МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 12

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Меньший корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57, \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12468.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 4$, $AN = 8$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = \sqrt{10}$, $BM = \sqrt{2}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них делятся на 5, но не делятся на 7, остальные же наоборот делятся на 7 и при этом не делятся на 5. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно кратное 5 и хотя бы одно кратное 7, можно 49 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$4 - 3x - |6x - 2| \leqslant ax + b \leqslant \frac{17 + 15x}{5 + 3x}$$

выполнено для всех x на промежутке $[-1;1]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$4-3x-|6x-2| \le ax+b \le \frac{17+15x}{5+3x}$$

Подставим $x=-1;0;1$:

-1: $4+3-8=-1 \le b-a \le \cancel{2}\,1 \quad (1)$

0: $4-2=2 \le b \le \frac{17}{5} \quad (2)$

1: $\underbrace{4-3-4}_{-3} \le a+b \le 4 \quad (3)$

Подставляем из (2) b:

$(1)\quad \begin{cases} a \le b+1 \le \frac{22}{5} \\ a \ge b-1 \ge 1 \end{cases} \quad 1 \le a \le \frac{22}{5}$

$a \ge -3-b \ge -3-\frac{17}{5} = \frac{-32}{5}$

$(3)\quad a \le 4-b \le 2$

Итоговое ограничение: $1 \le a \le 2$

Также видим, что знаменатель $5+3x<0$ при $x<\frac{5}{3}$, что нас не интересует, т.к. $x\in[-1,1]$.

Подставим $a=1$

$x=1$: $4-3-4 \le 1+b \le 4$

$-3 \le 1+b \le 4$

$-4 \le b \le 3$

$x=-1$: $4+3-8 \le b-1 \le 1$

$-1 \le b-1 \le 1$

$0 \le b \le 2$ (продолжение на стр. 12)

То есть при $a = 1$; $0 \le b \le 2$, но изначально $2 \le b \le \frac{17}{5}$

Подходящая пара $(a;b) = (1;2)$

Подставим $a = 2$:

$x=1$: $4 - 3 - 4 \le 2 + b \le 4$

$-5 \le b \le 2$, но при этом $2 \le b \le \frac{17}{5}$

Ещё подходящая пара $(a;b) = (2;2)$

При подставлении -1 видно:

$-a\cancel{x} + b \le \cancel{4}\,1$

$2 \le b \le \cancel{4}^{1} + a$

При подставлении 1 видно:

$a + b \le 4$

$2 \le b \le 4 - a$

$1 \le a \le 2$ - все случаи мы рассмотрели

Ответ: $(1;2)$; $(2;2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. Заметим, что у нас может быть набор либо с двумя числами, кратными 5, и одним числом, кратным 7, либо с двумя числами, кратными 7, и одним числом, кратным 5.

$x \xleftarrow{\text{кол-во}}$ $\to y$

кратные 5   кратные 7

I) 2 кр. 5 и 1 кр. 7: $\frac{x(x-1)}{2!}\cdot y$ — кол-во способов

II) 2 кр. 7 и 1 кр. 5: $\frac{y(y-1)}{2!}\cdot x$

Всего $\frac{x\cdot y}{2!}\cdot(x+y-2)=49$

$$x\cdot y(x+y-2)=7\cdot7\cdot2=14\cdot7\cdot1=49\cdot2\cdot1$$

Заметим, что никакое из чисел не равно 1.

Без ограничения общности проверим:

$x(x-1)=7\cdot7\cdot2$ ~~= нельзя представить но~~

$x^2-x-14=0$

$x = 1\pm\sqrt{1+56}$ — нецелое

также ~~сумма~~ $(x+y-2)\neq1$, т.к. $x+y\neq3$, т.к. в этом случае хотя бы одно из чисел равно единице.

Значит $x\cdot y(x+y-2)=7\cdot7\cdot2$

~~$x\cdot y$~~ Хотя бы одно из x и y равно 7.

$7x(x-5)=98$

$7x^2-35x-98=0$ (продолжение на стр 10)

№6 (продолжение)

$x^2-5x-14=0$

$x=\left[\begin{array}{l}2\\ -7\end{array}\right.$ -7 - посторонний.

$x=2 \Rightarrow x=2;\ y=7.$ (x и y симметричны, поэтому неважно, что чему равно)

$x+y=9$

Ответ: 9 чисел.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

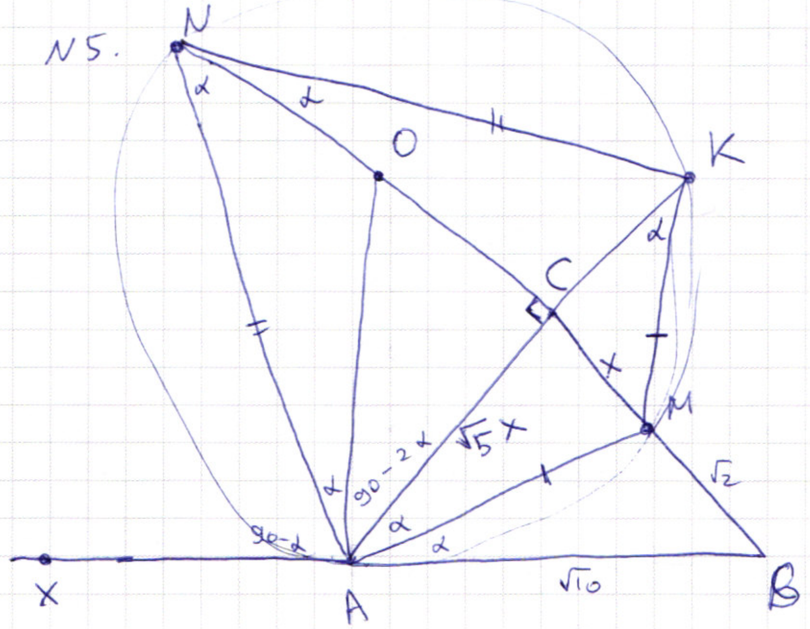
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5.



$\angle A = 2\alpha$

$\angle CAM = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

X - продолжение BA за т. A. $\angle NAX = \frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha = \angle NAC$

$\angle NAM = 90-\alpha+\alpha = 90.$

Окружность описана вокруг прямоугольного треугольника, значит гипотенуза NM - диаметр. O - центр окружности и стороны NM.

Т.к. AB касается этой окружности, то $AB \perp OA$

$\angle OAN = 90-\alpha-(90-2\alpha) = \alpha = \angle ONA$, т.к. $ON = OA$, т.к. OA - медиана из прямого угла.

По теореме о касательной $AB^2 = BM \cdot BN$

$10 = \sqrt{2} \cdot BN \Rightarrow BN = 5\sqrt{2} \Rightarrow MN = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ - диаметр.

$r = \frac{MN}{2} = 2\sqrt{2}$ (продолжение на стр. 6)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 (продолжение)

~~ANK~~ $\angle AKM = \angle ANM = \alpha$, т.к. опираются на $\smile AM$
$\angle MNK = \angle MAK = \alpha$, т.к. опираются на $\smile MK$ $\Big\} \Rightarrow MK = AM$

$\angle NCA = 180 - \alpha - (90 - \alpha) = 90 \Rightarrow AN = NK$, т.к. NC - высота и биссектриса. $\Rightarrow \angle ACB = 90°$.

Т.к. ANKM - описан, а C лежит на пересечении AK и NM, то $NC \cdot CM = AC \cdot CK$ (1)

По ~~теореме~~ свойству биссектрисы: $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$

~~AB~~ Обозначим $BM = x \Rightarrow AB = \sqrt{5}x$

Подставим в (1): $NC \cdot x = 5x^2 \Rightarrow NC = 5x$

$NC + CM = MN = 4\sqrt{2} = 6x \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$S_{ANKM} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{5}}{9} + \frac{40\sqrt{5}}{9} = \frac{48\sqrt{5}}{9} = \frac{16\sqrt{5}}{3}$

Ответ: $r = 2\sqrt{2}$; $\angle ACB = 90°$, $S_{ANKM} = \frac{16\sqrt{5}}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение) O - точка пересечения диагоналей ромба ABCD

$tg\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5} = \frac{CO}{OD} = \frac{\frac{12}{2}}{OD} = \frac{6}{OD} \Rightarrow OD = 15$, а $DB = 2\cdot 15 = 30$

а) $tg\angle BAC = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OA} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

Заметим, что OB - средняя линия $\triangle ECA$ и $OB \parallel EC \Rightarrow EC = 2OB = 30$

~~Найдём EN из теоремы Пифагора:~~ $\cancel{EN = \sqrt{EC^2 + CN^2} = \sqrt{30^2 + 4^2} = \sqrt{916} = 2\sqrt{229}}$

~~EA = 2x, x найдём через теорему Пифагора:~~ $\cancel{AB = \sqrt{BO^2 + OA^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}}$

$\cancel{EA = 3\sqrt{29}\cdot 2 = 6\sqrt{29}}$.

б) $S_{\triangle ENA} = \frac{1}{2} EC \cdot NA = \frac{1}{2}\cdot 30 \cdot 8 = 120$

т.к. EC - высота, NA - основание.

Ответ: а) $\frac{5}{2}$ б) 120.

$\cancel{6x}$ $6x-2\geq 0$

$6x\geq 2$

$x\geq \frac{1}{3}$

$x\in\left[\frac{1}{3};1\right]$

$4-3x-6x+2\leq\frac{17+15x}{5+3x}$

$6-9x\leq\frac{17+15x}{5+3x}$

$3(2-3x)(5+3x)\leq 17+15x$

$30-27x^2-27x\leq 17+15x$

$0\leq 27x^2+42x-13$

$42\cdot 42$: 84, 168, 1764; $52\cdot 27$: 364, 104, 1404; $1764+1404=3168$

$x=\frac{-42\pm\sqrt{3168}}{54}=\frac{-42\pm 2\sqrt{792}}{54}=$

$=\frac{-42\pm 4\sqrt{198}}{54}$

$(3x+\cancel{10}^{2})(5+3x)\leq 17+15x$

$9x^2+10+21x\leq 17+15x$

$9x^2+6x-7\leq 0$

$22+50$ $\cancel{288}\,|\,36$ $288:36=8$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+252}}{18}=\frac{-6\pm\sqrt{288}}{18}=\frac{-6\pm 12\sqrt{2}}{18}=$

$=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}}{3}=[$

$x\in\left[\frac{-1-2\sqrt{2}}{3};\frac{-1+2\sqrt{2}}{3}\right]$

$6-9x\leq(ax+b)(5+3x)\leq 17+15x$

$6-9x\leq 17+15x$

$\cancel{-11\leq 24x\Rightarrow x\geq-\frac{11}{24}}$

$6-9x\leq 3ax^2+x(3b+5a)+5b\leq 17+15x$

$3ax^2+x(3b+5a+9)$

$ax+b+\frac{8}{5+3x}\leq 5$

$\frac{25+15x}{5+3x}=5-\frac{8}{5+3x}$

черновик ☑ чистовик ☐

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

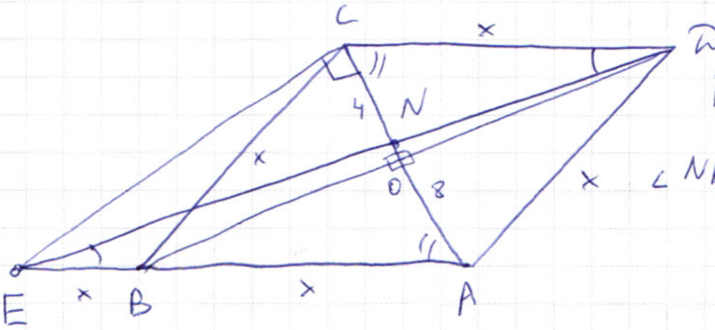
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



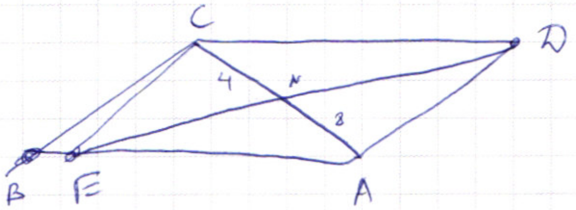
Накрест лежащие $\angle NEA = \angle NDC$ и $\angle NCD = \angle NAE$

$\angle C$-тупой $\Rightarrow$ $\angle A$-тупой, а $\angle B$ и $\angle D$ - острые.

т.к $\angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180°$.

Заметим, что т. E лежит не на отрезке AB, т.к.

допустим, она лежит на AB



$\triangle CND \sim \triangle ANE$ $\quad \frac{CN}{NA} = \frac{CD}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CD}{AE} \Rightarrow AE = 2CD$,

но т.к. $AE \leq AB = CD$ - такое невозможно

Видим, что $\triangle ENA \sim \triangle DNC$ по 2 углам $\frac{CN}{AN} = \frac{CD}{EA} \Rightarrow$

$\Rightarrow EA = \frac{AN \cdot CD}{CN} = 2CD$; обозначим $CD = x$, т.к. $AB = x$, то

$EB = 2x - x = x$.

Видим, что CB - медиана, выходящая из прямого угла $\Rightarrow$ $CB = \frac{1}{2} EA$ (гипотенуза) $= \frac{2x}{2} = x$

Т.к. ABCD - параллелограмм, то $CB = AD = x \Rightarrow ABCD$-ромб.

Диагонали ромба пересекаются в их центрах и перпендикулярны (продолжение на стр. 4)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\overline{abcdef}$

$-\ f + ef + def$

$ef + def + cdef$

1) $\overline{def} + \overline{cdef} + \overline{bcdef} = 10000\cdot b + 2000\cdot c + 300\cdot d + 30\cdot e + 3f$

2) ~~$\overline{abcdef} + \overline{bcdef} + \overline{cdef}$~~ √ 1 вар

3)

$b=1 \quad c=1.$

$d=1 \qquad 30\cdot e + 3\cdot f = 168$

$3f \le 27$

$\overline{a111\_\_}$

0

0

6

$d=$

12

$168 : 3 \qquad 168 - 27 = 141$

$\le e \le 5$

$e=5$

$$\frac{x\cdot y\cdot(x+y-2)}{3!\,2!} = 49$$

$x\cdot y(x+y-2) = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 7$

$4\cdot 21$

$12\cdot 7$

5 7 15

15 7 5

$a \quad x\cdot y\cdot(x+y-2) = 49\cdot 6$

x^2y

~~$4\cdot 7\cdot 9$~~

~~$12\cdot 7\cdot 1$~~

$$\frac{x\cdot y\,(x+y-2)}{3!} = 49$$

$x\cdot y\,(x+y-2) = 7\cdot 7\cdot 6 = 7\cdot 7\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1\ldots$

$\frac{x\,y(y-1)}{3!} + \frac{y(x-1)x}{3!} =$ ~~$x(x-1) = 49$~~

$= \frac{x\,y(x+y-2)}{3!} = 49$

$x\cdot y(x+y-2)$ – ч.н.

~~$k\cdot y(2k-2+y) = 7\cdot 7\cdot 3$~~

$2k\cdot y(2k-2+y)$ 7, 3, 21, 49

2.

~~$14\cdot 3$~~

$xy(x+y-2) = 7\cdot 7\cdot 3\cdot 2$

$(a;b) = (2;3)$

$6 - 9x \le 2x + 3$

$3 \le 11x \quad x \ge \frac{3}{11} \quad \frac{1}{3}$

$\frac{9}{33} \quad \frac{11}{33}$

$4 - 9x + 2 = 6 - 9x \quad 2 + 3x \le$

~~$4 - 3x - 4 \le$~~

$-3 \le 6 - 9x \le 3$

$\frac{2}{3+3} \le 2x + 3$

$x \in [-1; \frac{1}{3}]$

$4 + 3x - 2 \le \frac{17+15x}{5+3x}$

$(2+3x)(5+3x) \le 17 + 15x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$\overline{abcdef}$ - шестизначное число

Рассмотрим возможные варианты степеней 10.

$10^1, 10^2, 10^3$: $\overline{def}+\overline{ef}+\overline{f} \le 999+99+9=1097$ —

$10^2, 10^3, 10^4$: $\overline{cdef}+\overline{def}+\overline{ef} \le 9999+999+99=11097$ —

$10^3, 10^4, 10^5$: $\overline{bcdef}+\overline{cdef}+\overline{def}$ - подходит.

$10^4, 10^5, 10^6$: $\overline{abcdef}+\overline{bcdef}+\overline{cdef} \ge 100000$, т.к. $a \neq 0$

$\overline{bcdef}+\overline{cdef}+\overline{def} = 10000\cdot b + 2000\cdot c + 300\cdot d + 30\cdot e + 3\cdot f$

Заметим, что $b \le 1$, т.к. при $b>1$, число больше 20000, а у нас 12468.

Заметим, что $12468 \vdots 3$.

1 случай: $b=1 \Rightarrow c \le 2$, но т.к. $12468 \vdots 3$, то сумма слагаемых должна быть кратна 3: $300d$, $30e$ и $3f \vdots 3$, а $10000b$ - нет, $10000 \equiv_3 1 \Rightarrow 2000\cdot c \equiv_3 2 \Rightarrow c=2$.

$300d+30e+3f=468$

$30e \le 270 \Rightarrow 300 \le 300d < 600 \Rightarrow d=1$

$30e+3f=168$

$4<e\le 5$, т.к. $6e=180>168$

$3f \le 27 \Rightarrow 30e \ge 168-27=141$

$e=5 \Rightarrow f=6$

1 вариант: $\overline{bcdef}=12156$ На место a в этом случае можно поставить от 1 до 9 - 9 вариантов.

в 1ом случае - 9 вариантов. (продолжение стр. 8)

2 случай: $b=0$

$2000\cdot c + 300d + 30e + 3f = 12468$

$c \leq 6$ т.к. $7\cdot 2000 = 14000 > 12468$

$300d + 30e + 3f \leq \overset{2700}{300\cdot 9} + \overset{270}{30\cdot 9} + \overset{27}{3\cdot 9} = 2997$

$c \geq 5$

c либо 5, либо 6.

Мы уже знаем, что $12468 \vdots 3$, $300d + 30e + 3f \vdots 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2000\cdot c \vdots 3 \Rightarrow c = 6$.

$300d + 30e + 3f = 468$ – это мы уже разобрали, здесь один вариант $d=1$; $e=5$; $f=6$

во 2ом ~~сл~~ случае 1 вариант $\overline{bcdef} = 06156$, на место a можно подставить от 1 до 9 – 9 вариантов.

Всего вариантов шестизначных чисел: $9+9=18$.

Ответ: 18.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57 & (1) \\ y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68 & (2) \end{cases}$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$(*)-(2)= x-y=125$

$x+\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}=57= x+\sqrt[3]{125(x+y)}=x+5\sqrt[3]{x+y}$

$\begin{cases} x+5\sqrt[3]{(x+y)}=57 & (3) \\ y+5\sqrt[3]{(x+y)}=-68 & (4) \end{cases}$

$(3)+(4)= x+y+10\sqrt[3]{(x+y)}=-11$

Обозначим $\sqrt[3]{(x+y)}=k$

$k^3+10k+11=0$

1ый корень ур-ие $k=-1$

$$\begin{array}{r|l} k^3+10k+11 & k+1 \\ \underline{k^3+k^2} & \overline{k^2-k+11} \\ -k^2+10k & \\ \underline{-k^2-k} & \\ 11k+11 & \\ \underline{11k+11} & \\ 0 & \end{array}$$

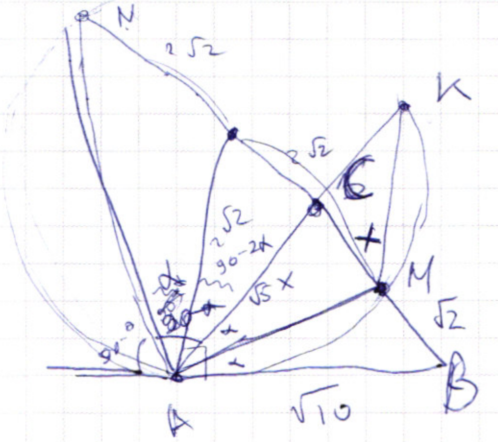
$k^2-k+11=0$ $\quad D=(-1)^2-4\cdot 11<0$ - больше корней нет $\Rightarrow k=-1=\sqrt[3]{(x+y)} \Rightarrow x+y=(-1)^3=-1$

$\begin{cases} x+y=-1 & (5) \\ x-y=125 & (6) \end{cases}$

$(5)+(6)= 2x=124 \Rightarrow x=62;\ y=-1-62=-63$

Ответ: $x=62;\ y=-63$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)



$AB^2 = BM \cdot BN$

$10 = \sqrt{2} \cdot BN = BN = 5\sqrt{2}$

$MN = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$x \cdot y(x+y-2)$

$x \cdot (4\sqrt{2} - x)$

$O_B = \sqrt{10+8} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$tg\ \beta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$10 = 5x^2 + (x+\sqrt{2})^2 = 5x^2 + x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

$6x^2 + 2\sqrt{2}x - 8 = 0$

$\underbrace{5a\ldots}_{x}$ $\underbrace{7k\ldots}_{y}$

$4x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$

$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+64}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{8} =$

$(x+\sqrt{2})^2 + 5x^2 = 10$

$\frac{x \cdot y \cdot (x+y-2)}{3!} = 49$ $\cdot 6$ 294

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + 5x^2 - 10 = 0$

$x \cdot y(x+y-2) = 294 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3$

$6x^2 + 2\sqrt{2}x - 8 = 0$

~~294~~ | 2

~~197~~

$3x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$

$7 \cdot 3 \cdot 14$

~~2 · 3 · 14~~

$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+48}}{6} = \frac{-\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{6} = \left[\frac{4\sqrt{2}}{6} \right.$

~~6 · 7 · 7~~

49 · 2 · 3

14 · 3 · 7

21 · 2 · 7

6 · 7 · 7

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. d - шаг прогрессии

$b = a + d$

$c = b + d = a + 2d$

$a + 2d < 0 < a \Rightarrow 2d < 0 \Rightarrow d < 0$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

подставим, выраженные через a и d значения

Корни: $X_{1,2} = \dfrac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2a-2d \pm \sqrt{4(a+d)^2 - 4a(a+2d)}}{2a} =$

$= \dfrac{-2a - 2d \pm \sqrt{\cancel{4a^2} + \cancel{8ad} + 4d^2 - \cancel{4a^2} - \cancel{8ad}}}{2a} = \dfrac{(-2a-2d) \pm 2d}{2a}$

$x_1 = -1$

$x_2 = -1 - 2\dfrac{d}{a}$

т.к. $d < 0$, $a > 0$, то $\dfrac{d}{a} < 0$ и $-2\dfrac{d}{a} > 0$

$x_2 > x_1 \Rightarrow x_1$ - наименьший.

$x_1 < 0 \Rightarrow$ он может быть четвертым членом прогрессии, т.к. $d < 0$ и $c < 0$, а $x_1 = c + d$.

Ответ: -1

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$x_1+x_2=-\frac{2b}{a}=-\frac{2a+2d}{a}=-2-2\frac{d}{a}$$

k

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{a+2d}{a}=1+2\frac{d}{a}$$

$b=a+d$

$4ac=4a(a+2d)=$
$=4a^2+8ad$

$-2-2k$, $1+2k$

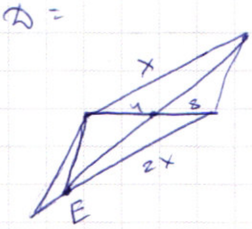
$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2a-2d\pm\sqrt{\cancel{4a^2}+\cancel{8ad}+4d^2-\cancel{4a^2}-\cancel{8ad}}}{2a}=$$

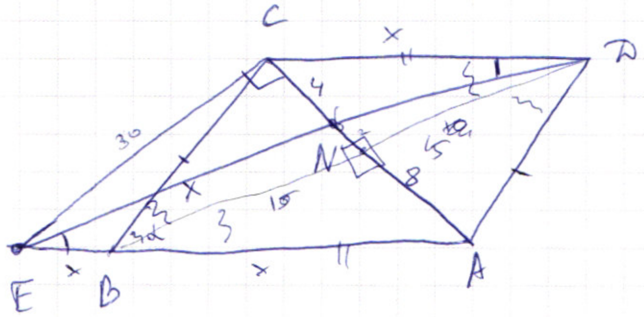
$$=\frac{-2a-2d\pm 2d}{2a}=\left[\begin{array}{l}-1 \text{ - шении.}\\ -1-2\frac{d}{a}\end{array}\right.$$

$$x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57$$
$$y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68$$
$$x-y=125$$
$$x+y+2\sqrt[3]{125(x+y)}=-11$$
$$x+y+10\sqrt[3]{(x+y)}=-11$$
$$\sqrt[3]{x+y}=a$$
$$a^3+10a+11=0$$

$$\begin{array}{l|l} a^3+10a+11 & a+1 \\ \underline{a^3-a^2} & a^2+a+11 \\ \quad -a^2+10a & \\ \quad \underline{a^2-a} & \\ \quad\quad -11a+4 & \\ \quad\quad \underline{11a+11} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$D=$





$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{5}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{4}{25}$$

$$4+4\cos\alpha=25-25\cos\alpha$$

$$29\cos\alpha=21$$
$$\cos\alpha=\frac{21}{29}$$

$FD=\sqrt{30^2+4^2}=$
$=\sqrt{916}=$

$$x=\sqrt{15^2+6^2}=\sqrt{225+36}=\sqrt{261}=$$

$$EC=\sqrt{261\cdot 4-144}= \quad =\sqrt{29}\cdot 3$$

$$tg\angle BAC=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

$$=2\sqrt{261-36}=2\sqrt{225}=30$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7. $6x-2\geq 0$ при $x\in[\frac{1}{3};1]$ с учётом условия.

$6x-2<0$ при $x\in[-1;\frac{1}{3})$

При $6x-2<0$

$4-3x-|6x-2|=4-3x+6x-2=2+3x$

При $6x-2\geq 0$

$4-3x-|6x-2|=-9x+6$

$2+3x\geq -9x+6$

$12x\geq 4 \Rightarrow x\geq\frac{1}{3} \Rightarrow (a;b)=(3;2)$ подходит

$\frac{x\cdot y(y-1)}{3!}+\frac{x(x-1)y}{3!}=\frac{xy}{3!}(x+y-2)=49$

$xy(x+y-2)=7\cdot7\cdot3\cdot2$

$4-3-4\leq\frac{3}{2}+b\leq 4$

$-4{,}5\leq b\leq 2{,}5$

$\underbrace{4+3-8}_{-1}\leq-\frac{3}{2}+b\leq 1$

$0{,}5\leq b\leq 1{,}5$

$-a+b\leq 1$

$2\leq b\leq 1+a$

$2\leq b\leq 4-a$

$\cancel{x(x-1)}$

1 2 3 4 5

10 20 30 40

~~3 4 30~~

$7\cdot3(\overbrace{7+3-2}^{8})$

$7\cdot2(7+2-2)$

$\cancel{xy}(x+y-2)=49$

$7\cdot2\ (7+2-2)$

$\frac{y(y-1)}{2!}\cdot x+$

$\left(\frac{17+15x}{5+3x}\right)'=\frac{15(5+3x)-3(17+15x)}{25+30x+9x^2}=$

$=\frac{24}{(5+3x)^2}$

$6-9x \le \frac{17+15x}{5+3x}$

$3(2-3x)(5+3x) \le 17+15x$

$30-27x-27x^2 \le 17+15x$

$0 \le 27x^2+42x-13$

$x = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2+4\cdot 27\cdot 13}}{2\cdot 27}$

$4-3x-|6x-2| \le x+b \le \frac{17+15x}{5+3x}$

$-3 \le 1+b \le 4$

$-1 \le b-1 \le 1$

$0 \le b \le 2$

$2 \le b \le$

$(6-9x)(5+3x) \le 17+15x$

$-27x^2-27x+30 \le 17+15x$

$0 \le 27x^2+42x-13$

$x = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2+4\cdot 27\cdot 13}}{2\cdot 27} = \frac{-42 \pm 6\sqrt{7^2+3\cdot 13}}{2\cdot 27} =$

$= \frac{-42 \pm 6\sqrt{49+39}}{2\cdot 27} \approx \frac{-42}{54} \pm 1$

$x \in \left(-\infty; -\frac{96}{54}\right] \cup \left[\frac{12}{54}; +\infty\right)$

$a \le 1+\frac{17}{5} = \frac{22}{5}$

$a \ge 2-1=1$

$5+3x<0$

$x < -\frac{5}{3}$

$1 \le a \le 2$

$\frac{5}{2} \le b \le \frac{17}{5}$

$3 \le b-a \le \frac{2}{2}$

$6-9x \le \frac{17+15x}{5+3x}$

$(2-3x)(5+3x) \le 17+15x$

$10-9x^2-9x \le 17+15x$

$0 \le 9x^2+24x+7$

$x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2-4\cdot 9\cdot 7}}{2\cdot 9} = \frac{-24 \pm 6\sqrt{4^2-7}}{18} = \frac{-24 \pm 6\cdot 3}{18} = \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3}-1 \\ -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

$4+3-|-6-2|$

$-1 \le b-a \le 1$

$-3 \le a+b \le \frac{32}{8} = 4$

$4-2 \le b \le \frac{17}{5}$

$a \le 4-\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$

$\frac{10}{5} \le b \le \frac{17}{5}$

$a \ge -3-\frac{17}{5} = \frac{-32}{5}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)