x(x-2)=0$,

$$\left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=2. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1, \\ x=0; \end{cases} \\ \begin{cases} y=3, \\ x=2. \end{cases} \text{(не удовлетворяет ОДЗ)} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=0$; $y=1$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

Пусть $AB=x$, тогда $AC=2x$. Т.к. BM - медиана, то $AM=x$.

$\Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный ($AB=AM$). Т.к. AO - биссектриса, то AO - высота $\Rightarrow \angle AOM=90^\circ$

Пусть стороны равны a, b, c, тогда

$$\begin{cases} a+b>c, \\ a+c>b, \\ b+c>a; \end{cases}$$

~~Т.к.~~ Пусть $b=2a$, тогда

$$\begin{cases} 3a>c, \\ c>a, \\ a+c>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a>c, \\ c>a. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ~~$c \geq 303$ и $c \leq 597$~~

$c>300$ и $c<600$

~~Т.к.~~ Если вычесть c из периметра, то получим $3a$, что делится на 3. Т.к. 1200 тоже делится на 3, то c делится на 3.

$\Rightarrow c \geq 303$ и $c \leq 597$

Будем выбирать c, равное числу, которое делится на 3 и лежит в промежутке $[303; 597]$. Тогда остальные стороны определены.

№6

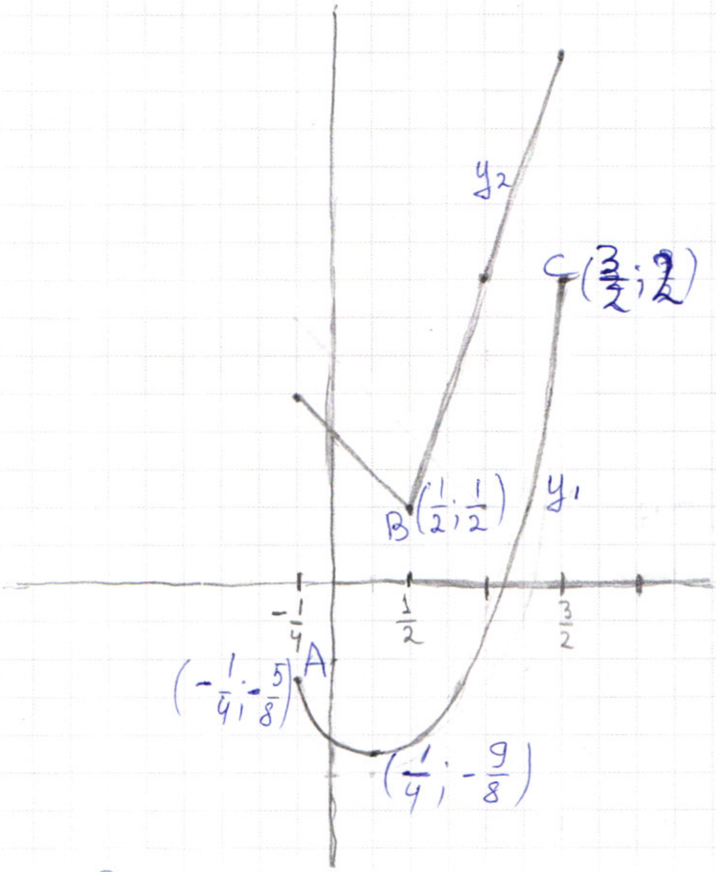
~~$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$~~

~~Составим аналогичную систему~~

~~$\begin{cases} 2x^2-x-1 \le ax+b, \\ ax+b \le x+|2x-1|; \\ x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2-x-1 \le ax+b, \\ ax+b \le x+2x-1, \ x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2-x-1 \le ax+b, \\ ax+b \le x-2x+1, \ x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right); \end{cases} \end{array}\right.$~~

Рассмотрим вто

Построим графики функций $y_1=2x^2-x-1$ и $y_2=x+|2x-1|$ на отрезке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$



Заметим, что точки A, B и C лежат на одной прямой $\left(\dfrac{2-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)$ => есть только одна прямая $(ax+b)$, которая находится не выше y_2 и не ниже y_1 (на отрезке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$).

Это и есть прямая, проходящая через точки A, B и C.

Её коэффициент наклона равен

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

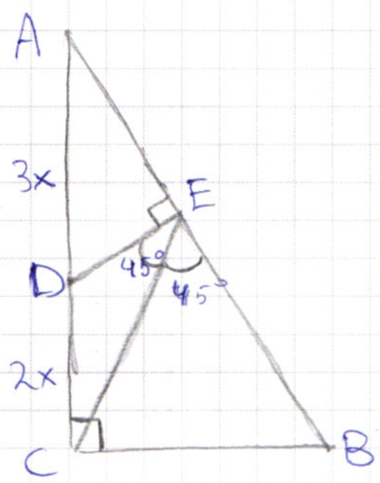
№2 (продолжение)

Они равны ~~[illegible]~~ $\frac{1200-c}{3}$ и $\frac{2}{3}\cdot(1200-c)$

Количество вариантов взять c равно $\frac{600-300}{3}-1$ $=99$.

Ответ: 99.

№4



Т.к. $\angle DCB=90^\circ$ и $\angle DEB=90^\circ$, то $\angle DCB+\angle DEB=$ $=180^\circ$

$\Rightarrow$ DEBC - вписанный

~~$=$ CD $=$ BC, т.к. напротив~~

~~$y=a_1$~~ $y_1 = ax_1 + b$

$y_2 = ax_2 + b$

$b = y_1 - ax_1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 (продолжение)

$a = \frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$. Тогда $b = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

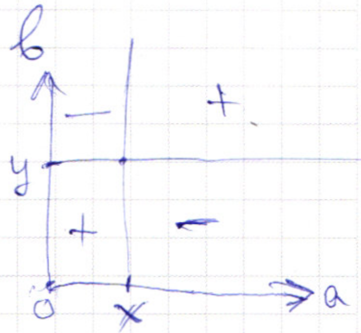
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y-2x>0,$
$y>2x$

$2(x^2-2x+1)+y^2-4y+4-3=0$

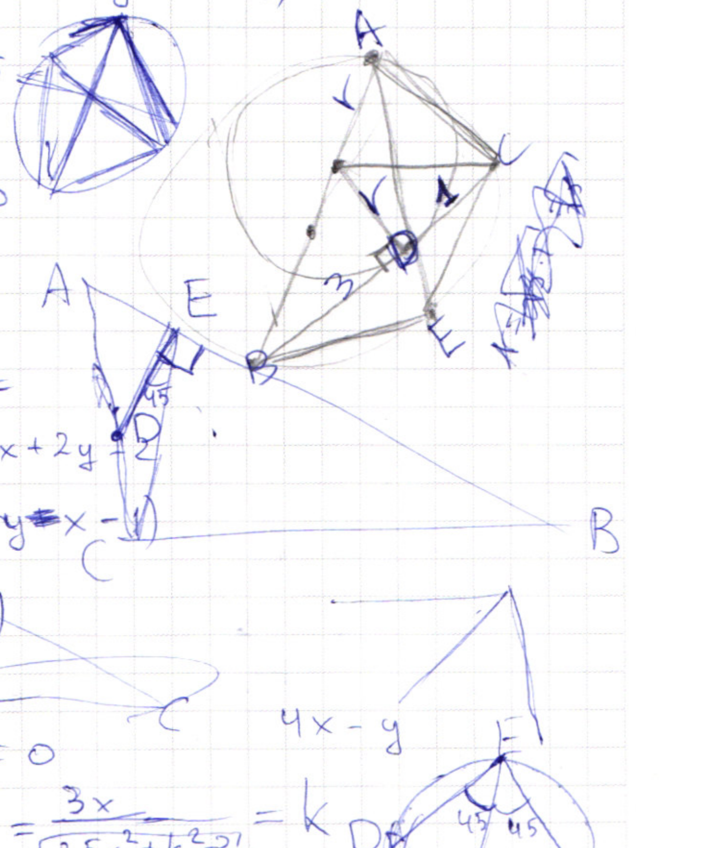
$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$



$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2,$

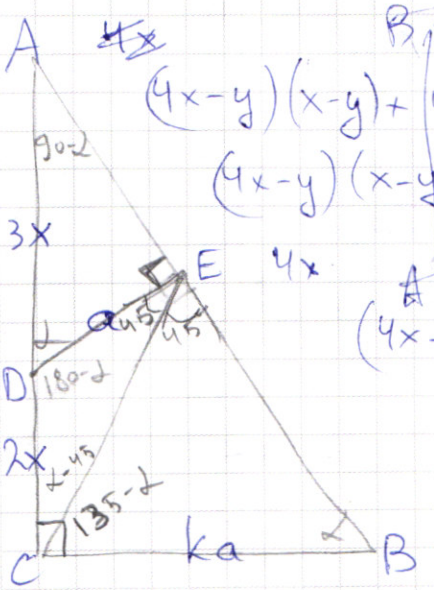
$y^2+y+\frac{1}{4}+4x^2+2x+\frac{1}{4}=5xy+2{,}5,$

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2=5xy+2{,}5$



$$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y(y-x)+4x(x-y)+2x+y-2$

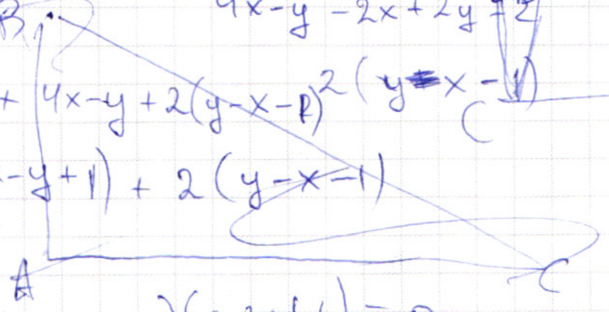


$4x-y-2x+2y-2$

$(4x-y)(x-y)+4x-y+2(y-x-1)$

$(4x-y)(x-y+1)+2(y-x-1)$

$(4x-y-2)(x-y+1)=0$



$4x-y$

$\frac{\sqrt{9x^2+a}}{5x}=\frac{3x}{\sqrt{25x^2+k^2a^2}}=k$

$\sqrt{9x^2+a}\cdot\sqrt{25x^2+k^2a^2}=15$

$(9x^2+a)(25x^2+k^2a^2)=225$

$\sqrt{9x^2+a}=5kx$

$y(x-1)-2(x-1)=(y-2)(x-1)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1

$ax^2+2bx+c=0$

$\frac{c}{q^2}x^2+\frac{2c}{q}x+c=0$

$x^2+2qx+q^2=0$

$\cancel{D=4q^2-4q^2}$ $(x+q)^2=0$

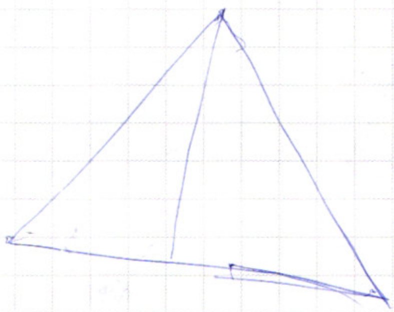
$\underline{x=-q}$.

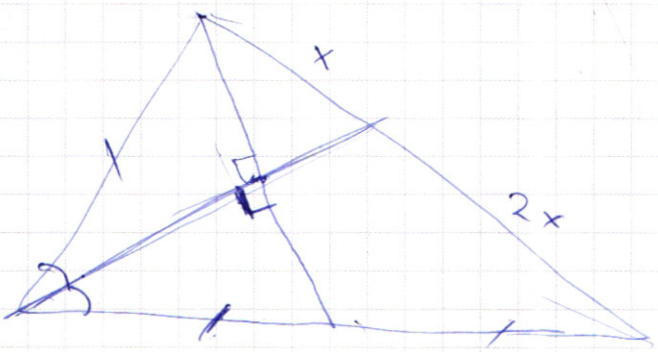
$c\cdot q=-q$,

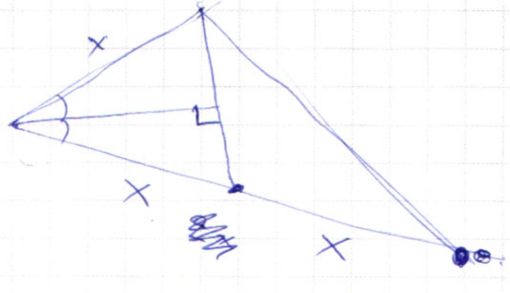
$\underline{c=-1}$.

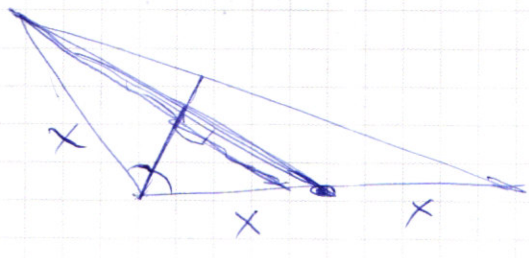
№2

$P=1200$, $a,b,c\in N$









$b=2a$

1200

$3a>c$

$a+c>2a$

$2a+c>a$

$a+b>c$

$a+c>b$

$b+c>a$

$3a>c$

$a<c$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)