МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Т.к $a; b; c; d$ (d - четвертый член прогрессии) являются членами геометрической прогрессии, то

a

$b = a \cdot q$

$c = a \cdot q^2$

$d = a \cdot q^3$

$$a(x^2) - 2bx + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a(a \cdot q^3)^2 - 2(a \cdot q)(a \cdot q^3) + a \cdot q^2 = 0$$

корень уравнения $\quad a^3 \cdot q^6 - 2a^2 q^4 + a q^2 = 0$

$$a \cdot q^2 (a^2 q^4 - 2 \cdot a q^2 + 1) = 0$$

$$a \cdot q^2 (a q^2 - 1)^2 = 0$$

Т.к $a \cdot q^2 \neq 0$, то $a q^2 - 1 = 0$

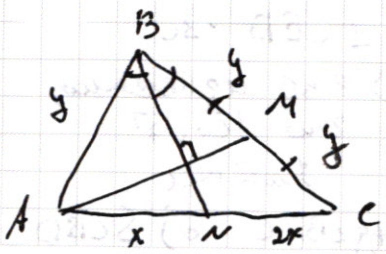
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a q^2 &= 1 \\ a q^2 &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c = 1$

Ответ: третий член прогресии равен 1

№2



Дано:
$\triangle ABC$
AM - мед.
BN - бисс.
$BN \perp AM$

Пусть $BM = y$, тогда $BC = 2y$

$$\left.\begin{matrix} \text{Т.к } BN \perp AM \\ BN\text{- бисс} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABM\text{- р/б} \Rightarrow AB = BM = y \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$$

Т.к BN- бисс, то $\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AN : NC = 1 : 2$

Пусть $AN = X \Rightarrow NC = 2X \Rightarrow AC = 3X$

Итак $P_{ABC} = 3y + 3X = 900$

$\Updownarrow$

$X + y = 300$

Т.к $y \in \mathbb{Z}$, то X тоже $\in \mathbb{Z}$

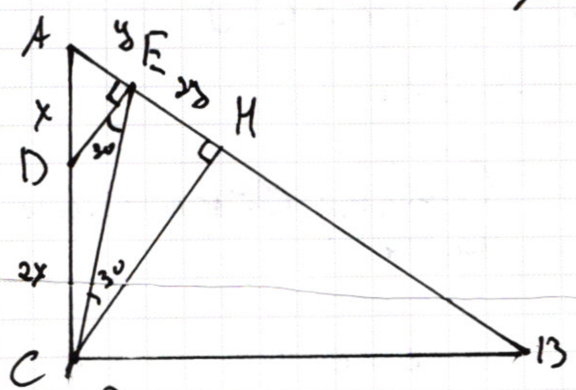
$$\begin{cases} X + y = 300 \\ 3X + y > 2y \\ 3X + 2y > y \\ 3y > 3X \end{cases} \quad \begin{cases} X + y = 300 \\ 3X > y \\ 3X > -y \text{ (всегда)} \\ y > X \end{cases} \quad \begin{cases} X + y = 300 \\ 3X > y > X \end{cases} \Rightarrow$$

Для каждого значения X существует ровно одно значение y

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} X_{min} = 76 \\ X_{max} = 149 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{всего пар: } 149 - 76 + 1 = 74 \text{ пары}$$

Ответ: 74 пары

№4



Дано:

а) ABC- прямоуг.

$D \in AC$; $E \in AB$

$AD : AC = 1 : 3$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 30°$

б) еще известно, что $AC = \sqrt{7}$

Найти

а) $tg\angle BAC$ б) S_{CED}

Решение

а) Пусть $AD = X$, тогда $AC = 3X \Rightarrow CD = 2X$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проведём высоту CH в $\triangle ABC$, тогда

$\triangle DAE \sim \triangle CAH \Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$.

Пусть $AE = y$, тогда $EH = 2y$

Т.к $DE \parallel CH$, то $\angle DEC = \angle ECH = 30^\circ \Rightarrow tg\angle ECH = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow CH = 2\sqrt{3}y \Rightarrow tg\angle BAC = tg\angle HAC = \frac{CH}{AH} = \frac{2\sqrt{3}y}{3y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $AC = 3x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ По т. Пифагора в $\triangle HAC$:

$(3x)^2 = (3y)^2 + (2\sqrt{3}y)^2 \Rightarrow 3x^2 = 7y^2 \Rightarrow \frac{3\cdot 7}{9} = 7y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$DE = \cancel{\frac{2\sqrt{3}y}{3}}\ AE \cdot tg\angle EAD = \frac{2\sqrt{3}y}{3}$

$CE = 2EH = 4y = \frac{4}{\sqrt{3}}$

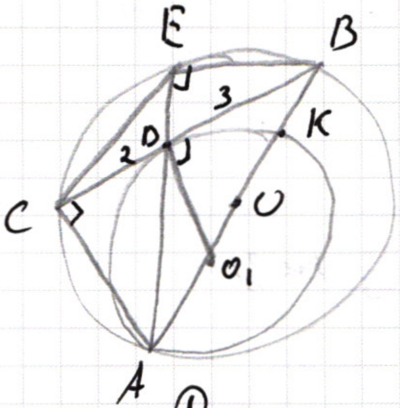
$\Rightarrow S_{CED} = \frac{1}{2}\cdot DE \cdot CE \cdot \sin\angle CED =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}y}{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5



Дано:

$\Omega(O;R) \cap \omega(O_1;r) = A$

AB - диаметр Ω

$BC \cap \omega = D$

$AD \cap \Omega = E$

$CD = 2$

$BD = 3$

Найти

$R; r; S_{BACE}$

Решение.

$\left.\begin{array}{l} DB^2 = BK \cdot BA \\ BK = (2R - 2r) \\ BA = 2R \end{array}\right\} \Rightarrow$

$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$ (1)

$\left.\begin{array}{l} O_1D \perp BC, \text{ т.к } BC \text{ - кас} \\ AC \perp BC, \text{ т.к } \angle ACB \text{ опир. на диаметр и равен } 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle O_1DB \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BO_1}{BA} \\ BO_1 = 2R - r \\ BA = 2R \\ BC = CD + DB = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{3}{5} = \dfrac{2R - r}{2R} \Rightarrow 10R - 5r = 6R \Rightarrow r = \dfrac{4}{5}R \\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 = \left(2R - \dfrac{8}{5}R\right) \cdot 2R$

$9 = \dfrac{4}{5}R^2 \Rightarrow R = \dfrac{3}{2}\sqrt{5} \Rightarrow r = \dfrac{6}{5}\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{45 - 25} = 2\sqrt{5}$

(по Т. Пифагора)

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{20 + 4} = 2\sqrt{6}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CD \cdot DB = AD \cdot DE \Rightarrow DE = \dfrac{CD \cdot DB}{AD} = \dfrac{2 \cdot 3}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = AD + DE = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

$\cos\angle ADC = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{2}{2\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Итак: $S_{ACEB} = \cdot AE \cdot BC \cdot \cos\angle ADC =$

$= \cdot \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{25}{2} = 12{,}5$

Ответ: $R = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

$r = \dfrac{6}{5}\sqrt{5}$

$S_{BACE} = 12{,}5 = \dfrac{25}{2}$

№6.

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6|2x-1| \le ax+b \\ -8x^2 + 6x + 7 \ge ax+b \end{cases}; \quad \begin{cases} 8x - ax - b \le 6|2x-1| \\ -8x^2 + 6x + 7 - ax - b \ge 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8x - ax - b \le 12x - 6 \\ -8x^2 + 6x + 7 - ax - b \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -8x + ax + b \ge 12x - 6 \\ -8x^2 + 6x + 7 - ax - b \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(-a-4) - b + 6 \le 0 & (1) \\ -8x^2 + x(6-a) + 7 - b \ge 0 & (3) \end{cases} \\ \begin{cases} x(a-20) + b + 6 \ge 0 & (2) \\ -8x^2 + x(6-a) + 7 - b \ge 0 & (3) \end{cases} \end{array}\right.$

Сделаем так, чтобы каждое из неравенств (1); (2); (3) выполнялось на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

(1); пусть $f(x) = x(-a-4) - b + 6$

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) \le 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{a}{2} + 2 - b + 6 \le 0 \\ -a - 4 - b + 6 \le 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a - 2b + 16 \le 0 \\ a + b - 2 \ge 0 \end{cases}$$

(2): пусть ~~g(x)~~ $g(x) = x(a-20) + b + 6$.

$$\begin{cases} g\left(-\frac{1}{2}\right) \ge 0 \\ g(1) \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 10 - \frac{a}{2} + b + 6 \ge 0 \\ a - 20 + b + 6 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a - 2b - 32 \le 0 \\ a + b - 14 \ge 0 \end{cases}$$

(3) $k(x) = -8x^2 + x(6-a) + 7 - b$ — парабола ветви вниз,

$$\begin{cases} k\left(-\frac{1}{2}\right) \ge 0 \\ k(1) \ge 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -\frac{8}{4} + \frac{a}{2} - 3 + 7 - b \ge 0 \\ -8 + 6 - a + 7 - b \ge 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a - 2b + 4 \ge 0 \\ a + b - 5 \le 0 \end{cases}$$

Итак: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 2b + 16 \le 0 \\ a + b - 2 \ge 0 \\ a - 2b + 4 \ge 0 \\ a + b - 5 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 2b - 32 \le 0 \\ a + b - 14 \ge 0 \\ a - 2b + 4 \ge 0 \\ a + b - 5 \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$ Пусть $a - 2b = t$, $a + b = m$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t + 16 \le 0 \\ m - 2 \ge 0 \\ t + 4 \ge 0 \\ m - 5 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t - 32 \le 0 \\ m - 14 \ge 0 \\ t + 4 \ge 0 \\ m - 5 \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} t \le -16 \\ m \ge 2 \\ t \ge -4 \\ m \le 5 \end{cases}$$ ~~решений нет.~~ решений нет.

$$\begin{cases} t \le 32 \\ m \ge 14 \\ t \ge -4 \\ m \le 5 \end{cases}$$ решений нет..

таких ~~с~~ пар не существует

Ответ: таких пар нет.

№7

Если $\frac{x}{y}$ - простое, то выполняется $f(p) = [p/2]$ ≥ 0

если оно не простое, то выполняется

$f(ab) = f(a) + f(b)$ Если a и b простые, то ≥ 0

Если a и b не простые процедура повторяется $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственный вариантом остается: $\frac{x}{y} = 1$

Таких пар. 22 шт.

Ответ: 22 штуки.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a b c

$b = a\cdot q$

$c = a\cdot q^2$

$d = a\cdot q^3$

$a\cdot(a\cdot q^3)^2 - 2(a\cdot q)(a\cdot q^3) + a\cdot q^2 = 0$

$a^3\cdot q^6 - 2a^2q^4 + a\cdot q^2 = 0$

$a\cdot q^2(a^2\cdot q^4 - 2\cdot a\cdot q^2 + 1) = 0$

$\ne 0$

$a^2q^4 - 2\cdot aq^2 + 1 = 0$

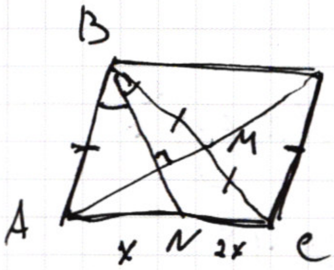
$(aq^2-1)^2 = 0$

$aq^2 - 1 = 0$

$aq^2 = 1 = c$

№2

$P = 90$



$\boxed{3x+3y}$

$x \in \mathbb{Z}$

$y \in \mathbb{Z}$

$3x + y > 2y$ и

$3x + 2y > y$ и

$3y > 3x$ и

448

$3x > y$

$3x > -y$

$y > x$

!!!

$\begin{cases} x + y = 300 \\ 3x > y > x \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 300 \\ -28 \\ \hline 20 \end{array} \Big| \begin{array}{l} 4 \\ \hline 75 \end{array}$$

$x_н = 76$

$x_к = 150$

$$\begin{array}{r} 150 \\ -76 \\ \hline 74 \end{array}$$

75 пар

$$\begin{array}{r} 76 \\ \times 3 \\ \hline 228 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ -76 \\ \hline 224 \end{array}$$

224

228

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases};\quad \begin{cases} (x-6y)^2=y(x-6)-(x-6) \\ (x-6)(y-1)\geq 0 \\ x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0 \end{cases}$$

$$2(y^2-2y+1)$$

$$\cancel{(x-6y)^2}=(x-6)(y-1)$$

$$\cancel{x^2-12xy+36y^2-xy+6y+x-6=0}$$

$$\cancel{x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0}$$

$$(x-6y)^2-xy+x+6y-6=0$$

$$(x-6y)^2-xy-x+6y+2x-6=0$$

$$(x-6y)^2-xy-(x-6y)+2x-6=0$$

$$(x-6y)(x-6y-1)+2x-xy-6=0$$

$$\begin{cases} (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \ (1) \\ (x-6)(y-1)\geq 0 \\ (x-6y)^2=(x-6)(y-1) \end{cases}$$

Посл. под.

$$(x-6)^2+2\sqrt{2}(x-6)(y-1)+2(y-1)^2=$$

$$=18+2\sqrt{2}(x-6y)^2$$

$$((x-6)+\sqrt{2}(y-1))^2=18+2\sqrt{2}$$

$$\cancel{(1)\ (x-6)^2+2((y-1)^2-9)=0}$$

$$(x-6)^2+2((y-1$$

$$\cancel{(x-6y)^4+2(y-1)^4=18(y-1)^2}$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2+(x-6y)^2=$$

$$=18+(x-6)(y-1)$$

$$\cancel{(x-6)((x-6)-(y-1))}$$

$$x^2-12x+36+2y-4y+2+x-12xy+36y^2-xy+x+6y-6-18=0$$

$$x^2+36y^2-13xy-10x+4y+14=0$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

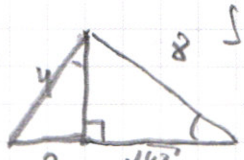
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$64-16=\sqrt{48}$

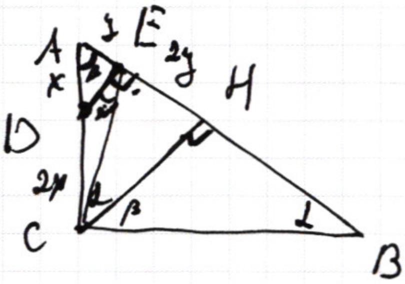
№4



$S=\frac{4\cdot(2+\sqrt{48})}{2}$

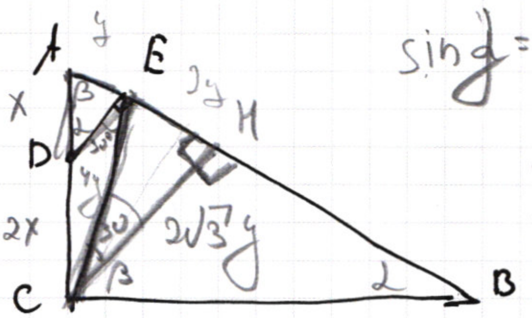
$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(2+\sqrt{48})\cdot\frac{1}{2}$

а)



$tg\angle BAC - ?$

$tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{BH}{CH}$



$\sqrt{7}$

$\sin\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{EH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow CH = \sqrt{3}EH = 2\sqrt{3}y$

~~180 − α +~~

$tg\angle BAC = tg\angle HAC = \frac{CH}{AH} = \frac{2\sqrt{3}y}{3y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $AC = 3x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$(3x)^2 = (3y)^2 + (2\sqrt{3}y)^2$

$9x^2 = 9y^2 + 12y^2 \Rightarrow 9x^2 = 21y^2$

$3x^2 = 7y^2$

$\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{DE}{AE}$

$\cancel{3}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{9}_3} = \cancel{7}y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$DE = \frac{2\sqrt{3}y}{3} = \frac{2}{3}$

$CE = 2EH = 4y = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot CE\cdot\sin\angle BEC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

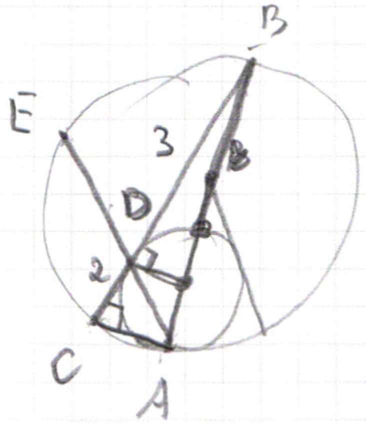
☑ черновик ☐ чистовик

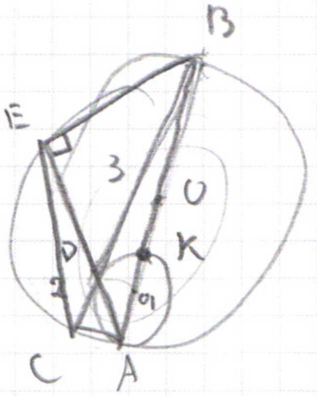
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5





$DB^2 = BK \cdot BA$

$\Delta BO_1D \sim \Delta BAC$

$9 = (2R - 2r)\,2R$

$k = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$ $\quad 10R - 5r = 6R \Rightarrow 4R = 5r \Rightarrow r = \frac{4}{5}R$

$d = \frac{8}{5}R$

$9 = (2R - 2r)\cdot 2R$ $\quad 9 = \left(2R \cdot \frac{8}{5}R\right)\cdot 2R$ $\quad d = \frac{4}{5}D$

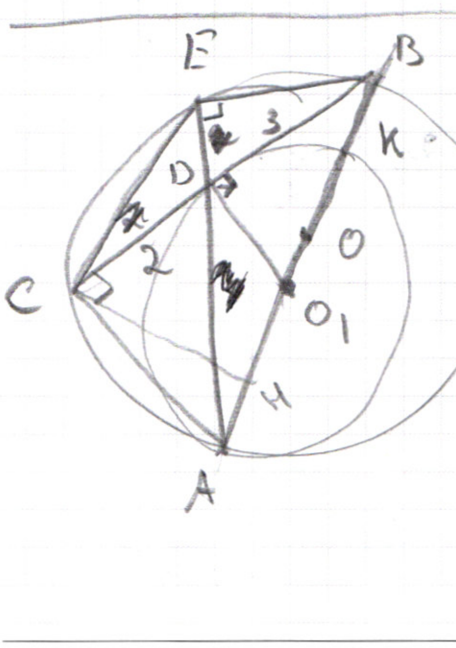
$9 = \frac{32}{5}R^3$

$S = BC \cdot AE \cdot$

$R^3 = \frac{45}{32} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{45}{32}}$

$r = \frac{4}{5}\sqrt[3]{\frac{45}{32}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 45}{125 \cdot 32}} = \sqrt[3]{\frac{18}{25}}$



$BD^2 = BK \cdot BA = (2R - 2r)\ 2R$

$\Delta BO_1D \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{4}{5}R$

$9 = \left(2R - \frac{8}{5}R\right)\cdot 2R$

$9 = \left(\frac{2}{5}R\right)\cdot 2R \Rightarrow 9 = \frac{4}{5}R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{45}{4}$

$\Rightarrow$

$R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

$r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CA = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{45 - 25} \Rightarrow CA = 2\sqrt{5}$

$DA = \sqrt{CA^2 + CD^2} = \sqrt{20 + 4} = 2\sqrt{6}$

$\frac{5 \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5}$

$CD \cdot DB = AD \cdot DE \Rightarrow DE = \frac{CD \cdot DB}{AD} = \frac{2 \cdot 3}{2\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\cos\angle ADC = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\Rightarrow AE = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

$S_{ACEB} = \frac{1}{2} AE \cdot CB \cdot \cos\angle ADC = \cancel{\ldots} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{25}{4}$

~~Проверка~~

~~$\cos\angle CAB = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\angle CAB = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$~~

~~$\Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$~~

№6.

$$\begin{cases} 8x - 6|2x-1| \le ax + b \\ -8x^2 + 6x + 7 \ge ax + b \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - ax - b \le 6|2x-1| \\ -8x^2 + 6x + 7 - ax - b \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 8x - ax - b \le 12x - 6 \\ -8x + ax + b \ge 12x - 6 \end{array}\right. \\ -8x^2 + x(6-a) + 7 - b \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x(8 - a - 12) - b + 6 \le 0 & (1) \\ x(a - 8 - 12) + b + 6 \ge 0 & (2) \end{array}\right. \\ -8x^2 + x(6-a) + 7 - b \ge 0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) $x(-a-4) - b + 6 \le 0$

$$\begin{matrix} f(-\frac{1}{2}) \le 0 \\ f(1) \le 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} \frac{a}{2} + 2 - b + 6 \le 0 \\ -a - 4 - b + 6 \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a - 2b + 16 \le 0 \\ a + b - 2 \ge 0 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

(2) $x(a-20)+b+6\geq 0$

$f(-\frac{1}{2})\geq 0$ $\quad\begin{cases} 10-\frac{a}{2}+b+6\geq 0 \\ a-20+b+6\geq 0\end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2b-a+32\geq 0 \\ a+b-14\geq 0\end{cases}$

$f(1)\geq 0$

(3) $-8x^2+x(6-a)+7-b\geq 0$ — парab. ветви вниз ⇒

⇒ $\begin{cases} f(-\frac{1}{2})\geq 0 \\ f(1)\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases} \frac{-8}{4}+\frac{a}{2}-3+7-b\geq 0 \\ -8+6-a+7-b\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases} -2+\frac{a}{2}+4-b\geq 0 \\ a+b-5\leq 0\end{cases}$;

$\begin{cases} a-2b+4\geq 0 \\ a+b-5\leq 0\end{cases}$

Итак: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-2b+16\leq 0 \\ a+b-2\geq 0\end{cases} \\ \begin{cases} a-2b+4\geq 0 \\ a+b-5\leq 0\end{cases} \\ \begin{cases} a-2b-32\leq 0 \\ a-2b+4\geq 0\end{cases} \\ \begin{cases} a+b-14\geq 0 \\ a+b-5\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$

$8x-6|2x-1|\leq -8x^2+6x+7$

$8x^2+14x-7\leq 6|2x-1|$

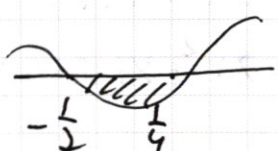
$\left[\begin{array}{l} 8x^2+14x-7\leq 12x-6 \\ -8x^2-14x+7\geq 12x-6\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 8x^2+2x-1\leq 0 \\ 8x^2+26x-13\leq 0\end{array}\right.$

13^2
$\times 8$
104

$\frac{D}{4}=1+8=9$ $\quad x_1=\frac{-1\pm 3}{8}=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{1}{4}$

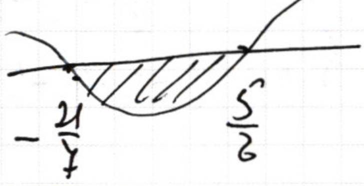


$f(p)=\frac{p+1}{2}$

$\frac{D}{4}=169-104=65$

$x_1=\frac{-13-\sqrt{65}}{8}\approx -\frac{21}{7}$

$x_2=\frac{-13+\sqrt{65}}{8}\approx\frac{5}{8}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)