

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Возьмем прямую проходящую через точки $(0,5; 0,5)$ и $(\frac{3}{2}; 2)$

$$ax + b = 0,5x + 0,5$$

$$ax + 0,5a + b = 0,5$$

$$\begin{cases} 1,5a + b = 2 \end{cases}$$

$$a = +1,5 \quad b = -0,25 \quad y = 1,5x - 0,25 \quad \text{Проверим точку } (\frac{1}{4}; \frac{5}{8})$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 1,5 - 0,25 = -\frac{5}{8}, \text{ верно. Значит, если мы захотим}$$

сохранить точку $(0,5; 0,5)$ и при увеличении крутизны, то
себя ~~и точка~~ будет иметь ~~то~~ $-\frac{5}{8}$, что недопустимо.

По ~~A~~ Пошае произойдет если мы сместим среднюю
точку ~~В~~ ~~и~~ $(0,5; 0,5)$. А сместят линию ~~тоже~~
верхнюю точку C , но не обходится условие, что
 $\tau.A$ ~~лине~~ 2. Следовательно ответ только один.

$$a = 1,5 \quad b = -0,25$$

$$\text{Ответ: } (1,5; -0,25)$$

Задача 7

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

П.к. $f(p) = \lceil p/2 \rceil \forall p \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathbb{N}$, то

если x -простое, то $f(x) = 0$, аналогично

если y -простое, то $f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow$ Такие пары как
 $(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 5), (1; 7)$ и т.д. не подходят.

Предположим оставшиеся подходят, тогда 21^2 - всего

~~кар~~ ~~9.21-кар~~ ~~с 9.9-кар~~ с простыми числами
Остается $441 - 81 = 360$

Омлет: 360

Задача 3

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$y \geq 2x$$

$$\begin{cases} xy-2x-y+2-y^2+4xy-4x^2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

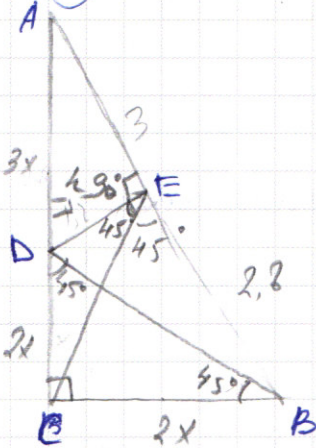
$$y \geq 2x$$

$$\begin{cases} xy-2x-y+2-y^2+4xy-4x^2=0 \\ 2(x-2)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $D \in AC$, $E \in AB$,
 $AD:DC = 3:2$, $DE \perp AB$, $AC = \sqrt{29}$, $\angle CED = 45^\circ$
Найти: $\angle BAC$ и S_{CED} ?

Решение:

1. $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90^\circ$

$\angle DEB + \angle DEB = 180^\circ \Rightarrow \angle DEB$ - вписанный 4-х угольник $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$

$\triangle DCB$ - прямоугольный, $\Rightarrow \angle DCB = 45^\circ \Rightarrow \triangle DCB \in p/b \Rightarrow DC = CB$

3. Пусть $AD = 3x$, тогда $AD:DC = 3:2 \Rightarrow AC = 5x \Rightarrow DC = AC - AD = 2x$. $BC = DC$ (по 1-ому пункту) $\Rightarrow BC = 2x$

$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = 0,4$

4. $\triangle ACB$, $\angle C = 90^\circ$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 29x^2 \Rightarrow AB = x\sqrt{29}$

$AC = \sqrt{29} \Rightarrow 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$ $AB = \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{29} = 5,8$

$BC = 2x = 0,4\sqrt{29}$

$AD = 3x = 0,6\sqrt{29}$

5. $\triangle DEB \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$
(по 2-м углам)
($\angle A$ общий, $\angle ACB = \angle AED$)

~~$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{\sqrt{29}}$ $\frac{AE}{\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow AE = 3$ $\frac{ED}{0,4\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow ED = 1,2$~~

~~$\Rightarrow ED = 1,2$~~

~~$EB = AB - AE = 5,8 - 3 = 2,8$~~

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{0,6\sqrt{29}}{5,8} = \frac{3}{29}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{0,6\sqrt{29}}{5,8}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{0,6\sqrt{29}}{5,8} \Rightarrow AE = 3$$

$$\frac{ED}{BC} = \frac{0,6\sqrt{29}}{5,8} \Rightarrow ED = \frac{0,6\sqrt{29} \cdot 2,9}{5,8} = \frac{2,4 \cdot 2,9}{5,8} = 1,2$$

$$EB = AB - AE = 5,8 - 3 = 2,8$$

В. У треугольников DEC и DEA - общая высота \Rightarrow

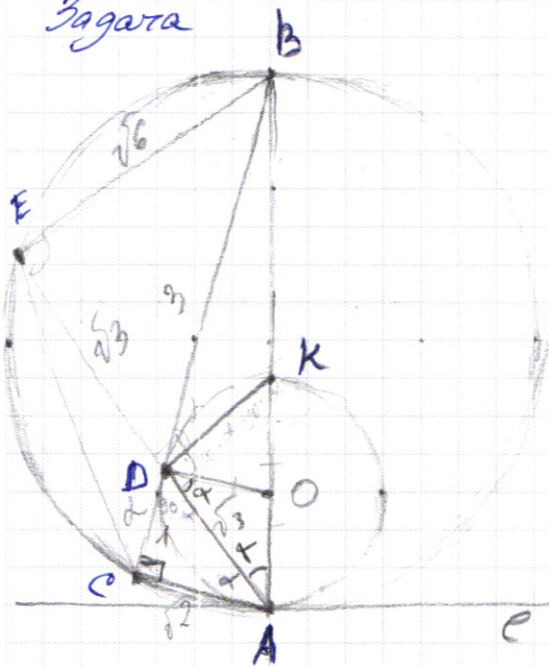
$$\frac{S_{DEC}}{S_{DEA}} = \frac{DC}{DA} \quad S_{DEC} = \frac{S_{DEA} \cdot DC}{DA} = \frac{2}{3} S_{DEA}$$

$$S_{DEA} = DE \cdot AE : 2 = 3,1,2 : 2 = 1,8 \quad \text{т.к. } \triangle DEA - \text{прямоугольный}$$

$$S_{DEC} = \frac{2}{3} \cdot 1,8 = 1,2$$

Ответ: $\angle BAC = 0,4 \quad S_{DEC} = 1,2$

Задача



Дано: Ω касается ω в точке A,

AB - диаметр, $AB \cap \omega = K$, BC -

- хорда Ω , BC - касательная ω в т. D, $AD \cap \Omega = E$, $CD = 1$, $BD = 3$
R - радиус Ω , r - радиус ω

Найти: R, r, S_{BACE} - ?

Решение:

0. Проведем касательную ℓ к окружности ω через т. A. AB - диаметр, $\Rightarrow AB \perp \ell$, $K \in AB \Rightarrow AK \perp \ell \Rightarrow AK$ - диаметр ω .

1. $\angle O$ - центр ω . и $\angle DAK = \alpha$

AK - диаметр ω , $\angle ADK$ - вписанный $\Rightarrow \angle ADK = 90^\circ$, т.к. он опирается на диаметр.

$\angle DAK = \alpha \Rightarrow \angle ADK = 90 - \alpha$ (по св-ву углов треугольника)

O - центр ω , $\Rightarrow AO = OD = OK = r$. $AO = OD \Rightarrow \triangle DOA$ - р/б \Rightarrow

$\Rightarrow \angle DAO = \angle ADO = \alpha$

2. BC - касательная к ω , D - т. касания, $\Rightarrow OD$ - радиус, \Rightarrow

$\angle ODC = 90^\circ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\angle ADO = \alpha \Rightarrow \angle ADC = \angle ODC - \angle ADO = 90 - \alpha$$

3. AB -диаметр Ω , $\angle BCA$ - вписанный $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$,
т.к. он опирается на диаметр.

$$\triangle DCA, \angle C = 90^\circ \angle CDA = 90 - \alpha \Rightarrow \angle CAD = \alpha = \angle DAO$$

$$\triangle CAK, \angle CAD = \angle DAO \Rightarrow AD - биссектриса. \Rightarrow \frac{DK}{AK} = \frac{DC}{AC}$$

$$(\text{по св-ву биссектрисы}) \text{ т.е. } \frac{3}{AK} = \frac{1}{AC} \Rightarrow AK = 3AC$$

$$4. \triangle BCA, \angle C = 90^\circ$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ и } AK = 3AC, BC = BD + CD = 4$$

$$AK^2 = 9AC^2 = AC^2 + 16 \Rightarrow AC = \sqrt{2} \text{ и } AK = 3\sqrt{2}$$

$$AB\text{-диаметр} \Rightarrow R = 1,5\sqrt{2}$$

$$5. \triangle DCA, \angle C = 90^\circ \quad AD^2 = DC^2 + AC^2 = 1 + 2 = 3 \quad AD = \sqrt{3}$$

$$AE \text{ и } BC - \text{ хорды, } AE \cap BC = D \Rightarrow CD \cdot BD = AD \cdot DE$$

$$DE = \sqrt{3} = AD$$

6. AB -диаметр Ω , $\angle AEB$ - вписанный $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

$$\angle AEB = 90^\circ, \angle KDA = 90^\circ \Rightarrow KD \parallel BE \text{ (т.к. они перпенд. } \overset{AE}{\text{одному}})$$

$$\triangle AEB \quad \begin{cases} AD = DE \\ DK \parallel EB \end{cases} \Rightarrow KD - \text{ медиана } \triangle AEB \Rightarrow AK = KB = \frac{1}{2} AB = 1,5\sqrt{2}$$

$$AK\text{-диаметр } \omega \Rightarrow r = 0,75\sqrt{2}$$

$$7. \triangle BED, \angle BED = 90^\circ \quad BE^2 = \sqrt{DB^2 - ED^2} = \sqrt{6}$$

$$S_{BED} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

~~$$\triangle DCA, \angle DCA = 90^\circ \quad \cos \alpha = \frac{DC}{DA} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$~~

~~$$S_{DCA} = \frac{DC \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$~~

$$\triangle DCA, \angle DCA = 90^\circ$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Delta EDC, \angle EDC = 180 - (90 + \alpha) = 90 + \alpha$$

$$\sin(90 + \alpha) = \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$S_{EDC} = \frac{ED \cdot DC \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta BCA, \angle BCA = 90^\circ$$

$$S_{BCA} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{EBCA} = S_{BCA} + S_{EDC} + S_{EBD} = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $R = 1,5\sqrt{2}$, $r = 0,75\sqrt{2}$, $S_{BACE} = 4,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 1

$$a = a$$

$$b = a \cdot q$$

$$c = a \cdot q^2 = b \cdot q$$

$$d = a \cdot q^3 = b \cdot q^2$$

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$a \cdot (a \cdot q^3)^2 + 2 \cdot a \cdot q \cdot a \cdot q^3 + a \cdot q^2 = 0$$

$$a^3 \cdot q^6 + 2 \cdot a^2 \cdot q^4 + a \cdot q^2 = 0$$

$$a \cdot q^2 (a^2 q^4 + 2 \cdot a q^2 + 1) = 0$$

$$a \cdot q^2 = 0 \quad \text{или} \quad (a \cdot q^2 + 1) = 0$$

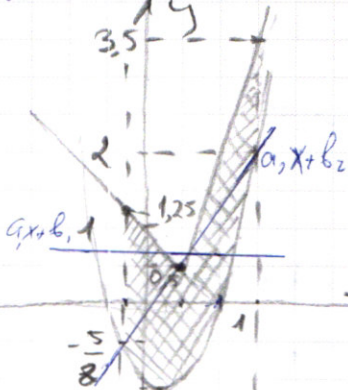
Тогда $b = 0$

$$a \cdot q^2 = -1 = c$$

Ответ: -1

Задача 6

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + 12x - 1$$



$$f(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$g(x) = x + 12x - 1$$

$$f(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{8}$$

$$g(-\frac{1}{4}) = 1,25$$

$$f(\frac{3}{2}) = 2$$

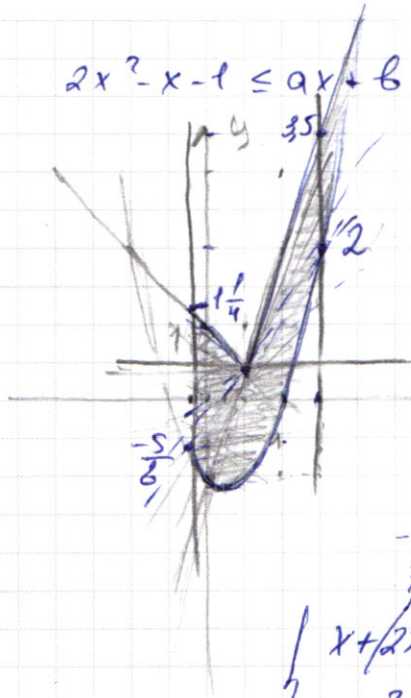
$$g(\frac{1}{5}) = 3,5$$

Прямая $ax + b$ с одной стороны, должна быть выше 2, а с другой не ниже $-\frac{5}{8}$ и выше точки $(0,5; 0,5)$

Поэтому вариант $a=0$ не подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + (2x - 1) \quad a, b - ? \text{ для всех } x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$$



$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$x + (2x - 1)$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$x + 2x - 1 = y \Rightarrow y = 3x - 1$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$-x + 1 = y$$

$$\frac{1}{2}$$

$$3 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0,5$$

$$\left. \begin{array}{l} x + (2x - 1) \\ 2x^2 - x - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -x + 1 = 1 - \frac{1}{4} \\ y = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8} \end{array}$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$$

$$x + (2x - 1) \quad y = 3x - 1 = 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 4,5 - 1 = 3,5$$

$$2x^2 - x - 1 \quad y = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2,5 - 1 = 1,5$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Горизонтальная прямая:

$$a = 0 \quad 0,5 \leq b \leq 2 \quad \text{Нет таких}$$

Прямые через τ - модуля:

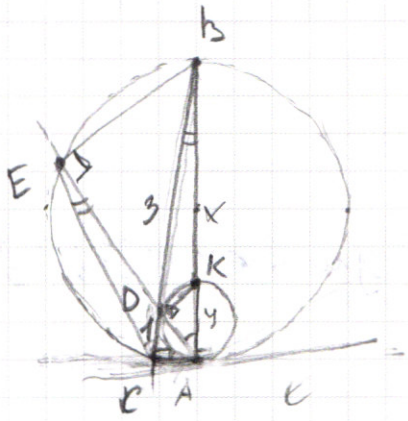
$$(0,5; 0,5) \text{ и } (1,5; 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} ax + b = y \\ ax + b = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,5a + b = 0,5 \\ 1,5a + b = 2 \end{array}$$

$$-1a = -1,5$$

$$a = 1,5 \quad \text{не подходит}$$

и

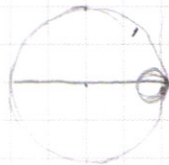


$$\cos 90+30 = \cos 60$$

$$= \sin 30$$

$$\cos 90+\alpha = \sin \alpha$$

$$2+1=3$$



$$90-\alpha - 90+2\alpha$$

$$\frac{1}{MA} = \frac{3}{AB}$$

$$AB = 3MA$$

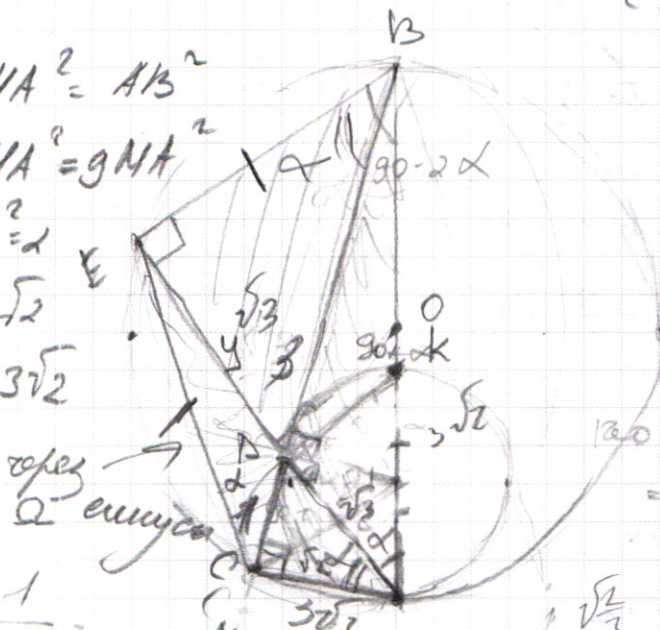
$$4^2 + MA^2 = AB^2$$

$$16 + MA^2 = 9MA^2$$

$$MA^2 = 2$$

$$MA = \sqrt{2}$$

$$AB = 3\sqrt{2}$$



$$k \cdot l = xy$$



0,75\sqrt{2}

1,5\sqrt{2} \text{ diam } \omega

3\sqrt{2} \text{ diam } \Omega

$$(AK + KB)^2 = 16 + AM^2$$

$$180 - 90 - \alpha - \alpha = \frac{y}{3}$$

$$= 90$$

$$3 \cdot 1 = x \cdot y$$

$$\sqrt{3} \cdot y = 3 \cdot 1$$

$$y = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3} = \dots$$

$$\frac{y}{1} = \frac{3}{x}$$

$$x = \frac{3}{y}$$

$$x = \frac{3}{y}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot 1 = x \cdot y$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{3}$$

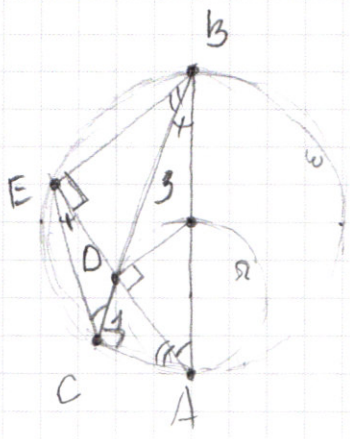
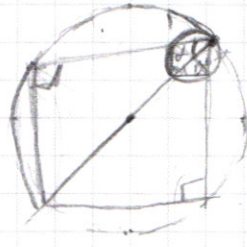
$$x = \frac{y}{3}$$

$$x = 3y$$

1:1	2:1	3:1
1:2	2:2	
1:3	2:3	
1:4	2:4	
1:5	2:5	
1:6	2:6	
1:7	2:7	
1:8	2:8	
1:9	2:9	

1 2 3 5 7 11 13 17 19
6

1) $441 - 81 = 360$
 $440 - 80 = 360$



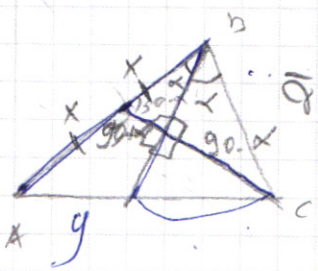
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ xy - 2x - y + 2 - y + 2x = 0 \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2 q^3)^2 \cdot a + 2b \cdot a \cdot q^3 + c = 0 \\ (c \cdot q)^2 \cdot a + 2b \cdot c \cdot q + c = 0 \\ (b \cdot q^4)^2 \cdot a + 2b \cdot b \cdot q^4 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = -a^3 q^6 - 2baq^3 = -\sqrt{a^3 q^6} \cdot \sqrt{a q^6} = -\sqrt{a^4 q^8} = -a^2 q^4$$

$$\begin{aligned} a^3 \cdot q^6 + 2a^2 q^4 + a q^2 &= 0 \\ (\sqrt{a^3 q^6} + \sqrt{a q^2})^2 &= 0 \\ \sqrt{a^3 q^6} + \sqrt{a q^2} &= 0 \\ a \cdot q^2 &= 0 \end{aligned}$$

Или $a=0$ или $q=0$ $c = a \cdot q = 0$

Задача



1) $f(ab) = f(a) + f(b)$
 $f(p) = p/2$
 $f(x/y) = f(x) + f(1/y)$
 $f(1) = 0$
 $f(1) = 0$ — это частный случай

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a = a_0 \cdot q^{n-1}$$

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$b = a \cdot q^2$$

$$c = b \cdot q = a \cdot q^3$$

$$d = c \cdot q = b \cdot q^2 = a \cdot q^4$$

$$d = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$-b \pm \sqrt{b^2 - ac} = a^2 \cdot q^3$$

$$= ba \cdot q^2 = ca \cdot q$$

$$-b \pm \sqrt{b^2 - ac} = a^2 \cdot q^3$$

$$-b \pm \sqrt{b^2 - ac} = a \cdot q^3$$

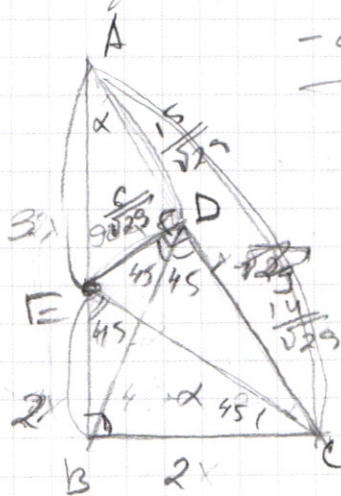
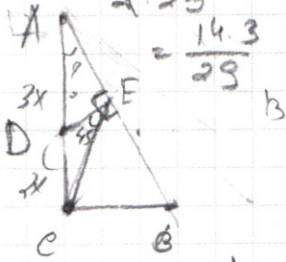
$$-b \pm \sqrt{b^2 - ac} = b \cdot q^2$$

$$-b \pm \sqrt{b^2 - ac} = a^2 \cdot q^3 + b$$

$$b^2 - ac = b^2 + 2baq^2 + a^2q^4$$

$$S_{DEFC} = \frac{14}{\sqrt{29}} \cdot \frac{6}{\sqrt{29}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{14 \cdot 6}{2 \cdot 29} =$$



$$-ac = 2ba^2q^3 + a^4q^6$$

$$180 - 90 + \alpha - 45 =$$

$$= 45 + \alpha$$

$$180$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{2x}{5x} = 0,4$$

$$DC = \sqrt{29} - 15 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{29 - 15}{\sqrt{29}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$$

$$\sqrt{25x^2 + 4x^2} =$$

$$= x\sqrt{29}$$

$$\frac{3x}{x\sqrt{29}} = \frac{4}{5x}$$

$$\frac{3x}{x\sqrt{29}} = \frac{4}{2x}$$

$$c = \frac{15}{\sqrt{29}}$$

$$y = \frac{6x^2}{x\sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{29}} \cdot x$$