



# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 + 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 3 : 5$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 45^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{29}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
- [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 1, BD = 3$ .
- [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ .

- [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$  и  $f(x/y) < 0$ .



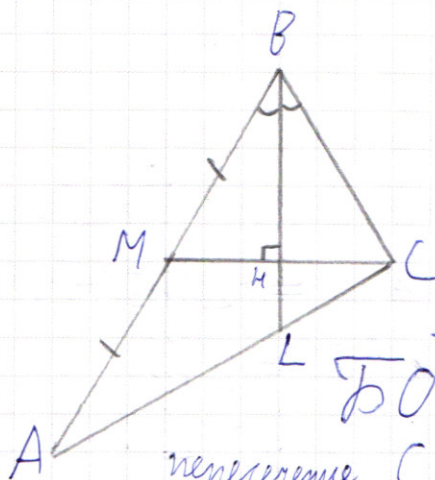
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

Пл.к.  $a, b, c$  - первый, второй и третий член ~~арифметической~~ геометрической прогрессии, то  $b = ka$ ,  $c = k^2a$ . Четвертый член  $d = k^3a$ . Подставим  $a, b$  и  $c$  в квадратное уравнение  $ax^2 + 2kax + k^2a = 0$ .  $D = 4k^2a^2 - 4 \cdot a \cdot k^2a = 0$ . Получаем у уравнения 1 корень.  $x = \frac{-2ka}{2a} = -k$ . То условие  $d = x$ .  $k^3a = -k$ .  $k^2a = -1 = c$ .

Ответ: -1.

2.



Каждый угол в  $\Delta < 180^\circ$ , значит половина любого угла в  $\Delta < 90^\circ \Rightarrow$

биссектриса не может быть  $\perp$  медиане, если они выходят из одного угла.

То же биссектриса  $BL \perp$  медиане  $CM$ . Обозначим пересечение  $CM$  и  $BL$  как  $H$ .  $BH$  является высотой и биссектрисой в  $\Delta MBC \Rightarrow MB = BC$ . Основание биссектр. делит сторону на отрезки в соотношении равном соотношению прилежащих к ней сторон  $\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{1}$ . Пусть  $BC = x$ , тогда  $AB = 2x$ , а  $AC = 3y$ . Две стороны одного  $\Delta$  больше третьей  $\Rightarrow x + 2x > 3y$ .  $x > y$ ,  $2x + 3y > x$ ,  $x + 3y > 2x$ .  $3y > x$ . Получаем  $3y > x > y$ , а  $3x + 3y = 1200$

max как это пишется.  $x+y=400$ .  $y=400-x$ .  $1200-3x > x > 400-x$ .  
 $1200-3x > x$ .  $1200 > 4x$ .  $300 > x$ .  $x > 400-x$ .  
 $2x > 400$ .  $x > 200$ .  $300 > x > 200$ .  $x \in (200; 300)$

Ответ: 99.

7.

$f(1) = f(1) + f(1)$ .  $f(1) = 0$ . Ищем  $f(x)$  для всех  $x$ .  
 $2 < x \leq 21$ .  $f(2), f(3) = 1$ .  $f(4), f(5), f(6), f(9) = 2$ .  
 $f(7), f(8), f(10), f(12), f(15), f(18) = 3$ .  $f(14), f(16), f(20), f(21) = 4$ .  
 $f(11) = 5$ .  $f(13) = 6$ .  $f(17) = 8$ .  $f(19) = 9$ .

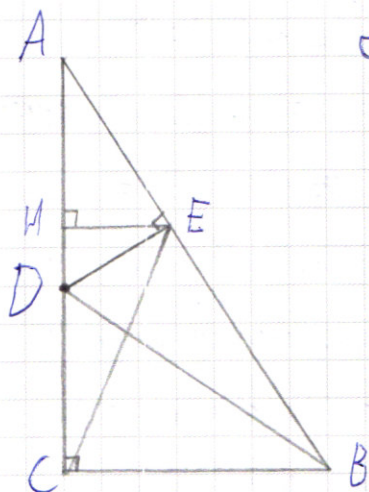
$f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$ .  $f(\frac{x}{y}) = f(y) - f(x)$ . Ищем, когда  $f(\frac{x}{y}) < 0$ , нужно найти все пары  $y$  и  $x$  такие что  $f(y) - f(x) < 0$ .  $f(y) < f(x)$ . Ищем

$$1 \cdot 20 + 2 \cdot 18 + 4 \cdot 14 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$$

$$= 20 + 36 + 56 + 48 + 16 + 3 + 2 + 1 = 182.$$

Ответ: 182.

4.



Ил.к.  $\angle DEB + \angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , EBCD - вписанный четырехугольник  $\Rightarrow \angle DEC = \angle DCB$ ,  ~~$\angle CED = \angle CDB$~~   $\angle CEB = \angle CDB$

(они опираются на одну дугу).  $\angle CEB = 90 - \angle CED = 90 - 45 = 45^\circ$ . Ищем

$\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ \Rightarrow CD = CB$ . Ищем

$AC = 5x$ , тогда  $AD = 3x$ , т.к.  $DC = AC - AD = 5x - 3x = 2x = CB$ .  $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = 0,4$ .

$$AB^2 = AC^2 + BC^2. BC = \frac{2AC}{5} = \frac{2 \cdot 29}{5}. AB^2 = 29 + \frac{116}{25} = \frac{841}{25}$$

$AB = \frac{29}{5}$ .  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  ( $\angle A$  общий,  $\angle AED = \angle ACB$ )  $\Rightarrow$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad AD = \frac{3 \cdot AC}{5} = \frac{3 \sqrt{29}}{5} \quad AE = \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{3 \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot 5}{5 \cdot 29} =$$
$$= 3. \text{ В } \triangle AED \text{ проведем высоту } EM. \triangle AEM \sim \triangle ABC$$
$$(\angle A \text{ общий, } \angle AME = \angle ACB) \Rightarrow \frac{ME}{CB} = \frac{AE}{AB} \quad ME = \frac{AE \cdot BC}{AB} =$$
$$= \frac{3 \cdot 2 \sqrt{29} \cdot 5}{5 \cdot 29} = \frac{6}{\sqrt{29}} \quad S_{\triangle CDE} = \frac{ME \cdot CD}{2} = \frac{6 \cdot 2 \sqrt{29}}{\sqrt{29} \cdot 5 \cdot 2} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: а) 0,4. б) 1,2.



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b = ka \quad c = k^2 a$   
 $-k = k^3 a$   
 $x = -1 = k^2 a$

$ax^2 + 2akx + ak^2 = 0$   
 $x_1 + x_2 = \frac{-2ak}{a} = -2k$   
 $x_1 x_2 = \frac{ak^2}{a} = k^2$   
 $x_1 = x_2 = -k$   
 $D = 4a^2 k^2 - 4a^2 k^2 = 0$   
 $x = \frac{-2ak}{2a} = -k$

$25x^2 + 4x^2 = AB^2$   
 $29x^2 = AB^2$   
 $x = 1 \quad y$

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$   
 $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$   
 $y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$   
 $2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 3 = 0$   
 $D = 16 - 4 \cdot 2(y^2 - 4y + 3) = 29 + \frac{841}{25}$   
 $= -8y^2 + 32y - 8$   
 $8 - (2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2})^2 + 16y$   
 $-2x^2 + 4xy - 4x - 4y + 3 = -xy + 2x + y + 2$   
 $-2x^2 + 5xy - 6x - 5y + 5 = 0$   
 $2x^2 + (6 - 5y)x + 5y + 5 = 0$   
 $D = 36 - 60y + 25y^2 - 40y + 40 = 76 - 100y + 25y^2$   
 $\frac{BE^2}{ED^2} + 16 = \frac{9EC^2}{ED^2}$   
 $BE^2 + 16ED^2 = 9EC^2$   
 $AB = EC \cdot AD = \frac{3EC}{ED} \cdot \frac{1}{AD} = \frac{3}{3} = \frac{EC}{AB}$   
 $AB^2 = AC^2 + 16 = BE^2 + AE^2 = \frac{3}{AD} = \frac{BE}{AC}$

$AE \cdot AB = AD \cdot AC = \frac{\sqrt{29} \cdot 3}{5}$   
 $1200 - 3y > y > 400 - y$   
 $1200 > 4y \quad 2y > 400$   
 $300 > y > 200 \quad y > 200$

$AE = \frac{15}{\sqrt{29}}$   
 $\sqrt{29} AE = 15$   
 $AE = \frac{15}{\sqrt{29}}$   
 $DE = \frac{6}{\sqrt{29}}$   
 $E \cdot \frac{AE}{DE} = \frac{3}{\sqrt{29}}$   
 $\frac{EH}{DECB} = \frac{AE}{AB}$   
 $3(y+x) = 1200 \quad 3x > y > x$   
 $y > \frac{267}{34}$   
 $3y > 3x$   
 $2y < y + 3x$   
 $y < 3x \quad \frac{15}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{ME \cdot \sqrt{29}}{6}$   
 $x + y = 400 \quad 90 = ME \cdot 29$   
 $30 = ME \cdot 29$   
 $ME = \frac{30}{29} \cdot \frac{2}{2}$



$$2x^2 - (1+a)x - 1 - b \leq 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1+a}{2} \quad f(17) = 8$$

$$x_1 x_2 = -\frac{1+b}{2} \quad f(18) = 3$$

$$x_1 \leq x_2 \quad f(19) = 9$$

$$x_1 \leq -\frac{1}{4}; \quad \frac{3}{2} \leq x_2 \quad f(20) = 4$$

$$f(21) = 4$$

$$f(1) = 0 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 1 \quad f(4) = 2 \quad f(9) = 2$$

$$x_{n+1} < 0 \quad 2x < -1 \quad x < -0,5 \quad f(5) = 2 \quad f(10) = 3$$

$$f(6) = 2 \quad f(11) = 5$$

$$x(a-1) + b - |2x+1| \leq 0 \quad f(7) = 3 \quad f(12) = 3$$

$$dx - x + b + 2x + 1 \leq 0 \quad f(8) = 3 \quad f(13) = 6$$

$$ax + x + b + 1 \leq 0 \quad f(14) = 4$$

$$f(\frac{1}{2}) = f(2) - f(4) \quad f(15) = 3$$

$$x \geq -0,5 \quad f(16) = 4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1+a}{2} \\ x_1 x_2 = -\frac{1+b}{2} \\ x_1 \leq -\frac{1}{4} < \frac{3}{2} \leq x_2 \\ ax - x + b - |2x-1| \leq 0 \end{cases}$$

$$dx - x + b - 2x - 1 \leq 0 \quad f(2) = f(\frac{1}{2}) + f(4)$$

$$ax - 3x + b - 1 \leq 0 \quad 1 = f(\frac{1}{2}) + 2$$

$$ax_2 - 3x_2 + b - 1 \leq 0 \quad f(\frac{1}{2}) = -1$$

$$a \leq \frac{b - 3x_2 - 1}{x_2} \quad f(\frac{1}{3}) = -$$

$$a = \frac{1}{2x_1 + 2x_2} - 1 \quad f(2) = f(\frac{1}{x}) + f(2x)$$

$$a = 2x_1 + 2x_2 - 1$$

$$b = -2x_1 x_2 - 1$$

$$2x_1 x_2 + 2x_2^2 - x_2 \leq b - 3x_2 - 1$$

$$-1 - b + 2x_2^2 - x_2 \leq b - 3x_2 - 1 \quad f(1) = f(\frac{1}{y}) + f(y)$$

$$2x_1^2 + 2x_2 x_1 - x_1 - x_1 - 2x_1 x_2 - 1 - 2b - 2x_2 - 2x_2^2 \geq 0 \quad f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$$

$$b \geq x_2(1 + x_2) \quad f(\frac{x}{y}) = f(y) - f(x)$$

$$|2x_1 - 1| \leq 0 \quad 2x_1 \geq 1$$

$$2x_1^2 - 2x_1 - 1 + |2x_1 - 1| \leq 0 \quad 2x_1 - 1 \geq 0 \quad x_1 \geq 0,5$$

$$2x_1 x_2 + 2x_2^2 - x_2 - x_2 + -2x_1 x_2 - 1 - 2x_2 + 1 \leq 0$$

$$2x_2^2 - 4x_2 \leq 0$$

$$x_2 - 2 \leq 0$$

$$1,5 \leq x_2 \leq 2$$

$$2x_1^2 - 2x_1 - 1 + 2x_1 - 1 \leq 0$$

$$2x_1^2 - 2 \leq 0$$

$$2x^2 - x - 1 \leq 3 \leq x + 12x - 1$$

$$x_1^2 - 1 \leq 0$$

$$3 \geq b \geq -0,25$$

$$(x_1 - 1)(x_1 + 1) \leq 0$$

$$-1 \leq x_1 \leq 1 - 0,25$$

$$-2 \leq x_1 x_2 \leq -0,375$$

$$-4 \leq -1 - b \leq -0,75$$

$$0,5 \leq x_1 + x_2 \leq 1,75$$

$$1 \leq 1 + a \leq 3,5$$

$$0 \leq a \leq 2,5$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 29 + \frac{116}{25} = \frac{841}{25} \quad a\kappa + b + 1 \leq -0,25$$

$$AC = \sqrt{29} \quad BC = \frac{2\sqrt{29}}{5} \quad AB = \frac{29}{5} \quad a\kappa + b$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad AE = \frac{AB \cdot AC}{AB} = \frac{3\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{5}{29} = 3$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{HE}{BC} \quad \frac{3 \cdot 5}{29} = \frac{HE \cdot 5}{2\sqrt{29}} \quad HE = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{29}}{29 \cdot 5} = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

$$S = \frac{HE \cdot DC}{2} = \frac{6}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{5} = 1,2 \quad \frac{EC \cdot AD}{AB \cdot DE} = \frac{AC}{BE}$$

$$2\kappa^2 - \kappa$$

$$2\kappa^2 - \kappa(a+1) - 1 - b \leq 0$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1+a}{2}$$

$$\kappa_1 \kappa_2 = -\frac{1+b}{2}$$

$$\kappa_1 \leq -0,25; \quad \kappa_2 \geq 1,5$$

$$-0,25 \leq \kappa \leq 0,5$$

$$a\kappa + b \leq \kappa + 2\kappa - 1$$

$$EC \cdot AD \cdot BE = a\kappa - 3\kappa + b + 1 \leq 0$$

$$= AC \cdot AB \cdot DE \quad 0,5 < \kappa \leq 1,5$$

$$a\kappa + b \leq \kappa - 2\kappa + 1$$

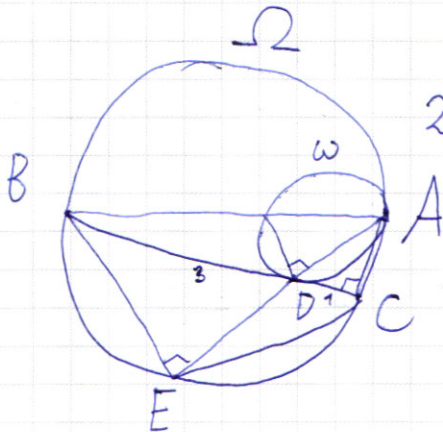
$$a\kappa + \kappa + b - 1 \leq 0$$

$$\frac{2AC}{2} - \frac{AC}{2} = \frac{BE \cdot EA}{2} \quad \frac{9AC^2}{BE \cdot BE^2} = 1 + AC^2$$

$$a\kappa$$

$$S =$$

$$\frac{AD}{3} = \frac{1}{DE} = \frac{AC}{BE}$$



$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{BE} \quad AD^2 = 1 + AC^2$$

$$3AC = BE(EA - ED)$$

$$3AC = BE \cdot AD$$

$$BE^2 + (ED + AD)^2 = 16 + AC^2 \quad BE^2 + ED^2 = 10 + AC^2$$

$$BE^2 + ED^2 + 2ED \cdot AD + AD^2 = 16 + AC^2$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$y^2 - 2xy + x^2 \quad 4x^2 + y^2 = -y^2 + 4x + 4y - 3$$

$$4x + 4y - 3 = 5xy - 2x - y + 2 - 2x^2$$

$$-2x^2 + (5y-6)x - 5y + 5 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{5y-6}{-2} = \frac{5-5y}{2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{5y-6}{-2} = \frac{6-5y}{2}$$

$$x_1 = \frac{5-5y}{2} - x_2$$

$$-y^2 + 9y - 5xy + 10x - 8 = 0$$

$$5xy - 2x - y + 2 = -y^2 + 8x + 8y - 8$$

$$-y^2 + (9-5x)y + (10x-8) = 0$$

$$y_1 + y_2 = 10x - 8$$

$$y_1 y_2 = 5x - 9$$

$$D = 81 - 90x + 25x^2 + 40x - 32 =$$

$$= 49 - 50x + 25x^2$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y = \sqrt{-y+2}$$

$$y = 2x + 1$$

$$y = 2$$

$$x = 1$$

$$y - 2x - 2y \sqrt{-y - 2x + xy + 2} = \sqrt{xy - 2x - y + 2} - 2y + xy + 2 = y - 2x$$

$$2x^2 + x - 2x - 2x - 1 + 2 = 1$$

$$2x^2 - 2x - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

$$2 + 4 - 4 - 8 + 3$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
------

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[Grid area for writing]
-------------------------

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)