МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c ~~[illegible]~~ – 3 последовательных числа геометрической последовательности $\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a\cdot c \Rightarrow b=\sqrt{a}\sqrt{c}$

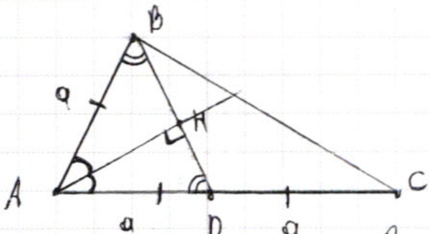
$ax^2+2bx+c=0$ ~~$ax^2+2\sqrt{a}\sqrt{c}x+c=(\sqrt{a}x+\sqrt{c})^2=0 \Rightarrow$~~

$D_1 = b^2 - ac = a\cdot c - ac = 0 \Rightarrow$ Корень уравнения $x_0 = \frac{-2b}{-2a} = -\frac{b}{a}$

x_0 – 4-ый член последовательности $\Rightarrow \frac{x_0}{c} = -\frac{b}{ac} = \frac{b}{a} \Rightarrow c = -1$

Ответ: $c=-1$

№2



Рассмотрим $\triangle ABC$, у которого биссектриса $\angle BAC$ пересекает медиану BD в точке H и $AH \perp BD$.

В таком случае AH – биссектриса и высота в $\triangle ABD \Rightarrow$ $\triangle ABD$ равнобедренный $\Rightarrow AB = AD = DC$ (т.к. BD – медиана) $\Rightarrow$

В таком $\triangle$ одна из сторон в 2 раза больше другой.

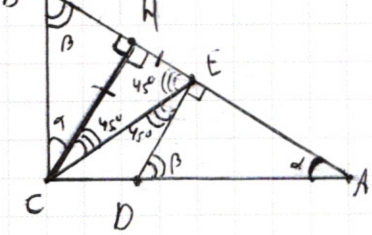
Пусть a, b, c – стороны $\triangle$, тогда $a+b>c$ без исключения общности

Пусть $b=2a$, тогда либо $a+2a>c$ $(3a>c)$ или $2a<c+a \Rightarrow a<c$ тогда подходит только ~~99~~ 49 $\triangle$ ($a=200$ не подходит, а $a=200+n$ – подходит (n – натуральное число) $a<c$ $200+n<600-3n$ (т.к. к a прибавляем n, а к $2a$ прибавляем $2n$)

$400>4n \Rightarrow n<100 \Rightarrow n=99$; но при $n=50$; $2a+2n>a+c \Rightarrow n=49$

Ответ: 99

№4



Дано: $\angle ACB = 90^\circ$ $AD:AC = 3:5$ $DE \perp AB$ $\angle CED = 45^\circ$
$\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$

Найти: $\operatorname{tg}\alpha$

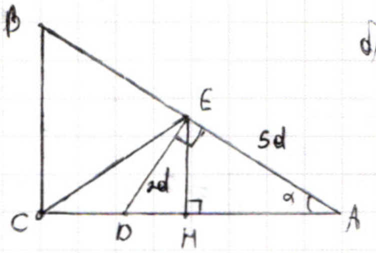
Решение: Проведем высоту из CH к AB. Рассмотрим $\triangle CHE$, у него $\angle HEC = 45^\circ$, $\angle CHE = 90^\circ \Rightarrow HCE = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ (по теореме суммы $\angle$ в $\triangle$) $\Rightarrow \angle HCE = \angle HEC \Rightarrow CH = HE$. $ED \perp AB$ и $CH \perp AB \Rightarrow ED \parallel CH$. Рассмотрим $\triangle ADE$ и $\triangle ACH$, у них $\angle BAC$ –

Общий, а $\angle AED = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow$ они подобны по 2-м $\angle \Rightarrow$ ~~Пусть AE = 5n ⇒ AD = 3n ⇒~~

$\frac{AE}{AH} = \frac{ED}{HC} = \frac{AD}{CD} = \frac{3}{5}$. Пусть $CH = HE = 10t \Rightarrow ED = 6t$, $AE = \frac{3}{5}AH$. $AH - AE = \frac{2}{5}AH = HE \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = 25t \Rightarrow AE = 15t \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{6t}{15t} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Ответ: $tg\,\alpha = 0{,}4$



б) Дано: $AC = \sqrt{29}$

Найти: S_{CED}

Решение: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AD = \frac{3}{5}AC \Rightarrow CD = AC - AD = \frac{2}{5}AC$

Пусть $d = 3b$, тогда $DE = 2d$, $AE = 5d$. $\angle AED = 90^\circ \Rightarrow AD^2 = 4d^2 + 25d^2 =$ (по теореме пифагора)

$= 29d^2 = 29 \Rightarrow d = 1$. $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{ctg^2\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{ctg^2\alpha} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{25}{4} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{29}{4}}} =$

$= \sqrt{\frac{4}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow$ 1 $EH = AD \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}}$

$S_{ECD} = CD \cdot EH = \frac{2}{5} \cdot AC \cdot \frac{10}{\sqrt{29}} = \frac{2}{5} \cdot 10 \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{\sqrt{29}} = 4$

Ответ: $S_{ECD} = 4$

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$ и $f(p) = [p]$, где p - простое число $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(a \cdot \frac{1}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b})$

1) Пусть n - натуральное составное число >1, тогда $f(n) = f(m_1) + f(n_1)$, где m_1 - простой делитель n, а $n_1 = \frac{n}{m_1}$. Будем рассматривать получившиеся f, пока не получим сумму $f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_k)$, где m_i - простое число $\Rightarrow f(n) =$ сумме $f(m_1) \ldots$, простых ~~входящ~~ чисел, входящих в $n \Rightarrow f(n) \geq 1$

2) $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

3) $f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0$, где a - натуральное число > 1, $f(a) \geq 1 \Rightarrow$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$ - отрицательное.

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$ и $x, y \in [1; 21]$, $x, y \in N \Rightarrow$

нам подходят все x, y : $f(x) < f(y)$. Посчитаем сколько чисел из промежутка принимают

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

те или иные значения и получим, что

$n_0 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 6$, $n_4 = 4$, $n_5 = 1$, $n_6 = 1$, $n_7 = 0$, $n_8 = 1$ $n_9 = 1$,

где n_i – количество чисел, для которых $F(a) = i$, при $i > 9$ $n_i = 0$ при заданных значениях $(x; y)$. Отсюда получаем, что количество пар чисел, удовлетворяющих условию

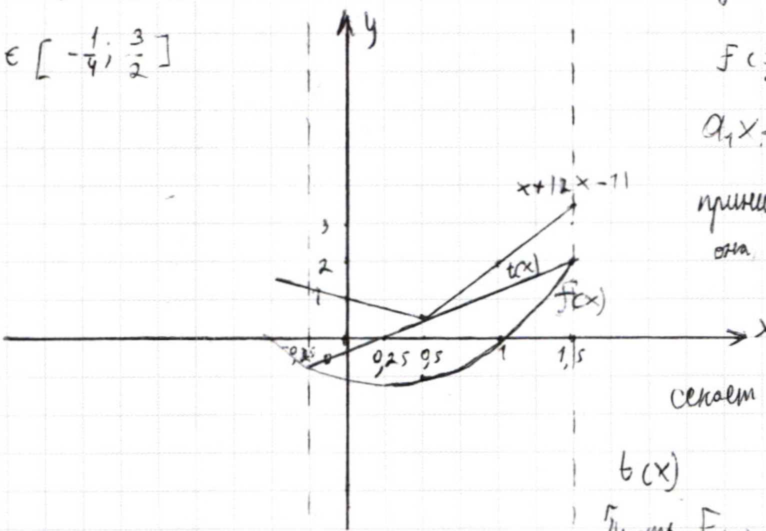
$= 20 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 14 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 3 + 2 + 1 = 222$

Ответ: 222 ~~пары~~ чисел

N6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1| = F(x)$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$



пусть $f(x) = 2x^2 - x - 1$, тогда $f(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{8}$, $f(\frac{3}{2}) = 2$ построим прямую $t(x)$ $a_1x + b$, чтобы в точках $x = -\frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{2}$, она принимала те же значения, что и $f(x)$, тогда она равна $1,5x - 0,25$

Если $ax + b$ пересекает её, то перемо $ax + b = t(x)$ секает и $f(x) \Rightarrow$ не подходит $\Rightarrow ax + b \ge 1,5x - 0,25$

$t(x)$

Пусть $F(x) = x + |2x - 1|$, тогда $t(x) = F(x)$ при

$x = 0,5 \Rightarrow ax + b$ проходит через эту точку, $\Rightarrow$ имеет общую точку $\Rightarrow$ $ax + b = t(x) = 1,5 - 0,25 \Rightarrow$ подходит только одна пара чисел

Ответ: $a = 1,5$, $b = -0,25$ – единственная пара чисел

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$a, b, c \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac \quad c = \frac{b^2}{a}$

$a = \frac{b^2}{c}$

$ax^2 + 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}\,x + c = (x\sqrt{a} + \sqrt{c}) = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = b^2 - ac = b^2 - b^2 = 0 \Rightarrow$

$x_0 = \frac{-2b}{-2a} = \frac{b}{a} =$

$\frac{b}{a} = \frac{b}{ac} \Rightarrow c = 1 \qquad \frac{b}{a} = \frac{x}{c} = \frac{b}{ac} \Rightarrow c = 1$

$a + 2a > 5 - a + 2a$

$6a > 5$

$a + 2a > b$

$2a > b + a$

$a > b$ или $3a > b$

N2

1196, 1, 3; 3, 1 — 1195, 1, 4; 3, 3 — 1194, 1, 5; 2, 4; 3, 3 — 1193, 1, 6; 2, 5; 3, 4

1198, 1, 1

$S = 1 + 1 + 2 + 2 + 3$

1, 98, 1, 2

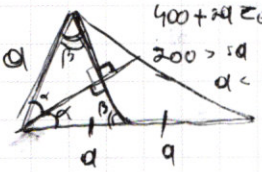
200 400

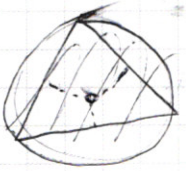
600

$400 + 2a \leq 600 + 3a$

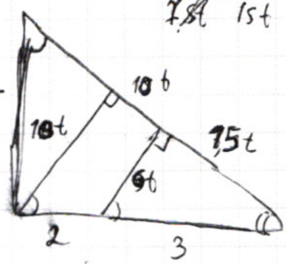
$200 > 5a$

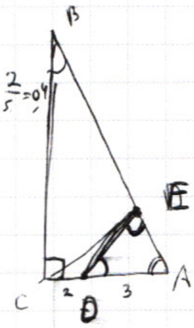
$a < 50$



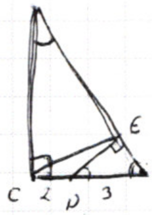


$\frac{3t}{7{,}5t} = \frac{6t}{15t} = \frac{2}{5} = 0{,}4$



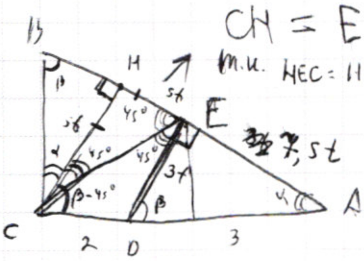


N4



$CH = EH!$

т.к. $HEC = HCE = 45°$



$(x-1)(y-2)$

N3

$xy - 2x - y + 2$

$y - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq y$

$(y-2x)^2 + 4xy - 4x - 4y + 3 = 0$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$(y^2 - 2x)^2 + 4xy - 4x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow (y-2x)^2 = -4xy + 4x + 4y - 3$

$4(xy - x - y + 1) - 1$

$(x-4)(y-4) - 13 = 0$

$4(x-1)(y-1) - 1$

$(y - 2x) = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$-4xy + 4x + 4y - 3 = xy - 2x - y + 2$

$5xy + 5 - 6x - 5y = 0$

$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{BH}{CH} = \frac{CH}{AH}$

$CH = \sqrt{BH \cdot AH}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{BH \cdot AH}}{AH} = \sqrt{\frac{BH}{AH}}$

$\frac{BH}{CH} = \frac{CH}{AH}$

1) $\triangle ADE \sim AHC$ и $k = \frac{3}{5}$

$\frac{ED}{CH} = k \quad \frac{AE}{AH} = k$

$180 - \beta + \ldots + 90 - \ldots - \alpha = 180°$

$\alpha + \beta = 90$

$\frac{AE}{EH} = \frac{3}{2} \quad \frac{AE}{EH} = \frac{AE}{CH} \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{EH}{AH}$

$CH = EH = 5t \Rightarrow ED = 3t$

$\frac{ED}{AE} =$

$\frac{AE}{HE} = \frac{AH - HE}{HE} =$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

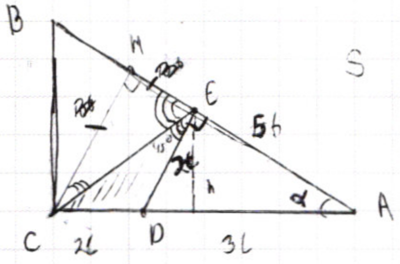
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4 ...

~~$2b^2+25b^2=7b^2=AD \Rightarrow AD=4\sqrt{7}$~~



S

$4b^2+25b^2=29b^2$ $\quad 25L=\sqrt{29}=4\sqrt{29} \Rightarrow b=1$

$h = AB \cdot \sin\alpha$

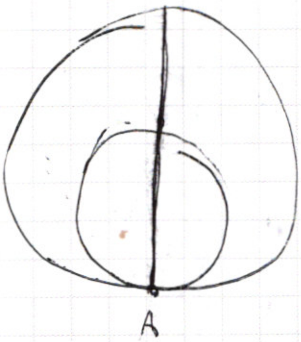
$AB = 5b = 5$

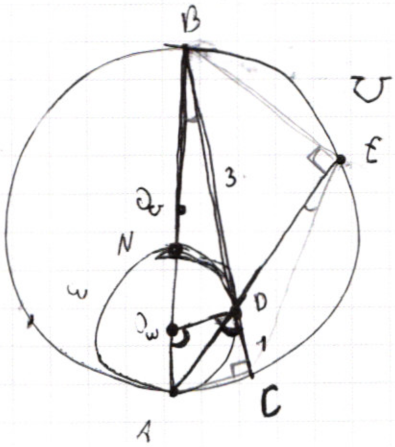
$\operatorname{tg}\alpha =$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \mid :\sin^2\alpha \Rightarrow \operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}=\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+1}=$

~~$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$~~ $\quad$ ~~$\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$~~ $\quad$ ~~$\sin\alpha$~~ $\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+1}}$

N5





$AD \cdot DE = CD \cdot BD = 3 =$

~~$AD \cdot DE =$~~

$BD^2 = BN \cdot AN = (D-d)d$

N6

$f(x)=2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1| \qquad x\in\left[-\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}\right]$

$2x^2-x-1 \le ax+b$

$2x^2-(a+1)x-1-b \le 0$

$D = (a+1)^2+8+b \geq 0$

$b > -(a+1)^2-8$

$D = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)+8+b}}{4}$

$(a+1)^2+8+b=0$

$b=-(a+1)^2+8$

$f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

$2x^2-x-1=0$

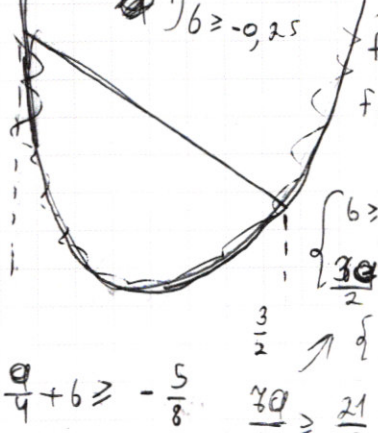
$D=1+8=9$

$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l}1\\-0,5\end{array}\right.$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2}-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{4}{2}=2$

$-\frac{1}{4}$

$\left[\begin{array}{l}-\frac{a}{4}+b \geq -\frac{5}{8}\\ \frac{3a}{2}+b\geq 2\end{array}\right.$



1) $a \geq 1,5$
$b \geq -0,25$

такие a и b, что

$f(-\frac{1}{4}) \le -\frac{a}{4}+b$ и

$f(\frac{3}{2}) \le \frac{3a}{2}+b$

$\left\{\begin{array}{l}b \geq \frac{a}{4}-\frac{5}{8} \geq \frac{3}{8}-\frac{5}{8}=-\frac{1}{4}\\ \frac{3a}{2}+b\geq\frac{9}{4}+b=2,25+b\geq 2 \Rightarrow\end{array}\right.$

$\frac{3}{2}$

$\left\{\begin{array}{l}b\geq -0,25\\ b\geq -0,25\end{array}\right.$

$\frac{7a}{4} \geq \frac{21}{8}$

$a \geq \frac{21\cdot 4}{7\cdot 8} = 1,5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

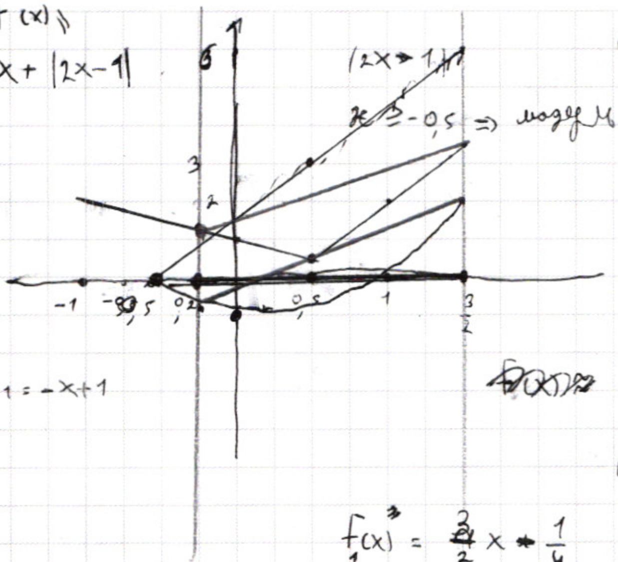
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$F(x)$

$ax+b \le x+|2x-1|$



$x < 0,5$

$y = x-2x+1 = -x+1$

$x \ge -0,5 \Rightarrow$ модуль с плюсом

$F(-\frac{1}{4}) =$

$\begin{cases} ax_1+b=y_1 \\ ax_2+b=y_2 \end{cases}$

$a(x_2-x_1) = y_2-y_1 \Rightarrow$

$$\boxed{a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad b = y_1 - ax_1}$$

$a_1 = \dfrac{2+\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{21}{8} : \frac{7}{4} = \frac{21\cdot 4}{8\cdot 7} = \frac{3}{2}$

$b_1 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}+2 = -\frac{1}{4}$

$f_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \qquad f_1(0,5) = \frac{3}{4}-\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$

$a_2 =$

$F_1(x)$

$F(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} + |-\frac{1}{2}-1| = -\frac{1}{4}+\frac{6}{4} = \frac{5}{4}$

$F(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + |3-1| = \frac{3}{2}+2 = \frac{7}{2} = 3,5$

Ответ: a и b $a = a_1$, $b = b_1$

~~Только~~

№4

$f(ab) = f(a) + f(b)$ и $f(p) = [p]$ при p простое

$1 \le x \le 21$
$1 \le y \le 21$ $\in N$

$f(\frac{a}{b}) = f(a\cdot\frac{1}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b})$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

1) $a=b=1 \Rightarrow f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(a^2) = 2f(a)$

2) $f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow f(a) = -f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(a)$ или $-f(\frac{1}{a})$ — отрицательное (при a — натуральное)

3) пусть $n_{>1}$ — натуральное составное число $\Rightarrow f(n) = f(n_1 n_2) = f(n_1) + f(n_2)$ если n_1 или n_2 составные, то можно рассмотреть $f(n_1) = f(n_{11}) + f(n_{12})$ и т.д., пока не получится сумма $f(m_1) + f(m_2) \dots + f(m_k)$ где числа от m_1 до m_k — разные простые числа, входящие в состав n, тогда $f(n) \ge 1 \Rightarrow f(\frac{1}{a}) < 0$

Тогда $f(\frac{x}{y}) < 0$ если $f(x) < f(y) \Rightarrow$ нужно найти пары чисел (x, y): $f(x) < f(y)$

При $x = 1$, то все числа отрицательные $\Rightarrow$ подходят все возможные y

при $x = 2$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

1)
f(n)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f(n)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

Ответ:

$n_0 = 1$ 20
$n_1 = 2$ 20 18
n_2 4 18 14
n_3 6 14 8
n_4 4 8 4
n_5 1 4 3
$n_6 = 1$ 3 2
$n_7 = 0$
$n_8 = 1$ 2 1
$n_9 = 1$ 1 0

20·1 + 40
18·2 + 36
14·4 + 56
8·6 + 48
4·4 + 16
(3+2+1 6

76
104
180
22
222

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА