МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Для геометрической прогрессии с ~~…~~ шагом q:

$a = \frac{c}{q^2}$ $\quad b = \frac{c}{q}$ $\quad x = cq$ подставим в уравнение:

$$\frac{c}{q^2} \cdot (cq)^2 - 2 \cdot \frac{c}{q} \cdot cq + c = 0$$

$$c^3 - 2c^2 + c = 0$$

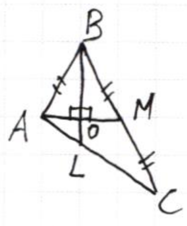
$$c(c^2 - 2c + 1) = 0$$

$$c(c-1)^2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: третий член либо 0, либо 1.

№2.

Для треугольника ABC с бисс. ~~…~~ BL и медианой AM:



~~Расс…~~ Пусть $BL \cap AM = O$. Тогда для $\triangle ABM$ BO – высота и бисс $\Rightarrow \triangle ABM$ – р/б с осн. AM.

Тогда $AB = BM = MC = x$. $P_{ABC} = 3x + AC$; ~~…~~

$x < AC < 3x$ (т.к. $AC >$ ~~…~~ $BC - AB$; $AC < BC + AC$)

То есть ~~…~~ ~~…~~ $4x < P_{ABC} < 6x$

$$\begin{cases} 4x < 900 \\ 6x > 900 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 225 \\ x > 150 \end{cases}$$

Все стороны будут целые, если x целый, т.к. $3x + AC = 900$

900 – целое, $3x$ – целое, следовательно AC – тоже целое. Посчитаем кол-во решений: $224 - 150 = 74$ Ответ: 74.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

Дано:

$\triangle ABC$

$\angle C = 90°$

$D \in AC$

$E \in AB$

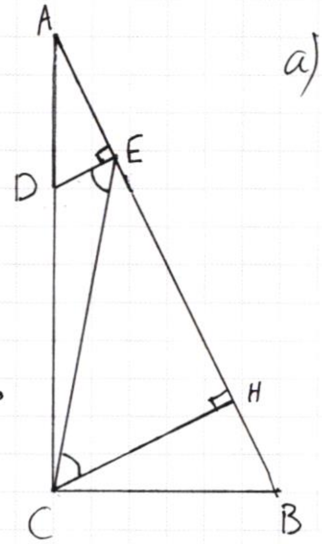
$DE \perp AB$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$\angle CED = 30°$

Найти:

$tg(BAC)$



а) Проведём $CH \perp AB$; $H \in AB$. $\triangle ABC \sim \triangle ACH$ по 2 углам ($90°$ и $\angle CAB$).

При $DE \parallel CH$ (они обе $\perp AB$) и секущей EC $\angle DEC = \angle ECH$ как накр.-лежащие.

$\triangle ADE \sim \triangle ACH$ с коэф $k = \frac{1}{3}$ ($\angle A$ - общий, $\angle AED = \angle AHC$; $\frac{AD}{AC} = k = \frac{1}{3}$). Тогда $AE = k \cdot AH =$
$= \frac{AH}{3} = \frac{AE + EH}{3}$

$$AE = \frac{AE}{3} + \frac{EH}{3} \iff AE = \frac{EH}{2}$$

$$EH = CH\, tg\, 30°$$

$$tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{CH}{AH} = \frac{CH}{EH + AE} = \frac{2CH}{3EH} = \frac{2CH}{3CH\, tg 30°} = \frac{2}{3} ctg\, 30° = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

б) Дано: $AC = \sqrt{7}$
Найти: S_{CED}

Из чертежа видно, что $S_{CED} = S_{ACH} - S_{ADE} - S_{ECH}$.

$$S_{ACH} = \frac{CH \cdot AH}{2} = \frac{CH \cdot 1{,}5 HE}{2} = \frac{3CH^2 \cdot tg 30°}{4}$$

по т. Пифагора $AC^2 = CH^2 + AH^2 \iff AC^2 = CH^2 + (1{,}5 CH\, tg 30)^2$

$$CH = \sqrt{\frac{AC^2}{1 + (1{,}5\, tg 30)^2}} = AC\sqrt{\frac{1}{1 + (1{,}5\, tg 30)^2}} = \sqrt{7}\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{12}{81}}} = 9\sqrt{\frac{7}{93}}$$

$$S_{ACH} = \frac{3 \cdot 81 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 3 \cdot 93} = \frac{189}{124}\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = S_{ACH} \cdot k^2 = \frac{189\sqrt{3}}{9 \cdot 124} = \frac{21}{124}\sqrt{3} \qquad S_{CEH} = \frac{CH^2\, tg 30°}{2} = \frac{81 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 93 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 7\sqrt{3}}{62} =$$

$$= \frac{63}{62}\sqrt{3} \qquad S_{CED} = \frac{189}{124}\sqrt{3} - \frac{21}{124}\sqrt{3} - \frac{126}{124}\sqrt{3} = \frac{42}{124}\sqrt{3} = \frac{21}{62}\sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{21}{62}\sqrt{3}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

График $y=-8x^2+6x+7$ - ~~перевёрн~~ парабола с ветвями вниз и значениями: при $x=-\frac{1}{2}$ $y=2$; при $x=1$ $y=5$; вершина находится между этими точками.

График $y=8x-12|x-0,5|$:

$$y=\begin{cases}-4x+6 & \text{при } x>0,5\\ 20x-6 & \text{при } x\le 0,5\end{cases}$$

Точка излома: $(0,5;4)$

Заметим, что точки $\left(-\frac{1}{2};2\right)$, $(1;5)$, $(0,5;4)$ лежат на одной прямой, причём эта прямая на промежутке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ - единственная, которая $\ge 8x-12|x-0,5|$ и $\le -8x^2+6x+7$, т.к. она касается обоих графиков, одного из них дважды, и при малейшем смещении вверх или вниз условие перестанет выполняться, т.к. она пересечёт один из графиков. Подставим 2 точки в ур-ние $y=ax+b$ и найдём a и b:

$$\begin{cases}2=-\frac{a}{2}+b\\ 5=a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$$

Ответ: $(a;b)=(2;3)$

№5.

Дано:	
окр $\Omega=(O;R)$	$C\in\Omega$
окр $\omega=(O_1;r)$	BC кас $\omega=D$
ω кас. $\Omega=A$	$AD\cap\Omega=E$
$AB=2R$; $B\in\Omega$	Найти: $r=?$ $R=?$ $S_{ACEB}=?$

При гомотетии с центром A и $k=\frac{R}{r}$ $O_1\to O$; $D\to E$ $\Rightarrow$ если провести касательную l к Ω в т. E, то $l\parallel BC$

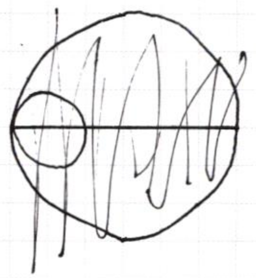
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

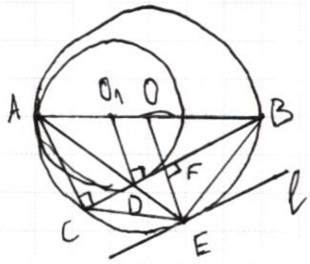
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





Проведём O_1D и OE.

Это радиусы в т. касания, сл-но, они $\perp$ касательным: $O_1D \perp CB$; $OE \perp l$. Но т. к. $l \parallel CB$, $OE \perp CB$. Пусть $OE \perp CB = F$. ~~Проведём CE и EB~~

Поскольку OE – радиус, перпендикулярный хорде, то он делит хорду пополам, то есть $BF = CF = 2,5$. $AC \perp CB$, так как $\angle ACB$ впис. угол, опирающийся на диаметр. По теореме Пифагора $DO_1^2 + DB^2 = O_1B^2$ $\quad DO_1 = r \quad DB = 3 \quad O_1B = 2R - r$.

$\triangle DO_1B \sim \triangle FOB$ (прямые углы и $\angle B$-общий) $\Rightarrow \frac{R}{2R-r} = \frac{2,5}{3} \Leftrightarrow r = \frac{4}{5}R$

$r^2 + 9 = 4R^2 + r^2 - 4Rr \Leftrightarrow 9 = 4R^2\left(1 - \frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{9\cdot 5}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

$r = \frac{4}{5}R = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5} \qquad R = 1,5\sqrt{5}$; $r = 1,2\sqrt{5}$.

Проведём CE и EB. поскольку EF – медиана и высота, $CE = EB$.

$OF = DO_1 \cdot \frac{2,5}{3} = \frac{2,5r}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5}\sqrt{5} = \sqrt{5}$ (з-ку подобия).

Тогда $S_{ACEB} = S_{ACB} + S_{CEF} + S_{BEF} = \frac{AC \cdot CB}{2} + 2\frac{EF \cdot CB}{4} = \frac{CB}{2}\cdot(AC + R - OF) =$

$= \frac{CB}{2}\left(\frac{5}{3}O_1D^* + R - OF\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\cdot 1,2\sqrt{5} + 1,5\sqrt{5} - \sqrt{5}\right) = \frac{5}{2}\left(2\sqrt{5} + 0,5\sqrt{5}\right) = \frac{25}{4}\sqrt{5} =$

$= 6,25\sqrt{5}$

* $\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$ (п/у; $\angle B$-общий) с коэф. $k = \frac{CB}{DB} = \frac{5}{3}$

Ответ: радиусы – $1,5\sqrt{5}$ и $1,2\sqrt{5}$; $S_{BACE} = 6,25\sqrt{5}$

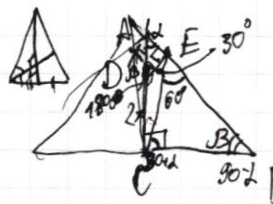
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

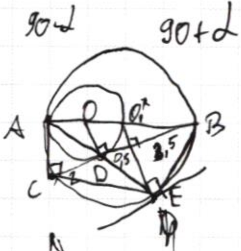
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

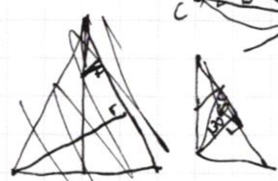


α $\quad 90+\alpha \quad 90+\alpha \quad 150-90-\alpha = 60-\alpha \quad 90-60+\alpha = 30+\alpha$



$3d = \sqrt{\frac{15}{4}}\,d$

$\frac{-8\,3}{-16\,8} = \frac{3}{8}$



$\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$y = 8x - 12|x - 0{,}5|$

$y = \begin{cases} -4x+6 & \text{при } x > 0{,}5 \\ 20x-6 & \text{при } x \le 0{,}5 \end{cases}$

$DO^2 + DB^2 = OB^2 \qquad 2y^2 - 4y$

$r^2 + 9 = 4R^2 + r^2 - 4Rr \qquad OB = 2R - r$

$\frac{9}{4} = R^2 - Rr = \qquad OD = r$

$\frac{r}{R} = \frac{2}{2{,}5} \qquad r = \frac{4}{5}R$

$= R^2 + \frac{4}{5}R^2 =$

$= \frac{9}{5}R^2$

$x^2 - 2x - 10x + 20$

$(x-2)(x-10) + 2y^2 - 4y$

$3R = 5R - 2{,}5r$

$2{,}5r = 2R$

$r = \frac{4}{5}R$

$\frac{1}{4} = \frac{R^2}{5} \qquad \frac{5}{4} = R^2 \quad R = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt5}{2} \quad r = \frac{4}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$

$x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)