



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
- [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
- [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

- [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$$

$f(2)=1$	$f(11)=5$
$f(3)=1$	$f(13)=6$
$f(5)=2$	<del><math>f(17)=8</math></del>
$f(7)=3$	$f(19)=8$
$f(9)=4$	$f(19)=9$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3
19	20	21	22													
9	3	4	6													

- $f(x)=1 \Rightarrow 2 \cdot 19 = 38$
- $f(x)=2 \Rightarrow 4 \cdot 15 = 60$
- $f(x)=3 \Rightarrow 7 \cdot 8 = 56$
- $f(x)=4 \Rightarrow 3 \cdot 5 = 15$
- $f(x)=5 \Rightarrow 1 \cdot 4 = 4$
- $f(x)=6 \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4$
- $f(x)=8 \Rightarrow 1 = 1$

178

$$\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$$

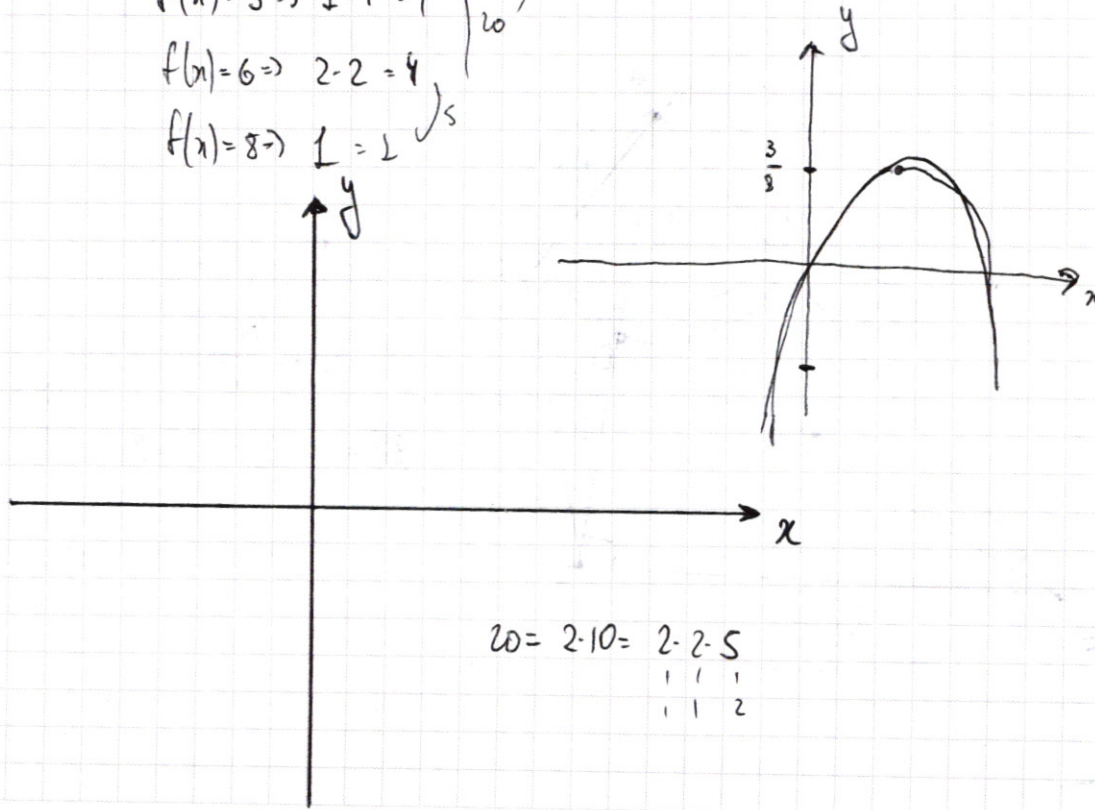
$$38 + 60 + 56 + 15 + 4 + 4 + 1 = 178$$

$$\frac{138}{42} = \frac{38}{14}$$

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

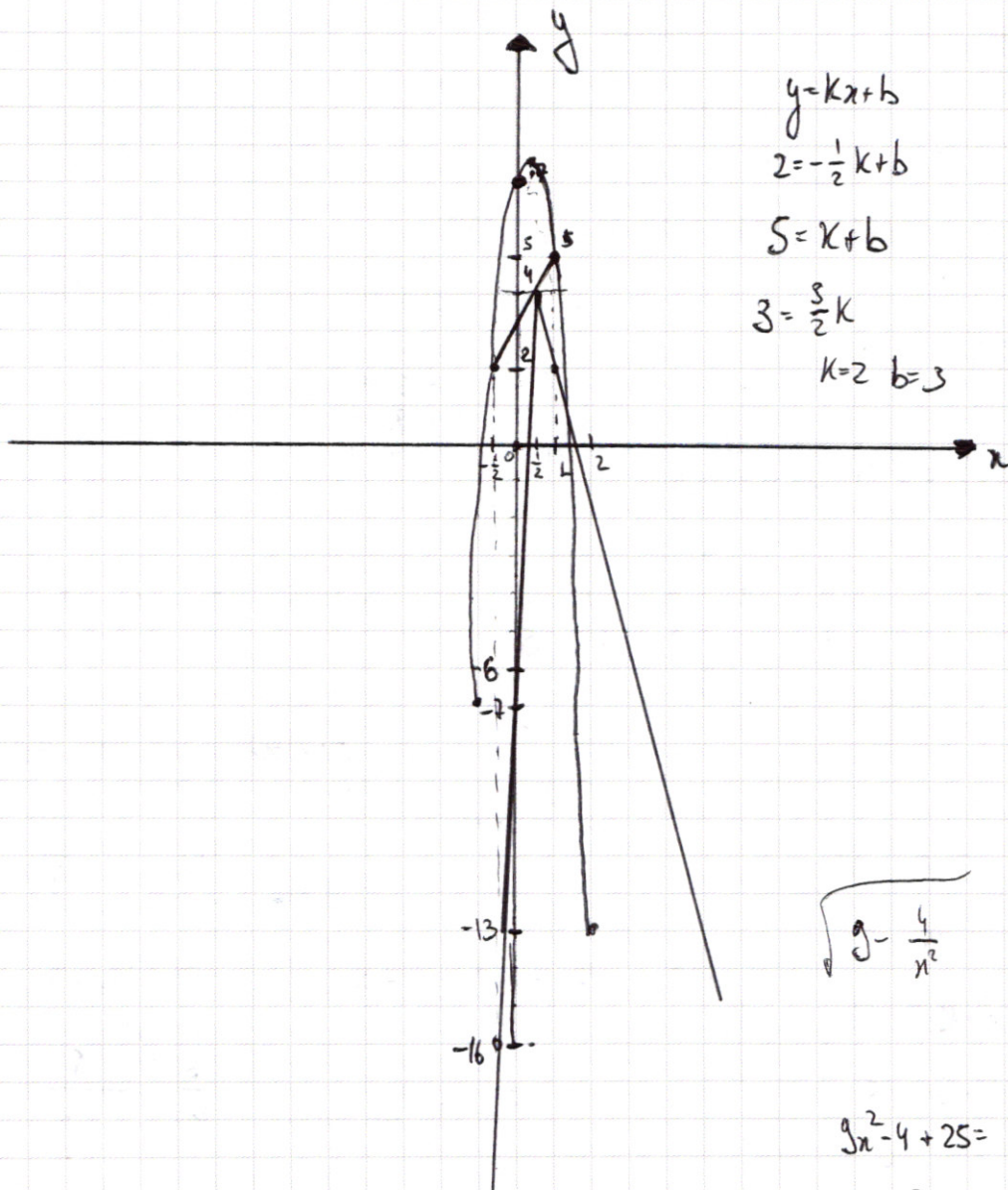
$$x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-16} = \frac{3}{8}$$



$$20 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$





$$y = kx + b$$

$$2 = -\frac{1}{2}k + b$$

$$5 = k + b$$

$$3 = \frac{5}{2}k$$

$$k = 2 \quad b = 3$$

$$\sqrt{9 - \frac{4}{x^2}}$$

$$\frac{9x^2 - 4}{x^2}$$

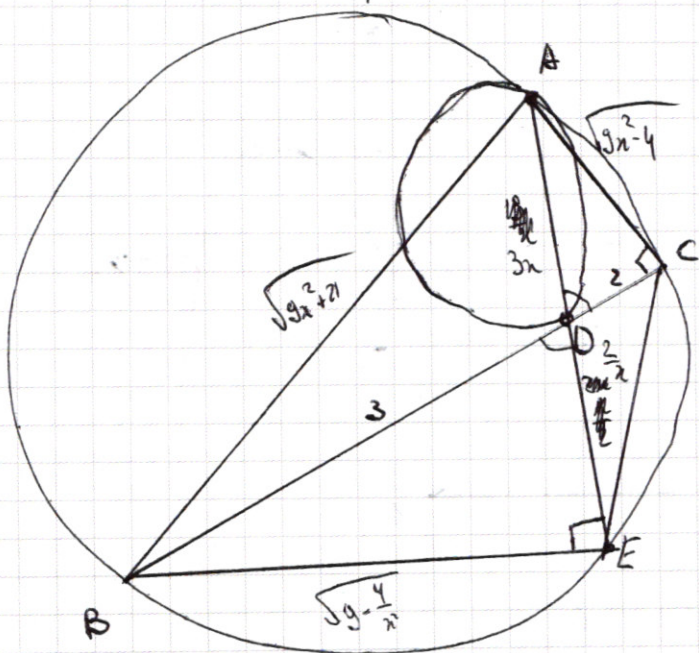
$$9x^2 - 4 + 25 =$$

$$= 9x^2 + 21$$

$$9x^2 - 4$$

$$3x + \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{3x^2 + 2}{x}$$



$$9 - \frac{4}{x^2} + \left(3x + \frac{2}{x}\right)^2 = 9x^2 + 21$$

$$9 - \frac{4}{x^2} + \frac{(3x^2 + 2)^2}{x^2} = 9x^2 + 21$$

$$9x^2 - 4 + (3x^2 + 2)^2 = 9x^4 + 18x^2 + 4$$

$$(3x^2 + 2)^2 = 9x^4 + 18x^2 + 4$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = kx + b$$

$$2 = -\frac{1}{2}k + b$$

$$y = 2x + 3$$

~~с = 2x + 3~~ ~~с = 2x + 3~~ ~~с = 2x + 3~~

$$s = k + b$$

a b c

$$3 = k + \frac{1}{2}k$$

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 = 9$$

$$6 = 23k$$

~~с = 2x + 3~~

$$k = 2 \quad b = 3$$

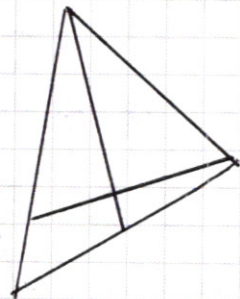
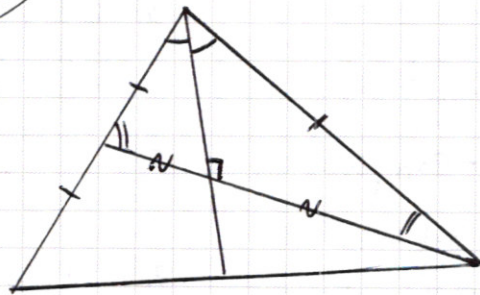
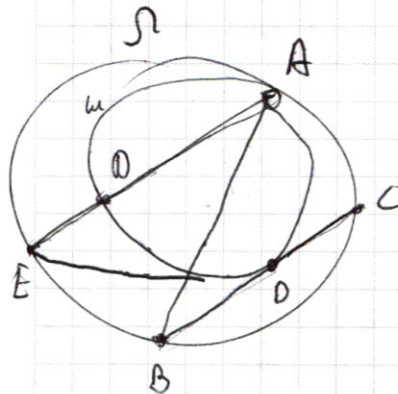
$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$x^2 - 2qx + q^2 = 0$$

$$(x - q)^2 = 0$$

$$x = q$$

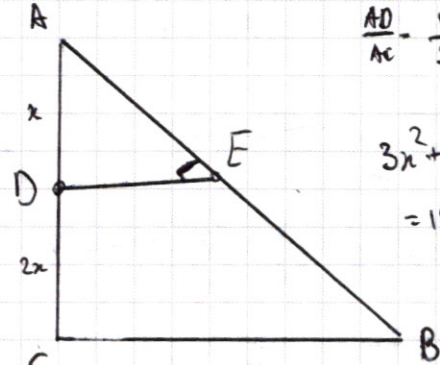
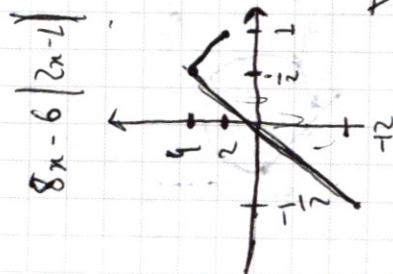


$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

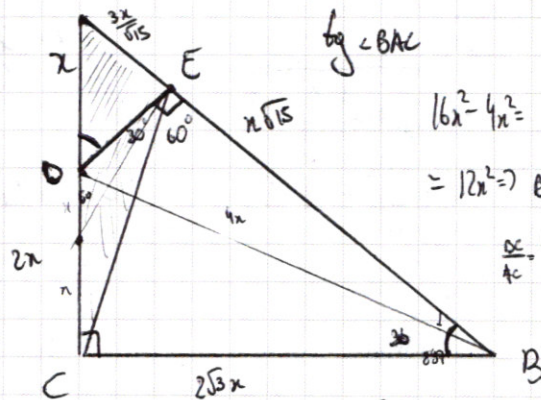


$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$3x^2 + 12x^2 = 15x^2$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{3x}$$



$$16x^2 - 4x^2 = 12x^2 \Rightarrow BC = x\sqrt{3}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$AC = \sqrt{7}$$

$$BC = \frac{AC}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$3 + 897 = 900$$

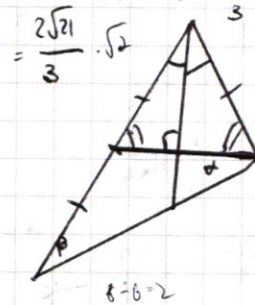
$$6 + 894 = 900$$

$$9 + 891 = 900$$

$$897 + 3 = 900$$

$$3a + x = 900$$

$$a \in [1; 299]$$



$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x\sqrt{5} - \frac{3x}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{15x - 3x}{\sqrt{5}} = \frac{12x}{\sqrt{5}}$$

$$8x - 6|2x - 1| = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad y = 4$$

$$x = 1 \quad y = 2$$



$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$(x-6)(y-1) = xy - x - 6y + 6y$$

$\Sigma = 1+2$   
 $(2)f + (5)f$   
 $(01)f$   
 $(13)f$   
 $(\frac{p}{1})f + (x)f = (\frac{p}{x})f$

$$2y^2 - 4y + 1 = (x-14)(x+2)$$

$$= (x-13)(x+1) \quad (x-3)(x-4)$$

$$= (x-15)(x+3) \quad (x-10)(x-2)$$

$$= (x-11)(x-1)$$

$$x^2 - 12x + 4 + 2y^2 - 4y + 1 =$$

$$(x-6)^2 =$$

$$(\frac{p}{1})f + (x)f = (\frac{p}{x})f$$

$$(x-6)^2 + (2y-1)^2 - 18 = 0$$

$$(h)f > (k)f$$

$$k = (8)f$$

$$(h)f - (k)f = (\frac{h}{k})f$$

$$E = (2)f$$

$$Z = (5)f$$

$$T = (8)f$$

$$8 = (10)f$$

$$9 = (9)f$$

$$5 = (11)f$$

$$-8x^2 + 6x + 7$$

$$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 - (y-1)^2 = 2(h)f + (\frac{p}{x})f - (k)f$$

$$2y^2 - 4y \Rightarrow (2y-2)(y-1) =$$

$$x - 6y = a + 6 - (6b + 6) = a - 6b$$

$$x - 6 = a$$

$$y - 1 = b$$

$$a + b = 26a$$

$$a - 6b = \sqrt{ab}$$

$$(a - 6b)^2 = ab$$

$$36 = 12 \cdot 3$$

$$\frac{6}{4} \frac{6}{9} = \frac{3}{3} + 7$$

$$-2 \cdot 3 + 7$$

$$-5 + 7 = 2$$

$$a^2 + 2b^2 = 18$$

$$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$$

$$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$$

$$(a-9b)(a-4b) = 0$$

$$a \neq b \quad a - 6b \geq 0$$

$$a = 4b$$

$$a = 9b$$

$$-8 \cdot 4 + 12 + 7 = -32 + 19 = -13$$

$$\frac{56}{24} + \frac{14}{24} = \frac{70}{24}$$

$$-8x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$8x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 8 \cdot 7 = 260 = 2 \cdot 13 \cdot 10$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{260}}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{8}$$

$$16b^2 + 2b^2 = 18$$

$$18b^2 + 2b^2 = 18$$

$$b^2 = \frac{18}{88}$$

$$\sqrt{64} \leq \sqrt{13 \cdot 5}$$

$$18b^2 = 18$$

$$b = \pm 1$$

$$x = 1$$

$$x = 0$$

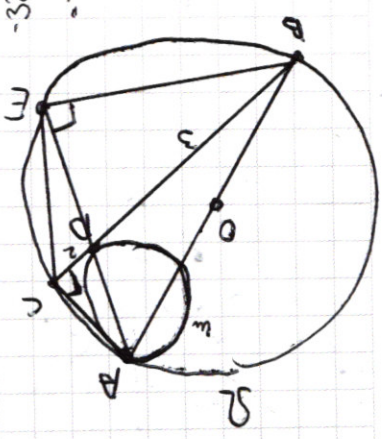
$$x = 2$$

$$BC = 2\sqrt{3}x$$

$$AC = 3x = \sqrt{7}$$

$$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2







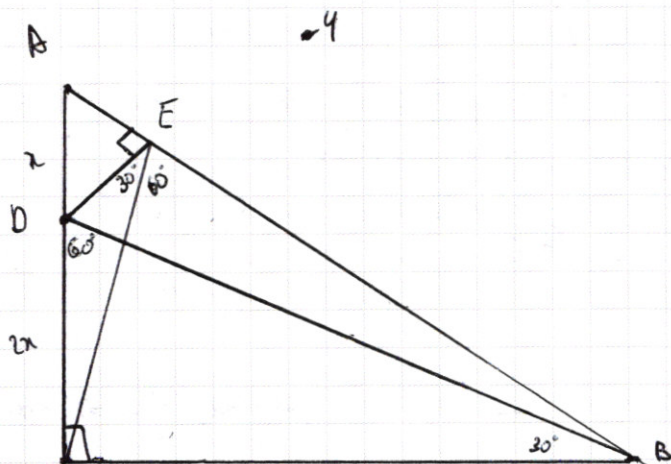


→ 3

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} a=x-6 \\ b=y-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-12b+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-4b)(a-3b)=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4b \\ a=3b \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 4 \\ b=\pm 1 \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} a=\pm 3\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=\pm \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } x, y = (10, 2), (2, 0), (9\sqrt{\frac{12}{83}}+6, \sqrt{\frac{18}{83}}+1), (-9\sqrt{\frac{12}{83}}+6, -\sqrt{\frac{18}{83}}+1)$$



С) 1)  $\angle A = \alpha \Rightarrow DC = 2x$  (по угл.)

1)  $CDEB$  - впис. (м.к.  $\angle DCB + \angle DEB = 180^\circ$ , по приз.)

2)  $\angle CBD = \angle CED = 30^\circ$  (поп.л и м.к. отн. хор. на одну дугу.)

3)  $\triangle BCD$  - с  $\angle 90, 60, 30$  (поп.2 и угл.)

4)  $BD = 2CD = 4x$  (по п. 3)

5)  $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = 2\sqrt{3}$  (по  $\Delta$  Пифагора и п. 4)

6)  $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  (по отп. уг.)

7)  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9x^2 + 12} = 2\sqrt{21}$  (по  $\Delta$  Пифагора)

8)  $\triangle AED \sim \triangle ACB$  (по  $\text{YI}$ )

9)  $k_{подобия} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2\sqrt{21}}$  (по п. 8 и п. 7)

10)  $S_{CED} = 2S_{ADE}$  (по отп.  $S$  через высоту и осн.) (м.к.  $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ )

11)  $S_{CED} = 2S_{ADE} = 2S_{ABC} \cdot k^2 = 2 \cdot \frac{AC \cdot BC}{2} \cdot k^2 = AC \cdot BC \cdot k^2 = \sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{1}{21} = \frac{28\sqrt{3}}{63} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$  (по п. 10 и п. 8) Ответ: а)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  б)  $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

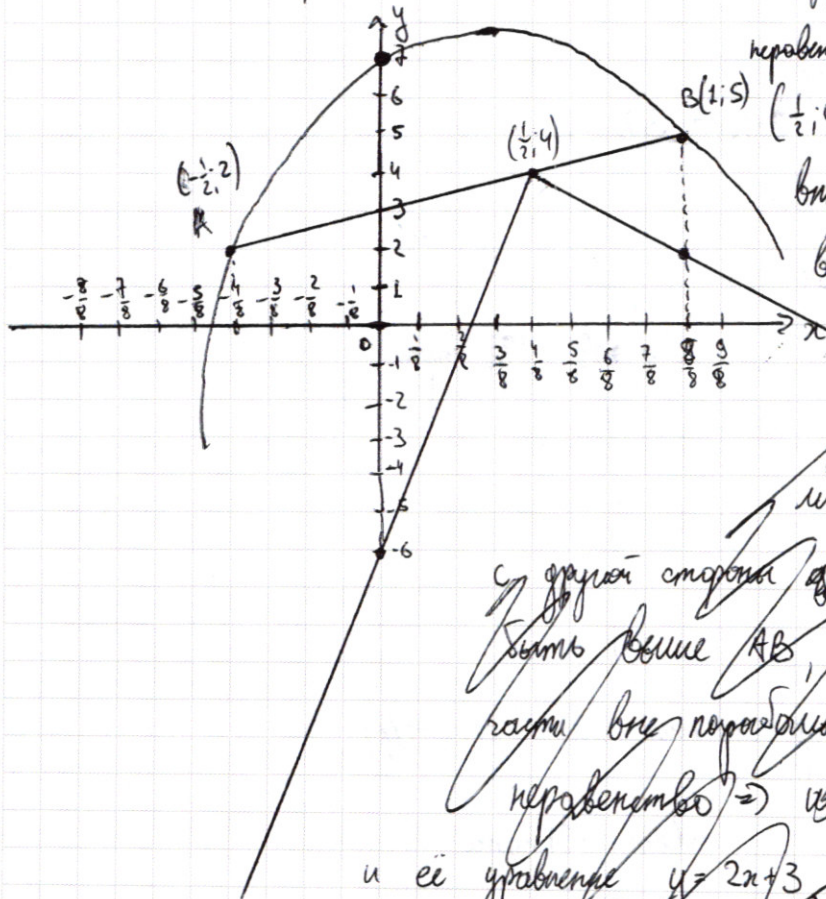


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$8x - 6 \mid 2x - 1 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

Нетрудно заметить, что слева неравенства две прямые с общей точкой  $(\frac{1}{2}; 4)$ ; а справа парабола ветвями вниз. Заметим, что нам подходит все прямые ~~которые~~ ~~на~~ ~~прямой~~ ~~линии~~



~~х ∈ [1/2; 1] все функции прямых либо все пересекают точку (1/2; 4), но с другой стороны дуговая часть не может быть выше АВ, т.к. иначе у этого отрезка будут концы вне параболы ⇒ он не будет верна неравенство ⇒ искомая прямая это АВ и её уравнение y = 2x + 3, заметим, что точка (1/2; 4) тоже в этой прямой ⇒ Ответ: a = 2 b = 3~~

которые ниже прямой АВ и она сама, т.к. иначе, на отрезке  $[-\frac{1}{2}; 1]$  найдётся часть прямой вне параболы ⇒ неравенство не будет верно ~~вскалните~~ ~~ст.~~ Но заметим, что АВ пересекает  $(\frac{1}{2}; 4)$  ⇒ если мы возьмём любую другую прямую ниже АВ она будет пересекать обе данные прямые ⇒ будет отрезок значений x для которых не будет выполнено неравенство ⇒ искомая прямая АВ ⇒  
⇒ Ответ: a = 2 b = 3



~2

м.к.  $f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$   
 $\Rightarrow f(x) < f(y)$

заменим, что  $f(n) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \alpha_3 f(p_3) \dots + \alpha_m f(p_m)$ , где  
 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_m^{\alpha_m}$ , тогда заменим все значения где

$f(a)$  где  $a \in [2; 22]$

a	f(a)
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	2
10	3
11	5
12	3
13	6
14	7
15	3
16	4
17	8
18	3
19	9
20	4
21	4
22	6

- бери пар x, y
- $f(x) = 1 \Rightarrow 2 \cdot 19 = 38$
  - $f(x) = 2 \Rightarrow 9 \cdot 15 = 60$
  - $f(x) = 3 \Rightarrow 6 \cdot 9 = 54$
  - $f(x) = 4 \Rightarrow 4 \cdot 5 = 20$
  - $f(x) = 5 \Rightarrow 1 \cdot 4 = 4$
  - $f(x) = 6 \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4$
  - $f(x) = 7 \Rightarrow 0 = 0$
  - $f(x) = 8 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1$

181 пара

$f(x) = 9 \Rightarrow$  к. м.к. немы  $f(y)$  макс, тогда  $f(x) < f(y)$

Ответ: 181 пара



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

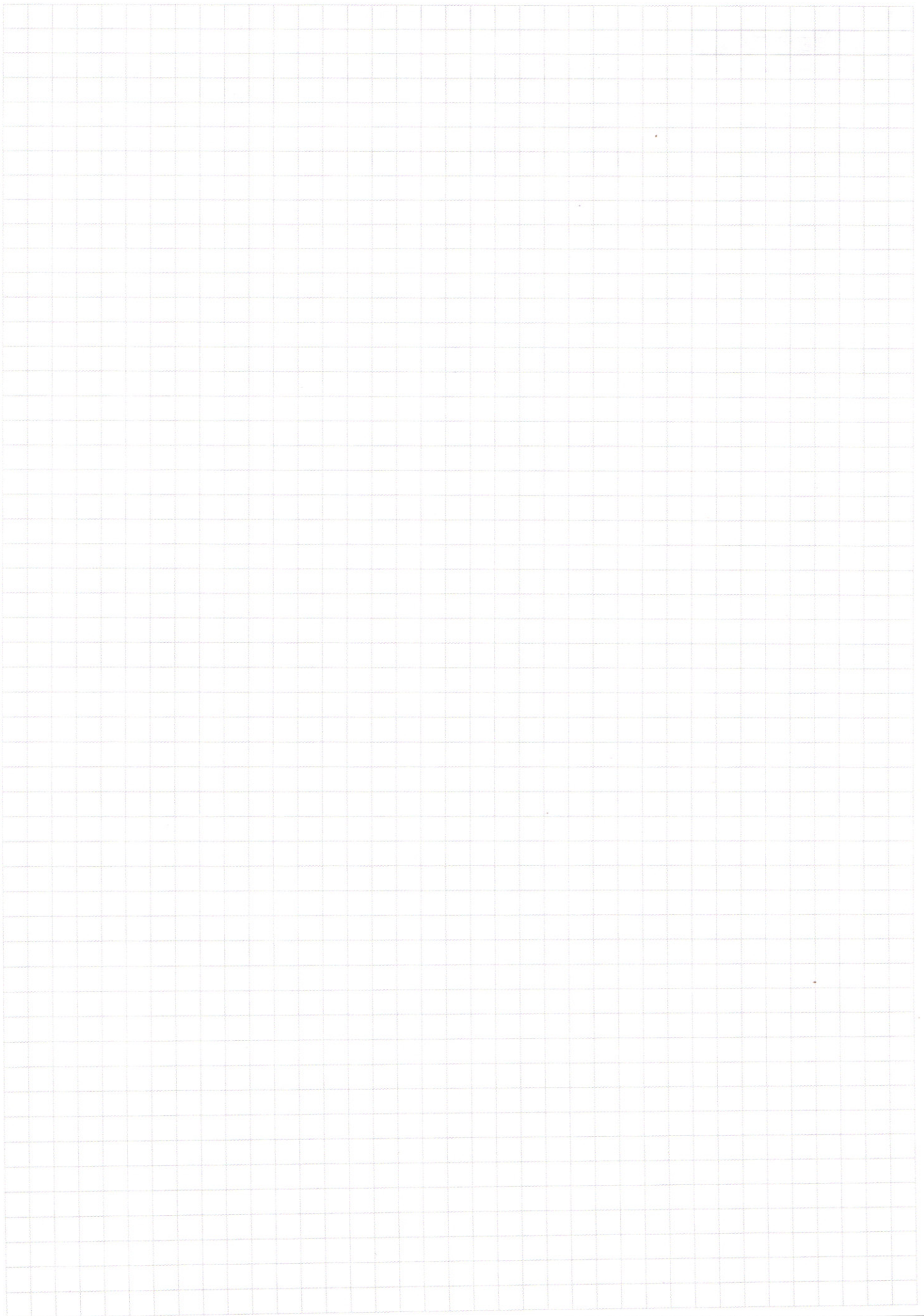
(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № \_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)