# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

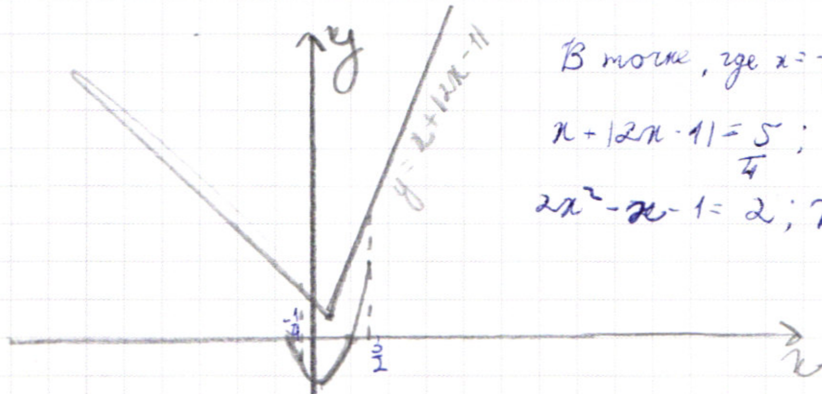
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6




В точке, где $x=-\frac{1}{4}$ $2x^2-x-1=-\frac{5}{8}$ $x+|2x-1|=\frac{5}{4}$; в точке, где $x=\frac{3}{2}$ $2x^2-x-1=2$; $x+|2x-1|=\frac{7}{2}$

Пусть $f(x)=2x^2-x-1$

$g(x)=x+|2x-1|$

$h(x)=ax+b$

При $x=\frac{1}{2}$ $g(x)$ принимает свое наименьшее значение.

$f(-\frac{1}{4}) \leq h(-\frac{1}{4}) \leq g(-\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{2}) \leq h(\frac{1}{2}) \leq g(\frac{1}{2})$

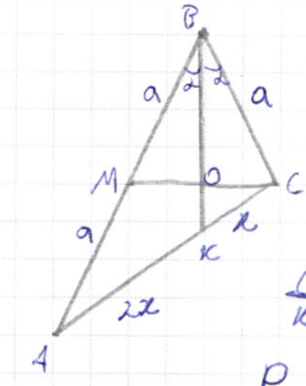
$f(\frac{3}{2}) \leq h(\frac{3}{2}) \leq g(\frac{3}{2})$

Точки $(-\frac{1}{4}; f(-\frac{1}{4}))$; $(\frac{1}{2}; g(\frac{1}{2}))$; $(\frac{3}{2}; f(\frac{3}{2}))$ лежат на одной прямой с коэффициентом наклона равным $\frac{3}{2}$ и свободным членом равным $-\frac{1}{4}$. Если $h(-\frac{1}{4}) > f(-\frac{1}{4})$, то $h(\frac{1}{2}) > g(\frac{1}{2})$ Если $h(\frac{3}{2}) > f(\frac{3}{2})$, то $h(\frac{1}{2}) > g(\frac{1}{2})$. Если $g(\frac{1}{2}) > h(\frac{1}{2})$, то $h(-\frac{1}{4}) \leq f(-\frac{1}{4})$ либо $h(\frac{3}{2}) \leq f(\frac{3}{2})$ Через 3 точки можно провести единственную прямую, значит $h(-\frac{1}{4}) = f(-\frac{1}{4})$ $h(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})$, $h(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2})$, тогда $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$

Ответ $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2




BK - биссектриса, CM - медиана, $\triangle MBO$ и $\triangle BOC$ имеют общий катет BO и угол между этим катетом и гипотенузой равный $\alpha$, значит эти треугольники равны, $\triangle MBC$ - равнобедренный.

$\frac{CK}{KA} = \frac{BC}{BA}$ т.к. BK - биссектриса. $\frac{CK}{KA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$P_{ABC} = a + 2a + 3x = 1200$. $3(a+x) = 1200$, $a + x = 400$

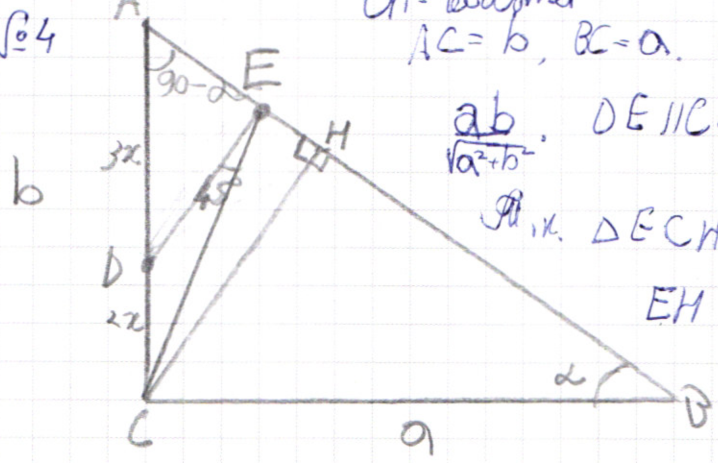
$3x + a > 2a$ по правилу треугольника. $3x > a$; $x > \frac{a}{3}$

$a + 2a > 3x$; $a > x$, тогда $2a > a + x > a + \frac{a}{3}$

$2a > 400 > \frac{4a}{3}$. $\left[\begin{array}{l} a > 200 \\ a < 300 \end{array}\right.$ Всего вариантов значений a 98 соответственно столько же треугольников

Ответ: 98

№4




CH - высота

$AC = b$, $BC = a$. $CH = a \cdot \sin\alpha = a \cdot \frac{b}{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $DE \parallel CH$, значит $\angle DEC = \angle ECH = 45°$

т.к. $\triangle ECH$ прямоугольный, $\angle ECH = 45°$, то $EH = CH$. $EH = AH - AE$; $\triangle ADE \sim \triangle ACH$

$k = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$. $\frac{AE}{AH} = \frac{3}{5}$; $AH - AE = AH - \frac{3}{5}AH = \frac{2}{5}AH$. $AH = b\cos(90-\alpha)$

$AH = b\sin\alpha$ $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $AH = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $EH = CH$; $\frac{2}{5}AH = CH$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\frac{2b}{5} = a$ $tg\angle BAC = \frac{a}{b} = \frac{2b}{5} : b = \frac{2}{5}$

$AE = \frac{3}{5}AH$. Если $b = \sqrt{29}$, то $a = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

$CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\sqrt{29}^2}{\sqrt{\frac{4\cdot 29}{25} + 29}} = \frac{\frac{2\cdot 29}{5}}{\frac{29}{5}} = 2$ см $S_{ADE} = k^2 \cdot S_{ACH}$.

$S_{ACH} = \frac{CH \cdot AH}{2} = \frac{ab^3}{2(a^2+b^2)} = \frac{\frac{2\cdot 29^2}{5}}{\frac{2\cdot 29^2}{25}} = 5$ см$^2$ $S_{ADE} = \frac{5 \cdot 9}{25} = \frac{9}{5}$ см$^2$

$S_{CDEH} = S_{ACH} - S_{ADE} = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$ см$^2$. $S_{CDE} = S_{CDEH} - S_{CEH}$ $S_{CEH} = \frac{CH^2}{2} = 2$ см

$S_{CDE} = \frac{16}{5} - 2 = \frac{6}{5}$ см$^2$ Ответ: а) $\frac{2}{5}$ б) 1,2 см$^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Т.к. $a, b, c$ - последовательные члены геометрической прогрессии, то $b = \sqrt{ac}$. $ax^2 + 2\sqrt{ac}\cdot x + c = 0$; $x_1 = \frac{-2\sqrt{ac} \pm \sqrt{4ac-4ac}}{2a} = \frac{-\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = \frac{-b}{a}$

Пусть $q$ - частное прогрессии, тогда $\frac{b}{a} = q = \frac{c}{b}$. $c = \frac{b^2}{a}$; $q = \frac{b}{a}$

Четвертый член прогрессии равен $c \cdot q = \frac{b^3}{a^2} = -\frac{b}{a}$; $\frac{b^2}{a} = -1$

Т.к. $c = \frac{b^2}{a}$, то третий член прогрессии равен $-1$ Ответ: $-1$

№3 $y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$ ; $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$

$2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$ $(y-2)^2 + 2(x-1)^2 = y^2 + 2x^2 - 4x - 4y + 6$.

$y^2 + 2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$; $(y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3$

$y - 2 = a$; $x - 1 = b$

$a^2 + 2b^2 = 3$

$a - 2b = \sqrt{ab}$ $(a-2b)^2 = ab$; $a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$; $a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

С помощью теоремы Виета получаем, что $(a-4b)(a-b) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 4b \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases} \quad 16b^2 + 2b^2 = 3; \quad b^2 = \frac{1}{6}; \ b = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}. \ x - 1 = \frac{1}{\sqrt{6}}; \ x - 1 = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \begin{cases} a = b \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases} \quad b^2 + 2b^2 = 3 \quad b^2 = 1; \ b = \pm 1; \ x - 1 = 1; \ x - 1 = -1 \end{array}\right.$$

$\left(x = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}; y = \frac{4\sqrt{6}+4}{\sqrt{6}}\right)$; $\left(x = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}}; y = \frac{4\sqrt{6}-4}{\sqrt{6}}\right)$; $(x = 2; y = 2)$; $(x = 0; y = 0)$

Т.к. $y - 2x \geq$, то вариант $x = 2$; $y = 2$ не подходит

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}; \frac{4\sqrt{6}+4}{\sqrt{6}}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}}; \frac{4\sqrt{6}-4}{\sqrt{6}}\right)$; $(0; 0)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$y^2-4y+4+2x^2-4x+2=3$ $\quad 2x=m;\ y=n$

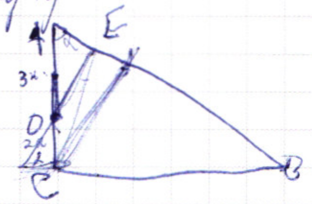
$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$

$4x^2+y^2-4xy=xy-2x-y+2$

$2x(2x+1)+y(y+1)=5xy+2$

$\frac{m^2}{2}+n^2-2m-2n+3=0$ $\quad n-m=\sqrt{\frac{mn}{2}-m-n+2}$

$x-y\geq 2\sqrt{xy}$



$xy-2x-y+2>2xy$ $\quad 2+\ -2x-y\leq\sqrt{2xy}-2$

$2-2x-y>3xy$ $\quad$ ~~$\sqrt{2xy}-2>3xy$~~

$a^2+2b^2=3$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$(a-4b)(a-b)$

$f(1)=f(a)+f(2)$

$a=1$ $\quad f(1)=2f(1)$ $\quad f(2a)=f$

$f(1)=0$

$f(a^2)=2f(a)$

$xy-2x-y+2$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$a=4b;\ a=b$

~~$2x^2+(y-2)^2-4x$~~ $\quad (x-1)(y-2)$

$a=y-2$

$\sqrt{3-2(x-1)^2}+2-2x-$

$2x^2+y^2-6x+3y+3=\sqrt{xy-2x-y+2}$ $\quad \Rightarrow y^2-4y+4-24$

$\sqrt{25y^2-100y+70}$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$ $\quad y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$ $\quad 5y-10$

$w=3$ $\quad a^2+2b^2=3$ $\quad 3\geq 2ab\sqrt{2}\geq$ $\quad a>\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$a-2b=\sqrt{ab}$ $\quad \frac{3}{2\sqrt{2}}\geq ab$

$y-2=a;\ x-1=b$ $\quad y\geq\frac{2\sqrt{5}+10}{5}$

$a^2\geq\frac{24}{25}$

$a^2-4ab+4b^2=ab$ $\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos$

$3+2b^2-5ab=0$ $\quad \sqrt{25a^2-24}$

$a:\ -2b\leq 2\sqrt{2ab}$ $\quad \frac{5a+\sqrt{25a^2-24}}{4}>0$ $\quad tg\,B=?$ $\quad \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

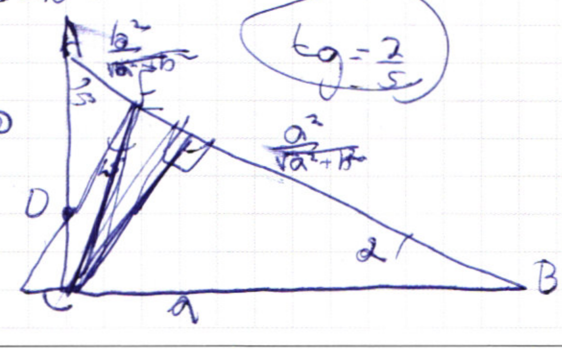
$2b^2-5ab+3=0$ $\quad \frac{29}{5}$ $\quad tg=\frac{2}{5}$

$\frac{a}{b}=?$ $\quad a=\frac{2b}{5}$ $\quad 5a$ $\quad \frac{29}{25}\cdot 29$

$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=h$

$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2b^2}{5\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad a=\frac{2\sqrt{29}}{5}$

$2$ $\quad b=\sqrt{29}$




☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $4b^2 - 4ac = 0$ $-\frac{b}{a}$ - четвертый член прогрессии

$a;\ b;\ \frac{b^2}{a}\ -\frac{b}{a}$ $\sqrt{-\frac{b^2}{a}} = \frac{b^2}{a}$ $\frac{b^4}{a^2} = -\frac{b^2}{a}$ $\frac{b^2}{a} = -1$

$b \cdot \frac{b^2}{a^2}$

$bq^n\ bq^{n+1}\ bq^{n+2}$ $b^2 = -a$

$b = \sqrt{-a}$

$\frac{-1}{\sqrt{-a}}$ $\frac{\sqrt{-a}}{a}$ $\frac{-1}{\sqrt{-a}} = q$ $\frac{b^2}{a} \cdot \frac{b}{a}$ $\frac{b^3}{a^2} = -\frac{b}{a}$

$a;\ b;\ -1;\ -\frac{1}{a}$

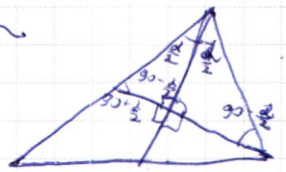
$\frac{\sqrt{-a}}{a}$ $\frac{1}{\sqrt{-a}}$

$q = \frac{-1}{\sqrt{-a}}$ $a;\ \frac{-a}{\sqrt{-a}};\ -1;\ \frac{1}{\sqrt{-a}}$ $\sqrt{-a}\sqrt{-a}$ $\sqrt{-a}$

$a;\ \sqrt{-a};\ (-1);\ \frac{1}{\sqrt{-a}}$

$400 < a < 200\sqrt{3}$ $a;\ 2a;\ 3x$ $3a\sqrt{81\sin\alpha+1} \in \mathbb{Z}$

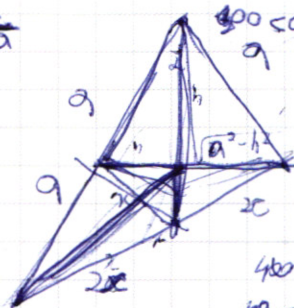
№2



$a > x > \frac{a}{3}$

$a + x = 400$

$3x\ h$



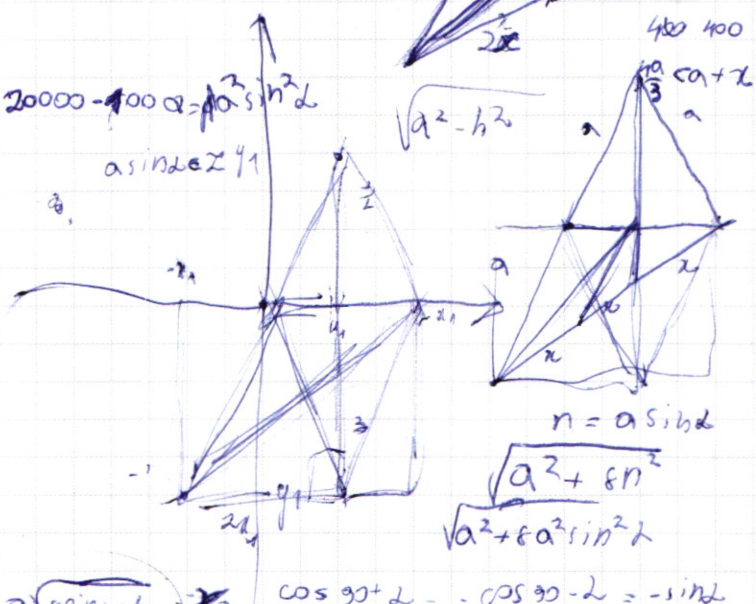
$20000 - 400a = a^2\sin^2\alpha$

$a\sin\alpha < y_1$

$\frac{a}{3} < a + x < 2a$ (98)?

2 3 4

$(-x_1; -y_1);\ (2x_1; 0)$



$\sqrt{a^2-h^2}$

$\sqrt{(3x_1)^2 + y_1^2}$ 8·50

$\sqrt{9x_1^2 + y_1^2} = 3x$ $8\cdot 50^2 - 1000 = a^2\sin^2$

$h = a\sin\alpha$

$\sqrt{a^2 + 8h^2}$

$x_1^2 + y_1^2 = a^2$ $400^2 - 800a = 8a^2\sin^2\alpha$

$\sqrt{a^2 + 8a^2\sin^2\alpha}$

$9x^2 = 8a^2$

$a\sqrt{8\sin\alpha + 1}$ $\cos(90+\alpha) = -\cos(90-\alpha) = -\sin\alpha$

$9x^2 = a^2 + 8x_1^2$ 3( )

$4x_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + 2\sin\alpha\, 2x_1\sqrt{x_1^2 y_1^2}$

$3\sqrt{a^2 - \frac{h^2}{9}}$ $a + a\sqrt{81\sin\alpha + 1} = 400$

$3x_1^2 + y_1^2 + \frac{4x_1^2}{y_1}\sqrt{x_1^2 y_1}$ $400^2 + a^2 - 800a = 8a^2\sin^2\alpha + a^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

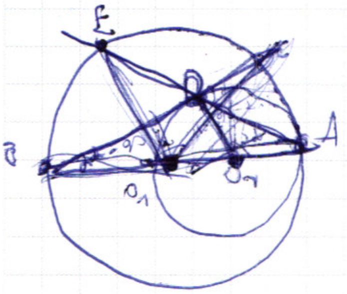
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$r^3+(2R-r)^2=9$

$\cancel{2r^2+4R^2-4Rr=9}$

$2R^2-4Rr+4R^2=9$

$\cdot\sin 2\alpha$

$\cos\ 90-2\alpha=\cos\ 90+2\alpha$

$\cos\ \cancel{180}\ 90-\sin 2\alpha$

$r\cdot\frac{rR}{r}=\ \ \frac{r^2R}{r}=3$

$\sin 2\alpha$

$(2R-r)\cdot\cos(2\alpha-90)=3$

$(2R-r)\cancel{\cos}\sin 2\alpha=3$

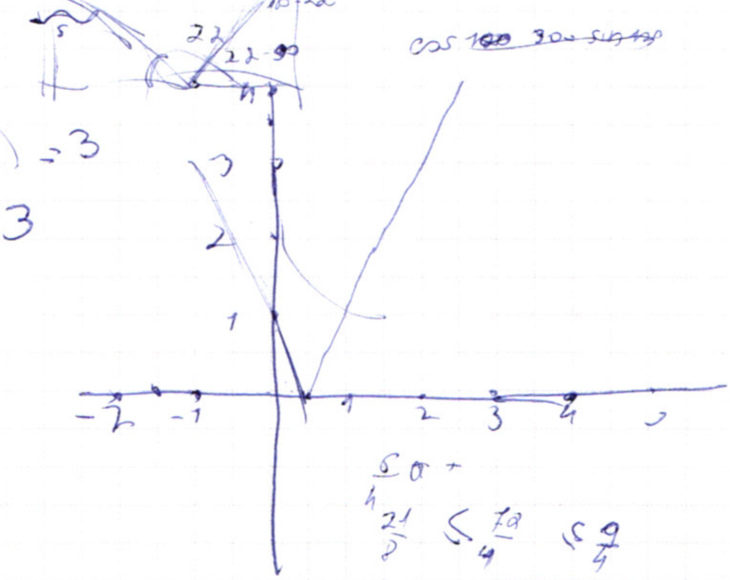
$\sqrt{2R^2-2R^2\cos 2\alpha}=4$

$R\sqrt{2(1-\cos 2\alpha}=4$

$2r^2-2r^2\cos 2\alpha=r^2$

$2rR-2Rr\cos 2\alpha=3$

$2Rr(1-\cos 2\alpha)=(2R-r)\sin 2\alpha$



$\frac{5}{4}a+$

$\frac{21}{8}\le\frac{7a}{4}\le\frac{9}{4}$

$\frac{21}{2}\le 7a\le 9$

$\frac{3}{2}\le a\le\frac{3}{7}$

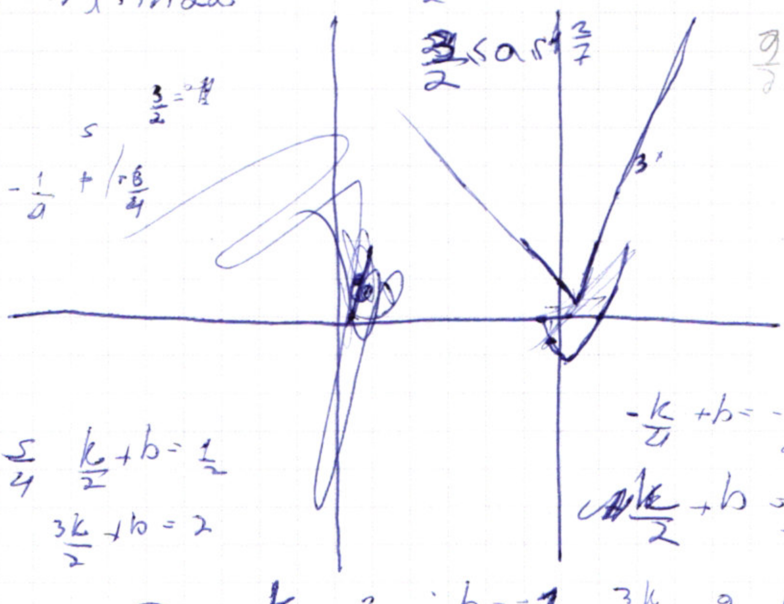
$\frac{9}{8}\ \ \frac{3}{2}\ \ 1$

$-0,5;1$

$\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$

$\frac{1-3}{4}\ \ \frac{1+3}{4}\ \ -\frac{1}{8}\ \ +\frac{1}{4}\frac{8}{4}$

$\frac{9}{8}\ \ \frac{3}{2}\ \ 1$



$-\frac{1}{8}$

$\frac{1}{8}\ \ \frac{21}{8}\ \ 1$

$\frac{1}{8}+\frac{2}{4}-1$

$-\frac{5}{8}\le-\frac{a}{4}+b\le\frac{5}{4}$

$\frac{k}{2}+b=\frac{1}{2}$

$2\le\frac{3}{2}a+b\le\frac{14}{4}$

$\frac{3k}{2}+b=2$

$-\frac{k}{4}+b=-\frac{5}{8}$

$\frac{k}{2}+b=\frac{1}{2}$

$-\frac{5}{8};\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\frac{3}{2};2$

$k=\frac{3}{2};\ b=-\frac{1}{4}\ \ \frac{3k}{4}=\frac{9}{8}\ \ k=\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2};-\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(3) =$ [illegible]

~~$f(6) = f(3) + f(2) = f(2)$~~

$f(7) = 3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)