

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

- 1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

- 3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

- 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
- 5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
- 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

- 7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \quad 6,25$$

$$xy - 2x - y + 2 \geq 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$y^2 + y + 4x^2 - 5xy - 2 = 0$$

$$(2,5y - x)^2 + 3x^2 + 2x - 5,25y^2 + y - 2 = 0$$

$$(2,5y - x)^2 + \sqrt{3}(x+1)^2 - (5,25y^2 - y - 2) = 0$$

$$(2x^2 - 4x + 2) + (y^2 - 4y + 4) = 3$$

$$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}$$

$$xy - 2x - (y - 2) = 0$$

$$-x(y - 2) - (y - 2) = (x - 1)(y - 2) \geq 0$$

$$x \geq 1 \quad y = 2$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = y > 2$$

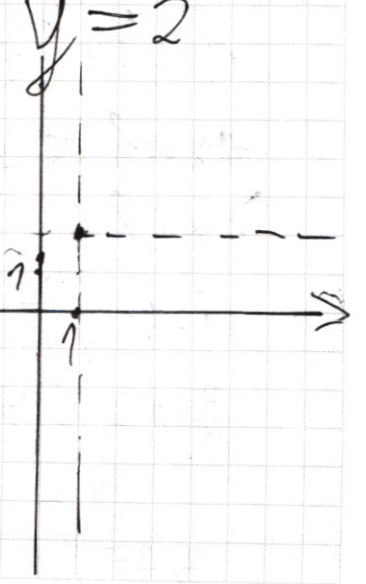
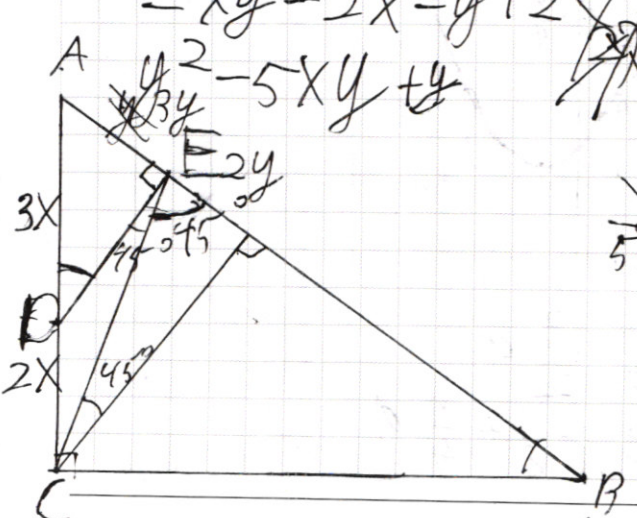
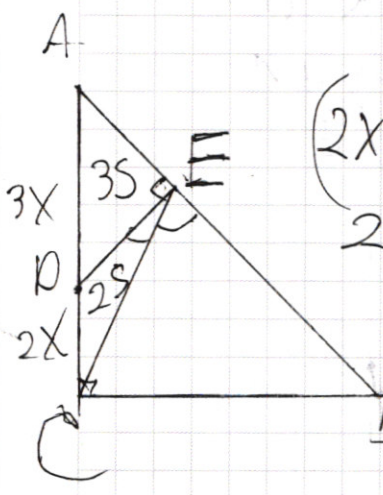
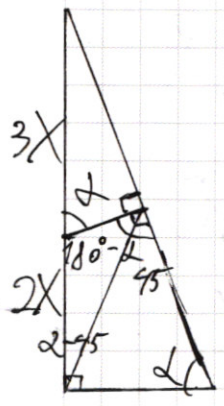
$$= xy - 2x - y + 2$$

$$y^2 - 5xy + 4 = 0$$

$$2x < 1$$

$$y < 2$$

$$\frac{y}{3x} = \frac{5x}{8}$$



$n \quad ny \quad ny^2 \quad ny^3$

$$t = y^2 \quad \frac{9}{2} - 1 = 3,5 = \frac{12}{2} = \frac{14}{4}$$

$$\frac{2-9}{16} = -\frac{3}{4} - 1$$

$$\frac{9}{8} - \frac{6}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$$

~~$$x = -ax^2 - 2x$$~~

~~$$ny^2$$~~
$$n^3 y^6 + 2n^2 y^4 + ny^2 = 0$$

$$n^2 y^4 + 2n y^2 + 1 = 0$$

$$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 1$$

$$t = n y^2$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} = t^2 + 2t + 1 = 0$$

~~$$= -\frac{1}{8}$$~~

$$(t+1)^2 = 0 \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1$$

$$t = -1$$

$$3x - 1$$

$$0 = ax + b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$2x^2 - x - 1$$

$$x < 0,5$$

$$-x + 1$$

$$\frac{25}{8} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$f(0,5) = 0,5$$

$$f(1,5) = 2$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 1,5 - 0,25 = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$b < 0,5 - 0,5a$$

$$a - 0,5 + b \leq 0,5$$

~~$$ax + b \leq 0,5$$~~

~~$$ax + b$$~~

$$a \cdot (-\frac{1}{4}) + b \geq -\frac{5}{8}$$

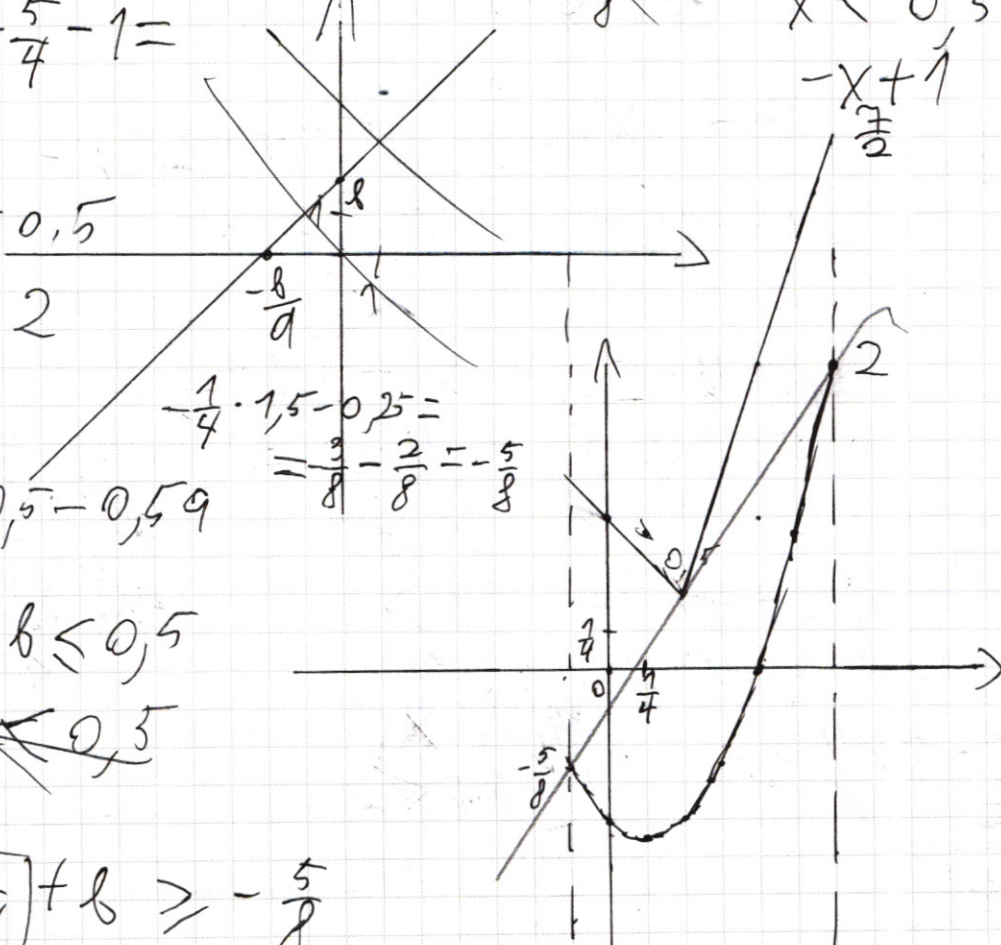
$$\frac{3}{2}a + b \geq 2$$

$$a = 1,5$$

$$2,25 + b = 2 \quad b = 0,25$$

$$b \geq \frac{3}{2}a$$

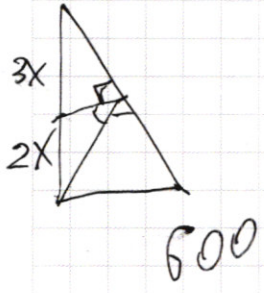
$$b \geq -\frac{5}{8} + \frac{1}{4}a$$



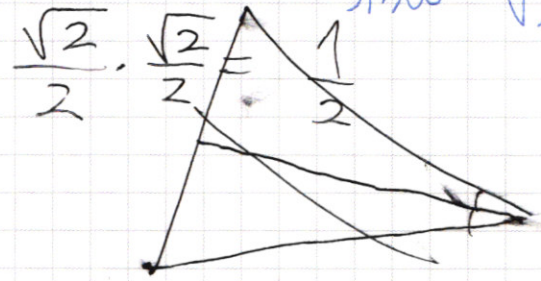
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y+x)^2 = 0$
 $x^2 + 2xy + y^2 = 0$
 $n^2 x^2 + 2nyx + ny^2 = 0 \quad | :n$

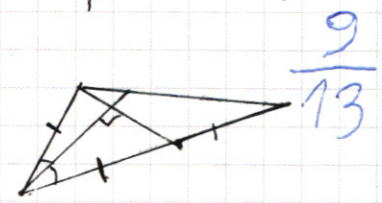
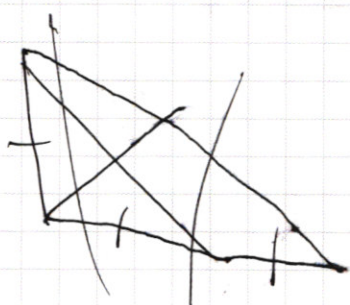
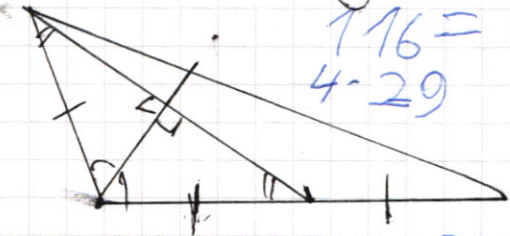
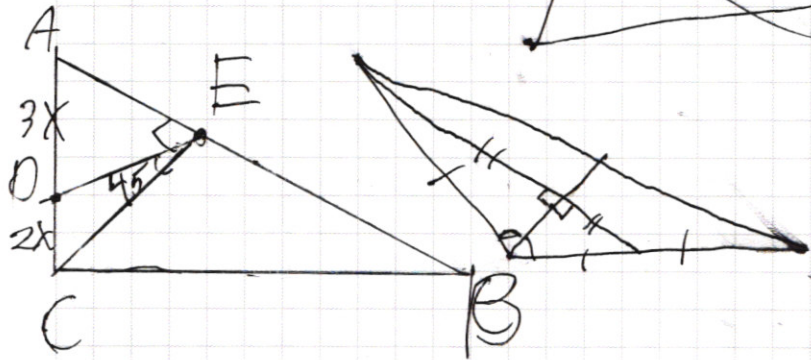
$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
 $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$



$n^2 y^6 + 2ny^3 + y^2 = 0$
 $\sin \alpha = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$



$x + 2x + y = 1200$
 $3x + y = 1200$
 $716 =$
 $4 \cdot 29$



$5x > 1200$
 $x > 200$
 $1200 > 4x$
 $x < 300$
 $300 > x > 200$

$2x < x + y$
 $y > x$
 $y < x + 2x$
 $y < 3x$

$3x > y > x$
 $1200 > y + x > 2x$
 $5x > 1200 > 4x$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot 9x^2 \cdot \frac{\sqrt{2,25}}{3,25}$$

~~$$S_{CEP} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot 9x^2 \cdot \frac{\sqrt{2,25}}{3,25} = 12x^2 \cdot \frac{2}{13}$$~~

$$\cos d = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \sqrt{\frac{1}{1,16}} = \sqrt{\frac{100}{116}}$$

$$\sin d = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \sqrt{\frac{0,16}{1,16}} = \sqrt{\frac{16}{116}}$$

$$HE = \sin d \cdot \cos d \cdot 3x = 3x \cdot \frac{40}{116}$$

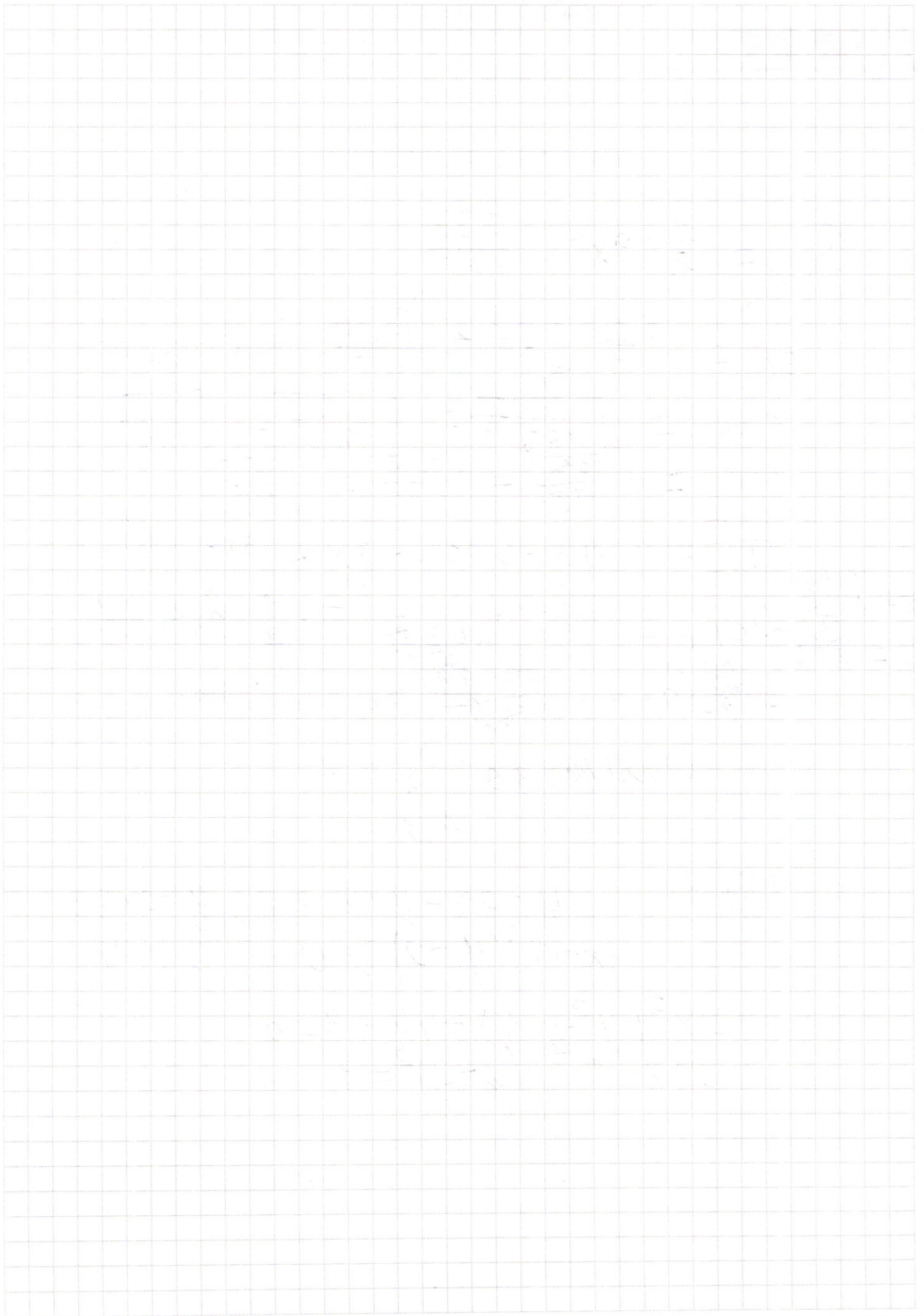
~~$$S_{CPE} = 1,5 \cdot S_{AED} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot 9x^2 \cdot \frac{40}{116} =$$~~
~~$$= 29 \cdot 3 \cdot \frac{40}{116} = 30 \cdot \frac{10}{3} = 1,2$$~~

Ответ: $30 \cdot \frac{10}{3} = 1,2$
N 3

0 3: $xy - 2x - y + 2 \geq 0; y - 2x \geq 0$
 $(x-1)(y-2) \geq 0 \quad y \geq 2x$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

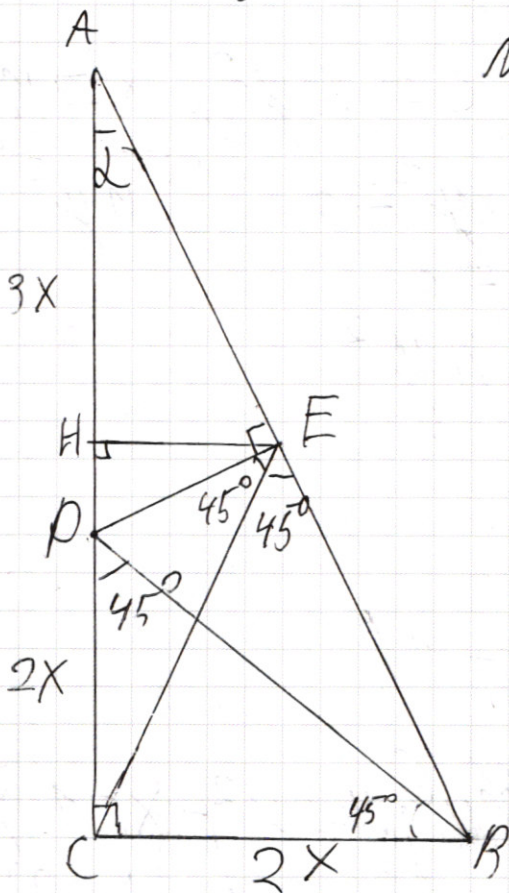
1) - 21:

$$a = 1,5$$

$$\frac{1,5}{2} + b = \frac{1}{2}$$

$$b = -0,25$$

Ответ: ~~$a = 1,5; b = 0,25$~~
 $(1,5; -0,25)$



N4

м.р. $\angle PEC = 95^\circ$
 $\angle DEE = 90^\circ$, но
 $\angle CEB = 45^\circ$

м.р. $\angle DEB + \angle DCB = 180^\circ$, но $DEBC =$
 вписанный \Rightarrow

$$\angle CPB = \angle CEB = 45^\circ$$

$$\angle PEC = \angle PRC = 45^\circ$$

в $\triangle CPB \angle P = \angle B \Rightarrow$

$$PC = RC = 2x$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = 0,4$$

Ответ: 0,4

м.р. $AD: DC = 1,5 \Rightarrow SAED:$

$SCDE = 1,5$. $\triangle ACB \sim \triangle$

$$\cos d = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 d + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3,25}}; \sin d =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} d}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 d}} = \frac{2,25}{\sqrt{3,25}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$HE = 3x \sin d \cdot \cos d = 3x \frac{\sqrt{235}}{3,25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

сторонами : $300 - 200 - 2 = 98$

Ответ: 98.

№1

$a = n$; $b = ny$; $c = ny^2$; $x = ny^3$

$n^3 y^6 + 2n^2 y^4 + ny^2 = 0$ | : ny^2

$n^2 y^4 + 2ny^2 + 1 = 0$

заменим : $c = ny^2$

$c^2 + 2c + 1 = 0$

$(c+1)^2 = 0$

$c = -1$

Ответ: -1.

нарисуем график функции $y = 2x^2 - x - 1$;

$y = x + |2x - 1|$:

$-\frac{1}{4}a + b \geq -\frac{5}{8}$

$\frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2}$

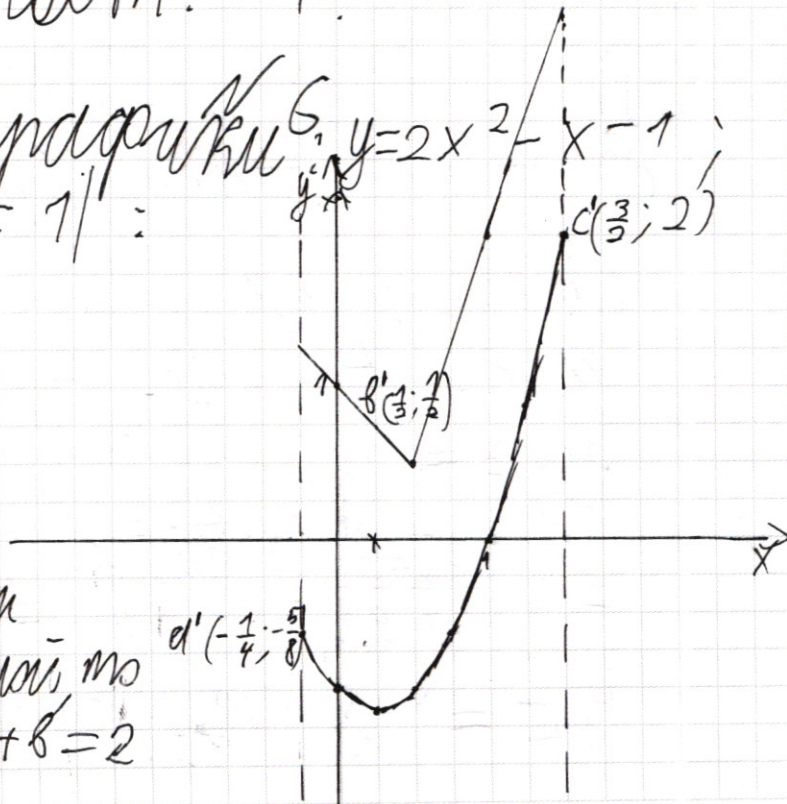
$\frac{3}{2}a + b \geq 2$

т.к. ~~через~~ точки

a' ; b' и c' лежат

на одной прямой, то

1) $\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{2}a + b = 2$



$$(x-1)(y-2) \geq 0$$

$$y-2x \geq 0$$

$$y \geq 2x$$

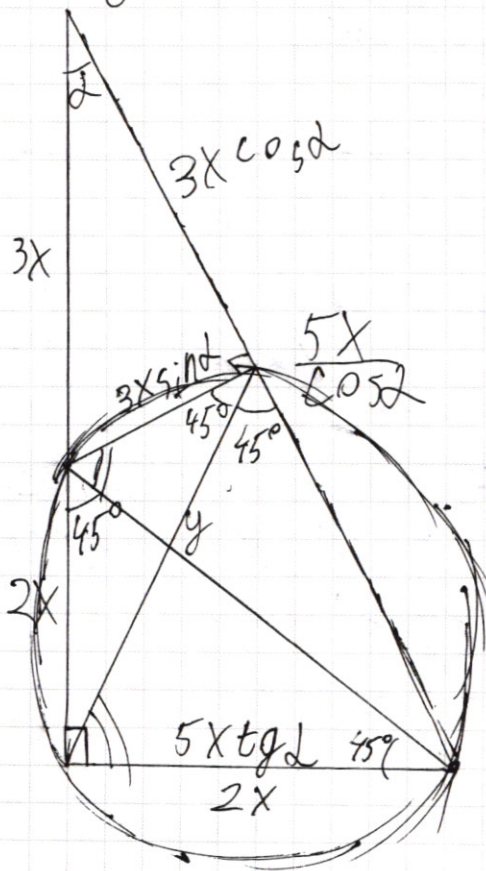
$$1 = \sqrt{2x^2}$$

$$x =$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$
~~$$(y^2 + y + 0,25) + (4x^2 + 2x + 0,25) - 5xy - 2,5 = 0$$

$$(y + 0,5)^2 + (2x + 0,5)^2 - 5xy - 2,5 = 0$$~~

$$-5xy + 2x^2 + 6x + 5y - 5 = 0$$



$$y^2 + 3x^2 \sin^2 \alpha - 2xy \cos \alpha = 4x^2$$

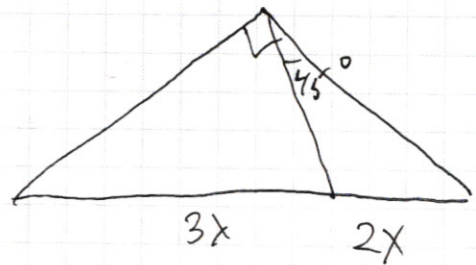
$$y^2 + 9x^2 \sin^2 \alpha - \sqrt{2}xy = 4x^2$$

$$y^2 - \sqrt{2}x \cdot y + (9 \sin^2 \alpha - 4)x^2 = 0$$

$$D = 2x^2 - 4(9 \sin^2 \alpha - 4)x^2 =$$

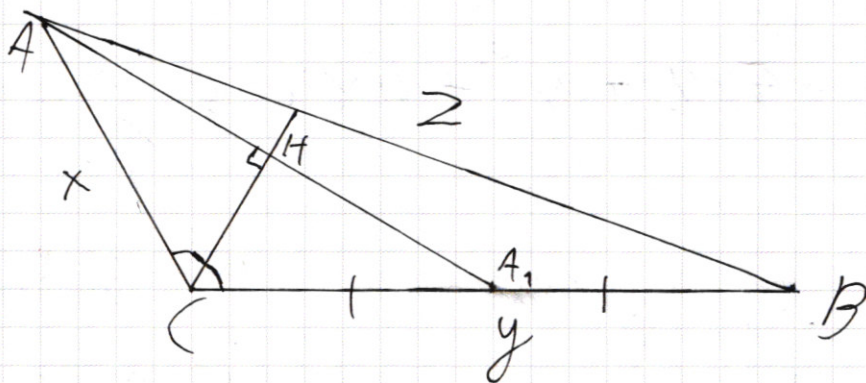
$$= x^2 (18 - 36 \sin^2 \alpha)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}x \pm 3x \sqrt{2 - 4 \sin^2 \alpha}}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2
Стороны треугольника: x y z :



т.к. $\angle CHA = \angle CHA_1$, $\angle HCA_1 = \angle HCA$,
 CH - общая, то $\triangle ACH = \triangle A_1CH \Rightarrow$
 $AC = CA_1$; $y = 2x \Rightarrow x + y + z = 1200$
 $3x + y = 1200$; т.к. $x < 2x$; то
 $2x < x + y$; $y < 3x$
 $y > x$ $y < 3x$

$$3x > y > x \quad | + 3x$$

$$6x > 1200 > 4x$$

$$1) \quad 6x > 1200$$

$$2) \quad 1200 > 4x$$

$$x > 200$$

$$300 > x$$

$300 > x > 200$; т.к. $3x + y = 1200$,
 то при известном x есть только
 один треугольник с целыми