МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Пусть~~

№1 Пусть 3 член равен y $(c=y)$, 4 член геом. прогрессии $-ky$ $(d=ky)$ $(k\neq 0)$

Тогда:

$a=\frac{y}{k^2}$; $b=\frac{y}{k}$; $c=y$; $d=ky$

по условию

$f(x)=ax^2+2bx+c=\frac{y}{k^2}\cdot x^2+2\cdot\frac{y}{k}\cdot x+y$

$f(d)=0$

$f(ky)=\frac{y}{\cancel{k^2}}\cdot \cancel{k^2}\cdot y^2+2\cdot\frac{y}{\cancel{k}}\cdot y\cdot \cancel{k}+y$

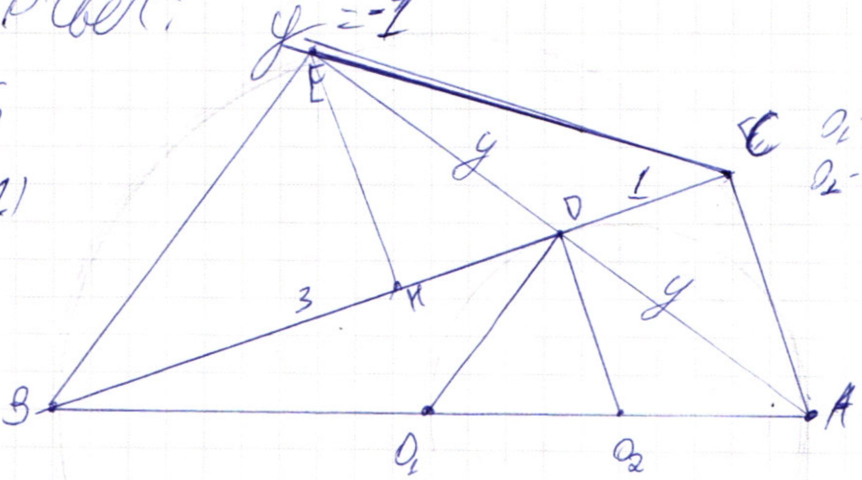
$0=y^3+2y^2+y$

$y(y+1)^2=0$

Ответ: $y=-1$

№5

(часть 1)



O_1 - центр Ω

O_2 - центр ω

Дано:

$CD=1$

$BD=3$

Решение:

1)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

№5 (часть 2)

1) D — т. касания BC касается ω в т. $D \Rightarrow$ (св-во касательной) $O_2D \perp BC$

BA — диаметр Ω
$\angle BCA$ опирается на $BA \Rightarrow AC \perp BC$

$\Rightarrow O_2D \parallel AC \Rightarrow$

по Th о пропорциональных отрезках

$\Rightarrow \dfrac{BO_2}{O_2A} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{3}{1} \Rightarrow AB = 4 \cdot O_2A \Rightarrow O_1A = 2O_2A$ и $O_1O_2 = O_2A$

~~O_1O_2 лежит на~~ ($O_2 \in \omega$)

2) По Th об отрезке касательной

$BD^2 = BO_2 \cdot AB = 2O_2A \cdot 4O_2A = 9$

$8O_2A^2 = 9$

$O_2A = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, $O_1A = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

3) по Th о пропорциональных отрезках

$\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{O_2A}{O_2B} = 1$ $AD = DE = y$ $\Rightarrow O_2D = \frac{1}{2}BE$

$DO_2 \parallel BE$ (т.к $\angle BEA$ опирается на диаметр BA; $\angle O_2DA$ опирается на диаметр O_2A)

4) как опирающиеся на равные дуги равны:

$\angle BEA = \angle BCA$
$\angle EBD = \angle DAC$ $\Rightarrow$ (признак) $\triangle EDB \sim \triangle CDA$ (*)

$\angle CBA = \angle CEA$
$\angle ECB = \angle EAB$ $\Rightarrow$ (признак) $\triangle EDC \sim \triangle BDA$ (**)

5) $CA = BA^2 - BC^2 = \sqrt{2}$
(*) $\Rightarrow \dfrac{EB}{3} = \dfrac{CA}{y}$

$EB = \dfrac{3\sqrt{2}}{y} \Rightarrow O_2D = \dfrac{3}{\sqrt{2}\,y}$

6) по Th Пифагора

$O_2D^2 + DA^2 = O_2A^2$

$\dfrac{9}{2y^2} + y^2 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow y = \sqrt{3}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5 (часть 3)

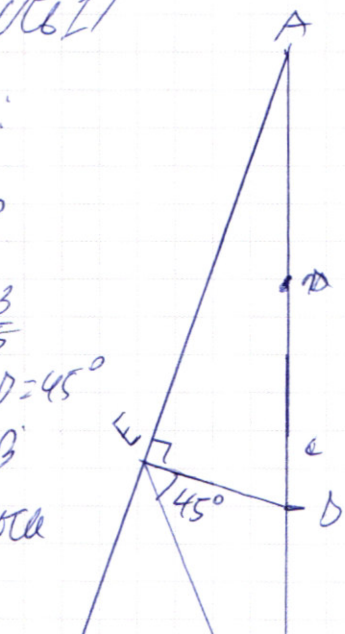
№7) $S_\Delta ABC = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ $\qquad S\ BACE = 4\sqrt{2}$

$S_\Delta\ BEC = \frac{EH\cdot BC}{2} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

6*) т.к. $y=\sqrt{3}$, ~~$EC = \sqrt{6}$~~ $\cap$ $\frac{BE}{\cancel{BE}}$ $EC = BE = \sqrt{6}$ из (**) $\Rightarrow$

$\Rightarrow EH = \sqrt{BE^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

N4 (часть 2)



Дано:
ΔABC
$\angle C = 90°$
$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$
$\angle CED = 45°$
$ED \perp AB$
CH - высота

Решение:

1) $DE \perp AB$ (по усл.)
$CH \perp AB$ (по опр.) $\Rightarrow CH \parallel ED \Rightarrow$
Th Фалеса $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH} = \frac{3}{2}$

2) ~~$\angle ECH = \angle$~~ $\angle HEC = 90° - \angle CED = 45°$
т.к. $CH \perp AB \Rightarrow HCE = 90° - 45° = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow HE = CH$

$\Downarrow$

$\frac{CH}{AH} = \frac{2}{5} \Rightarrow tg\angle BAC = \frac{2}{5}$

$\Downarrow$

$BH = HC \cdot tg\angle BAC = \frac{2}{5} HC$

$\Downarrow$

$BH : HA = 4 : 25$

$BH : HE : EA = 4 : 10 : 15$

3) $\frac{S_\Delta CEA}{S_\Delta CEB} = \frac{AE}{BE} = \frac{15}{14} \Rightarrow$

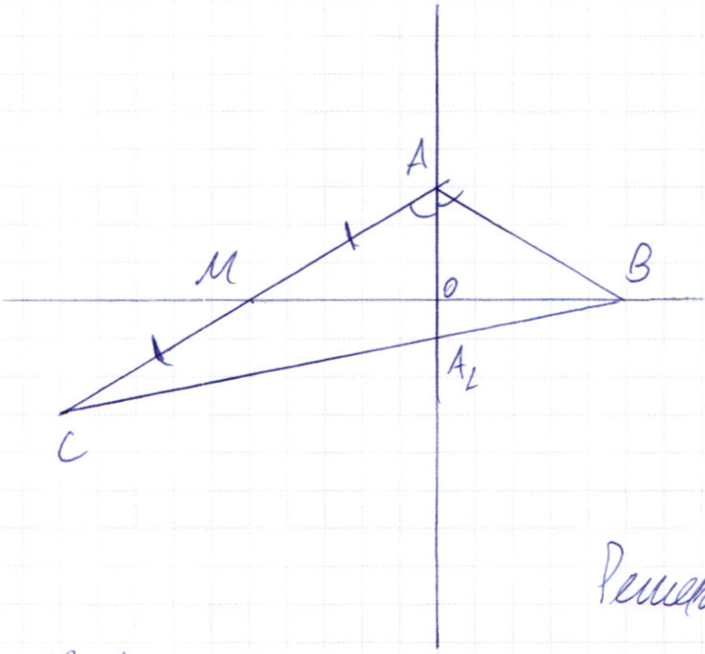
$\Rightarrow S_\Delta CEA = \frac{15}{29} \cdot$ ~~AB~~ $S_{\Delta ABC}$

N4 (часть 2)

4) $\frac{S_\Delta EDC}{S_\Delta EDA} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{DC}{DA}$ => $S_\Delta CDE = \frac{3}{5} \cdot S_\Delta CEA =$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{29} \cdot S_\Delta ABC = \frac{9}{29} \cdot \frac{AC \cdot AC \cdot tg\angle BAC}{2} = \frac{9 \cdot 29}{29 \cdot 2 \cdot 5} = 0{,}9$

N2 (часть 1)



Дано:

$BM \perp AA_1$

$CM = MA$

$\angle CAA_1 = \angle BAA_1 = \angle$

$CA + AB + CB = 1200$

$CA - ?$

$AB - ?$

$CB - ?$

Решение:

1) AA_1 - биссектриса; $AA_1 \perp MB$ => признак ΔMAB - р/б

$AB = AM = MC = a$

$MB = 2MO = AM \cdot \sin\angle \cdot 2 = 2a \cdot \sin\angle$
т.к $AO \perp MO$

2) $\angle MO$ Th косинусов

$CB^2 = MB^2 + MC^2 - 2\cos(90°+\angle) \cdot MC \cdot MB$

$CB^2 = 4a^2\sin^2\angle + a^2 + 2\sin\angle \cdot a \cdot 2a\sin\angle$

$CB^2 = a^2 + 8a^2\sin^2\angle$

$CB = a\sqrt{1+8\sin^2\angle}$

$1 \leq 1+8\sin^2\angle \leq 9$, т.к $|\sin\angle| \leq 1$

$\angle \in (0; 90°)$ => $1 < 1+8\sin^2\angle < 9$

т.к CB натуральное
$1+8\sin^2\angle = n^2$, $n \in N$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2 (часть 2)

3) $\begin{cases} 1+8\sin^2\angle = n^2 \\ \sin^2\angle \in (0;1) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow n=2$; $\sin\angle = \sqrt{\frac{3}{8}}$

Значит, есть только 1 угол $\angle$, подходящий под условие

⇓

существует только 1 треугольник

стороны: 480; 480; 240

N6 (часть 1)

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

Тогда

$x=-\frac{1}{4}$

$\begin{cases} -\frac{9}{8} \le -\frac{a}{4}+b & (1) \\ a\cdot\frac{1}{2}+b \le \frac{1}{2} & (2) \\ a\cdot\frac{3}{2}+b \ge 2 & (3) \end{cases}$

$x=\frac{1}{2}$

$x=1,5$

(1)+(2)

$a\cdot\frac{1}{2}+\frac{a}{4} \le \frac{1}{2}+\frac{9}{8}$

$a \le 1,5$ (4)

(2)+(3)

$2+\frac{a}{2} \le \frac{1}{2}+a\cdot\frac{3}{2}$

$a \ge 1,5$

(4) $a \le 1,5$ $\Big| \Rightarrow a=1,5$ $\Rightarrow$ $b \le -\frac{1}{4}$ (подставим в (2)), $b \ge -\frac{1}{4}$ (подставим в (3)) $\Big| \Rightarrow b=-\frac{1}{4}$

□ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6 (часть 2)

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$\Downarrow$

$f(n \cdot 1) = f(n) + f(1) = f(n) \Rightarrow$ $f(1) = 0$

$(\forall n \in \mathbb{R}$ $n \cdot 1 = n)$

$f(1) = f(\frac{1}{n} \cdot n) = f(n) + f(\frac{1}{n}) = 0$

~~$f(\frac{1}{n}) = f(n)$~~

$\Downarrow$

$f(n) = -f(\frac{1}{n})$

$\Downarrow$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$\Downarrow$

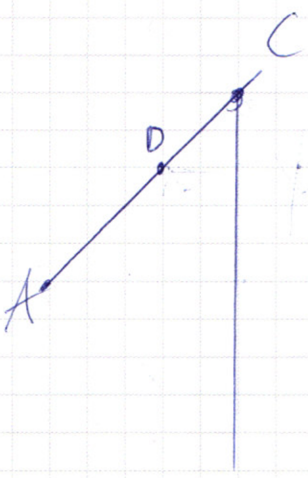
Если $f(x/y) > 0$, то $f(y/x) < 0$

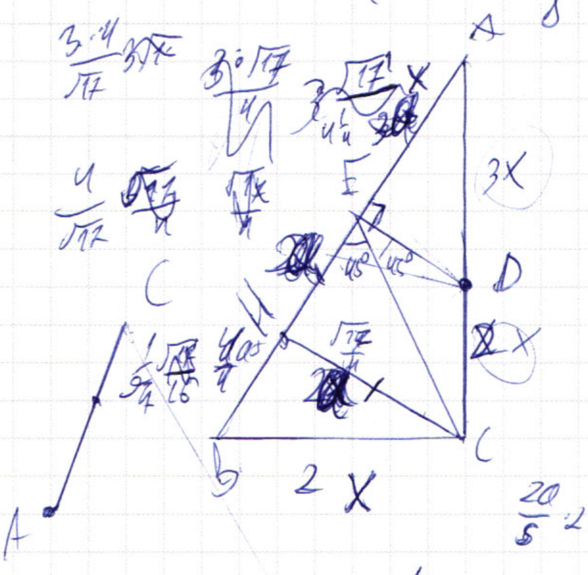
$\Downarrow$

Если отнять из всех пар пары, дающие ноль, и поделить на 2, то получим искомое

$N_{\text{пар}} = 21^2$ $\qquad$ $f(\frac{x}{x}) = 0$

№4 a) $\frac{1}{4}$ $\quad 0,\frac{29}{8}$





$\frac{1}{17}+\frac{16}{17}=1$

$\frac{1}{4}$

$\frac{\frac{1}{4}\cdot 29}{2}=\frac{29}{8}$

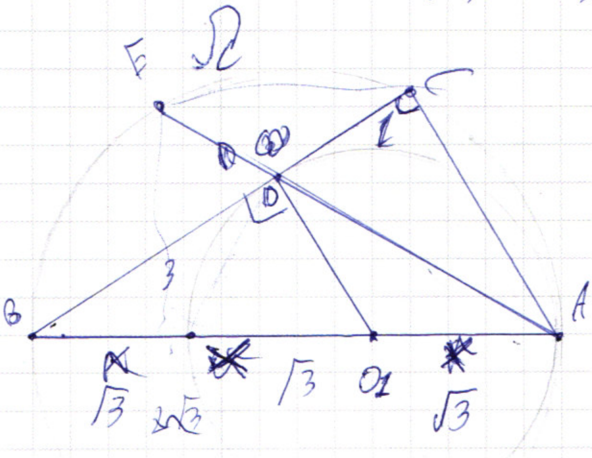
$\frac{4\cdot 4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sqrt{17}}{\frac{17}{4}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$2x^2-x-1$

$2x^2-2x+x-1$

$(2x+1)(x-1)$



$\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot 2 \quad \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$3x\cdot x=3^2$

$x=\sqrt{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = \frac{y}{k^2}$ $b = \frac{y}{k}$ $c = y$ $d = ky$

$\frac{y}{k^2} x^2 + 2 \cdot \frac{y}{k} x + y = 0$

$f(ky) = 0$

$9 = 2x \cdot 4x$ $\frac{y}{k^2} \cdot k^2 y^2 + 2 \cdot y^2 + y = 0$

$8x^2$

$x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ $y^3 + 2y^2 + y = 0$

$y(y^2 + 2y + 1) = 0$

$y(y+1)^2 = 0$

7

$f(1) = 0$

$f(1) = 0 = f(a \cdot \frac{1}{a}) =$

$= f(a) + f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$2y^4 - 9y^2 + 9 = 0$

$\frac{9 \pm 3}{4} = 3$

$= 1,5$

$y^4 = (y^2 - 3)(2y^2 - 3)$

$2 \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$

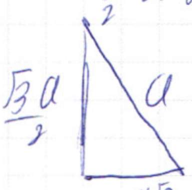
11 13

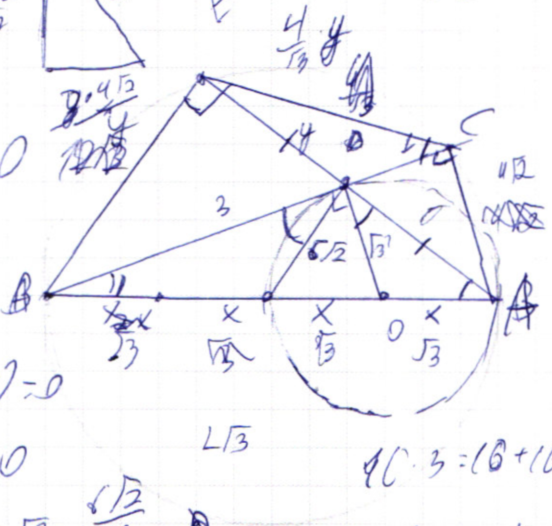
12 26

123 22

123 23

$21 \cdot 10$





$\frac{4}{\sqrt{3}} y$

$\frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{y}$

$\frac{12\sqrt{2}}{y}$

$2\sqrt{3}$

$16 \cdot 3 = 16 + 16 \cdot 2$

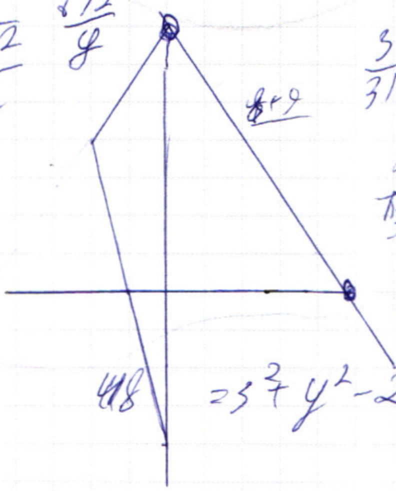
$\frac{12\sqrt{2}}{y}$ $\frac{8\sqrt{3}}{y}$

$\frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{4\sqrt{3}}$

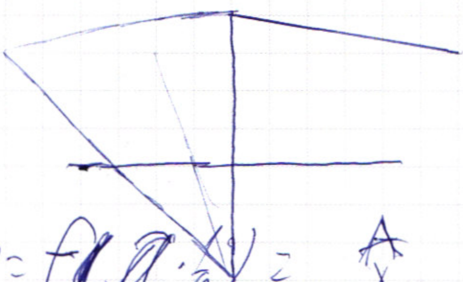
$\frac{2}{\sqrt{3}}$

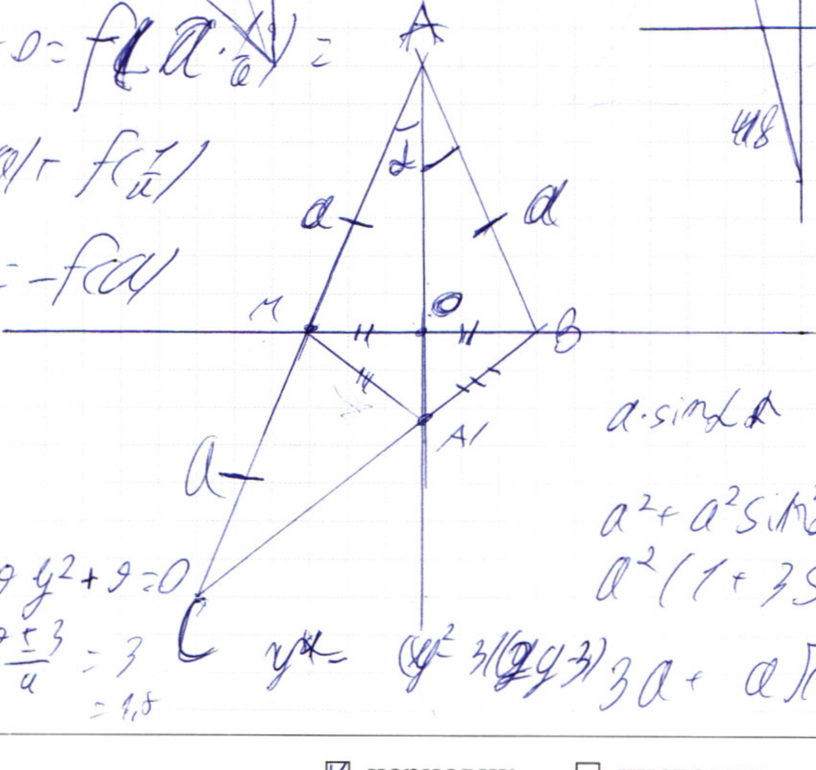
$y^2 + \frac{72}{y^2} = 12$

$y^4 - 12y^2 + 72 = 0$



$= 3^2 + y^2 - 2\cos 2\alpha \cdot 3 \cdot y$





$a^2(1 + 8\sin^2\alpha)$

$a^2 + a^2 \cdot 4 \sin^2\alpha + 2a^2 \sin^2\alpha$

$a \cdot \sin\alpha$

$a^2 + a^2 \sin^2\alpha + 2a^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$

$a^2(1 + 3\sin^2\alpha)$

$3a + a\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 - 3 = 0$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$y^2 - 3y + \frac{9}{4}$

$2(x^2 - 3x + \frac{9}{4})$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

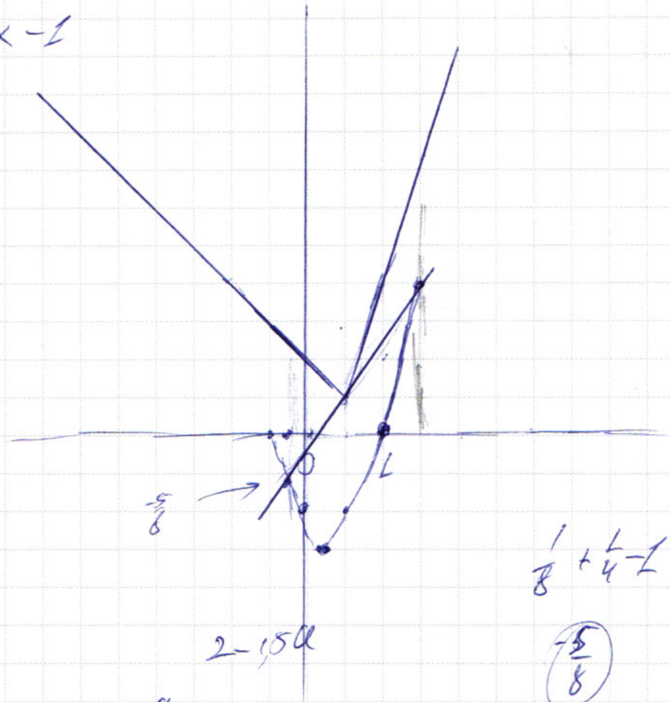
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2-x-1$

$x>\frac{1}{2}$

$x\le\frac{1}{2}$

$x+1-2x$



$-\frac{5}{8}$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$

$-\frac{5}{8}$

$2-1{,}5a$

$-\frac{a}{4}+b\ge-\frac{5}{8}$

$1{,}5\cdot3-1{,}5-1$

$0{,}5a+b\le\frac{1}{2}$

$1{,}5a+b\le2$

$a+b\le\frac{5}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{5}{8}$

$\frac{5}{4}-\frac{a}{4}+\cancel{b}\ge-\frac{5}{8}+a+\cancel{b}$

$1{,}5a+b=2$

$-1{,}5$

$-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$

$b=2-1{,}5a$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ge\frac{5}{4}a$

$a\le1{,}5$

$0{,}5a+2-1{,}5a\le\frac{1}{2}$

$\frac{5}{8}+\frac{1}{2}-\frac{a}{4}+\cancel{b}\ge\frac{a}{2}+\cancel{b}$

$1{,}5\le a$

$\frac{9}{8}\ge\frac{3}{4}a$

$b\ge-\frac{1}{4}$ $\quad a+b\le\frac{5}{4}$

$a\le\frac{3}{2}$

$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\le\frac{5}{8}$

$-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\ge-\frac{5}{8}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)