МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

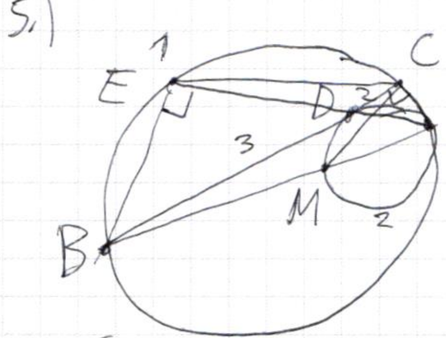
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

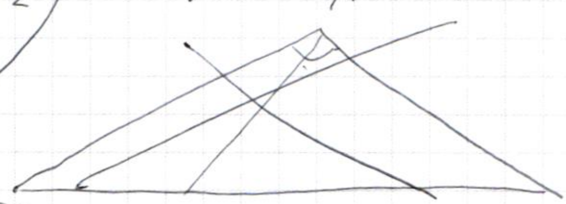
5.)

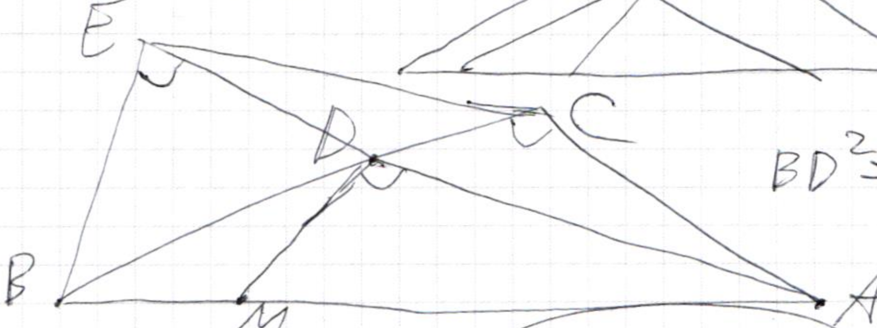


$CD=2$

$BD=3$

$\cancel{ABC} \; AB^2=BC^2+AC^2$





$BD^2=BM\cdot BA$

$\cancel{BD}\,9=(2R-2r)\cdot 2r$

$9=4(R-r)\cdot r$

$\frac{BE}{DM}=\frac{AB}{AM}=\frac{AE}{AD}$ $\quad \frac{2R}{2R-2r}=\frac{AE}{AD}$

$\cancel{\frac{AM}{AD}}=\frac{AB}{AM}=B$

$\triangle AD\cancel{B}C \sim \triangle BED$

$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BE}=\frac{CD}{DE}$

$\frac{AD}{3}=\frac{2}{AC-DA}$ $\cancel{CA}$ $\quad AE=AD+DE=$

$=$

$\frac{AD}{3}=\frac{2}{DE}$ $\quad \frac{R}{R-r}=1+\frac{DE}{AD}$

$\frac{4R^2-AE^2}{4R^2-BC^2}=\frac{BE}{AC}=\frac{BD}{AD}$ $\quad \frac{3}{AD}=\sqrt{\frac{4R^2-AE^2}{4R^2-25}}$

$\frac{9}{AD^2}=\frac{4R^2-AE^2}{4R^2-25}$

$36R^2-225=4R^2AD^2-36$

$\frac{36R^2-189}{4R^2}=AD^2$ $\quad \frac{\cancel{2}R}{R-r}=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1.) $b=qa$, $c=q^2a$, $d=q^3a$, где q – знаменатель геом. прогрессии, d – четвёртый член

Тогда $ax^2-2qax+q^2a=0 \;|: a$, $a\neq0$

$x^2-2qx+q^2=0$

$x=q$

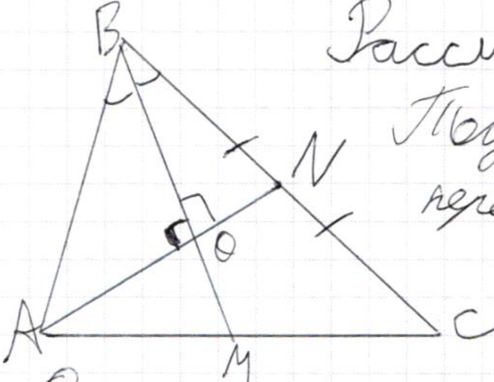
$d=q$

$q^3a=q \;|:q$ (~~Если~~ $q\neq0$)

$q^2a=1=c$

Ответ: 1.

2.)



Рассм. $\triangle ABC$, BM – бисс., AN – медиана

Тогда $\angle ABO=\angle NBO$ (т. O – точка пересечения BM и AN)

$\angle AOB=\angle BON=90^\circ$

BO – общ. сторона для $\triangle ABO$ и $\triangle BON$, значит $\triangle ABO=\triangle BON$, $AB=BN=NC$

Пусть $AB=a$, $AC=b$, тогда $BC=2a$

$2a+a+b=900 \Rightarrow b=900-3a$

По неравенству треугольника:

$\begin{cases} 2a < a+b \\ b<2a+a \end{cases}$; $\begin{cases} 900-3a>a \\ 900-3a<3a \end{cases}$

$\begin{cases} a<225 \\ a>150 \end{cases}$ ~~из~~ для этих условий подходят все целочисленные a от 151 до 224 включая концы, значит треугольников, удовлетворяющих условию 74

Ответ: 74.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.) $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$

Обозначим ~~$a=\sqrt{x-6}$~~ $a=x-6$, $b=y-1$

Тогда $a-6b=x-6-6y+6=x-6y$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ $\quad * \; a-6b\geq 0$

$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right. \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

1.) $\begin{cases} a=4b \\ 16b^2+2b^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases}$

$*$: $4-6\cdot 1\geq 0$ неверно, $\underset{-2\geq 0}{}$ значит эта пара нам не подх.

$*$: $-4-6\cdot(-1)\geq 0$ $\quad 2\geq 0$ – верно, значит эта пара нам подходит

$\begin{cases} x-6=-4 \\ y-1=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a=9b \\ 81b^2+2b^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} b=3\sqrt{\frac{2}{83}} \\ a=27\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases}$ или $\begin{cases} b=-3\sqrt{\frac{2}{83}} \\ a=-27\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases}$

$*: 27\sqrt{\frac{2}{83}}-6\cdot 3\sqrt{\frac{2}{83}} \geq 0$ $\quad$ $*: -27\sqrt{\frac{2}{83}}-6\cdot\left(-3\sqrt{\frac{2}{83}}\right) \geq 0$

$6\sqrt{\frac{2}{83}} \geq 0$ - верно, $\quad$ $-6\sqrt{\frac{2}{83}} \geq 0$ - неверно,

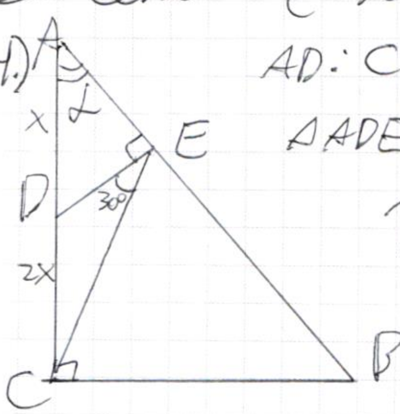
значит эта пара нам подх. $\quad$ значит эта пара нам не подх.

$\begin{cases} x-6=27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ y-1=3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases}$

$\begin{cases} x=6+27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ y=1+3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases}$

Ответ: $(2;0)$; $\left(6+27\sqrt{\frac{2}{83}}; 1+3\sqrt{\frac{2}{83}}\right)$.

4.)



$AD:CD=1:2$

$\triangle ADE$ и $\triangle DEC$ имеют общую высоту,

значит $\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}}=\frac{AD}{DC}=\frac{1}{2}$

$S_{ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE$

$S_{CDE}=\frac{1}{2}DE\cdot CE\sin 30^\circ$

значит $\frac{\frac{1}{2}AE\cdot DE}{\frac{1}{2}DE\cdot CE\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AE}{\cancel{DE}CE}=\frac{1}{4}$

$CE=4AE$

По т. синусов для $\triangle AEC$: $\frac{AE}{\sin\angle ACE}=\frac{CE}{\sin\angle BAC}$

Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $\angle ACE=180^\circ-\alpha-90^\circ-30^\circ=60^\circ-\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{CE}{AE} = \frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ-\alpha)}$

$4\sin(60^\circ-\alpha) = \sin\alpha$

$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = \sin\alpha$

$2\sqrt{3}\cos\alpha = 3\sin\alpha \Rightarrow tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$tg^2\alpha = \frac{4}{3}$

$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{3}$

$3\sin^2\alpha = 4 - 4\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$ (т.к. $0 < \alpha < \pi$)

$\angle ADE = 90^\circ - \alpha$ $\qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\angle CDE = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$

$S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot DE \sin(90^\circ + \alpha)$

$CD = \frac{2AC}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, $DE = AD\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}\sin\alpha$

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$

$S_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

6) $8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

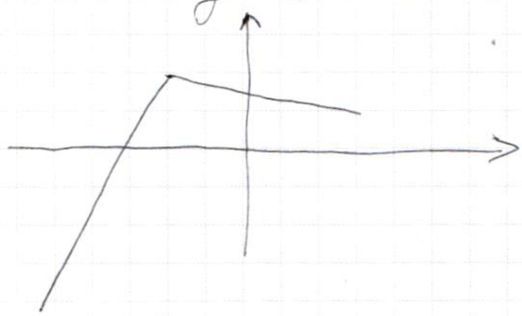
1.) $y=8x-6|2x-1|$

при $x \le \frac{1}{2}$

$y=8x+12x-6=20x-6$

при $x>\frac{1}{2}$

$y=8x-12x+6=6-4x$



$-8x^2+6x+7 \ge 8x-6|2x-1|$ при $x \ge \frac{1}{2}$

$8x^2+2x-7-6|2x-1| \le 0$ $8x^2+2x-7-12x+6 \le 0$

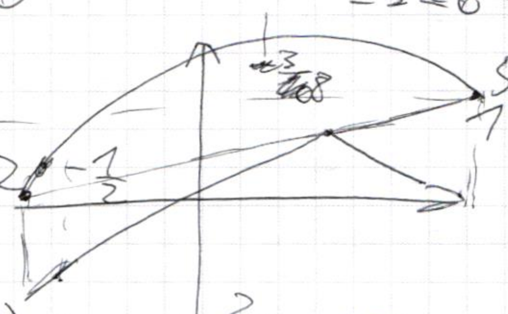
при $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ $8x^2-10x-1 \le 0$

$8x^2+2x-7+12x-6 \le 0$ $8-10-1 \le 0$

$8x^2+14x-13 \le 0$ $-3 \le 0$ - верно

при $x=\frac{1}{2}$

$4+7-13 \le 0$ - верно



$\max(1)=8\cdot\frac{1}{2}=4$

$\min(2)=-8\cdot(-\frac{1}{2})^2+6\cdot(-\frac{1}{2})+7=-2-3+7=2$

$a>0,\ b>0$ $(-\frac{1}{2};2);\ (1;5)$

$2x+3=8x-6|2x-1|$

$4=4$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b=2 \\ a+b=5 \end{cases}$ $\frac{3}{2}a=3 \Rightarrow a=2$

$b=3$

☑ черновик ☐ чистовик

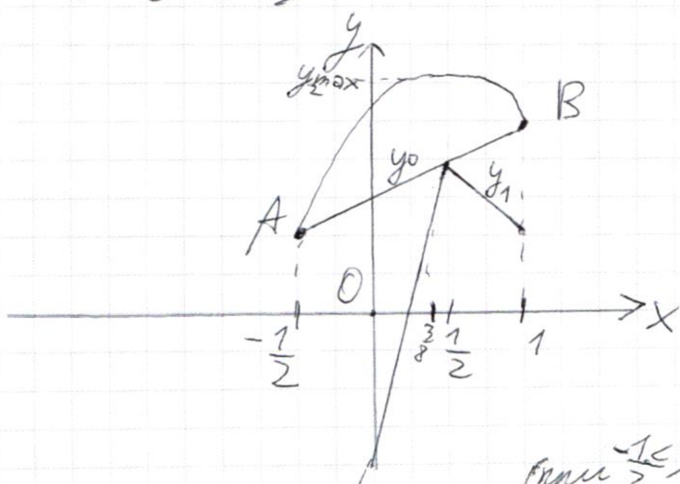
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) Расм. функцию $y_1 = 8x - 6|2x-1|$, где $-\frac{1}{2} \le x \le 1$
при $x \le \frac{1}{2}$: $y_1 = 20x - 6$ - ф-я возрастает
при $x > \frac{1}{2}$ $y_1 = 6 - 4x$ - ф-я убывает,
значит наибольшее значение она принимает при $x = \frac{1}{2}$ и оно равно $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$
Расм. функцию $y_2 = -8x^2 + 6x + 7$, где $-\frac{1}{2} \le x \le 1$
$x_0 = \frac{-6}{2\cdot(-8)} = \frac{3}{8}$, значит $y_2(-\frac{1}{2})$ и $y_2(1)$ меньше, чем $y_2(\frac{3}{8})$
$y_2(-\frac{1}{2}) = -8\cdot(-\frac{1}{2})^2 + 6\cdot(-\frac{1}{2}) + 7 = 2$
$y_2(1) = -8 + 6 + 7 = 5$



(при $-\frac{1}{2} \le x \le 1$)
Чтобы прямая $y = ax + b$ лежала ниже графика ф-ии y_2, необходимо, чтобы она лежала ниже (или совпадала с ней) прямой (y_0), проходящей через A и B. Найдём ур-е этой прямой.

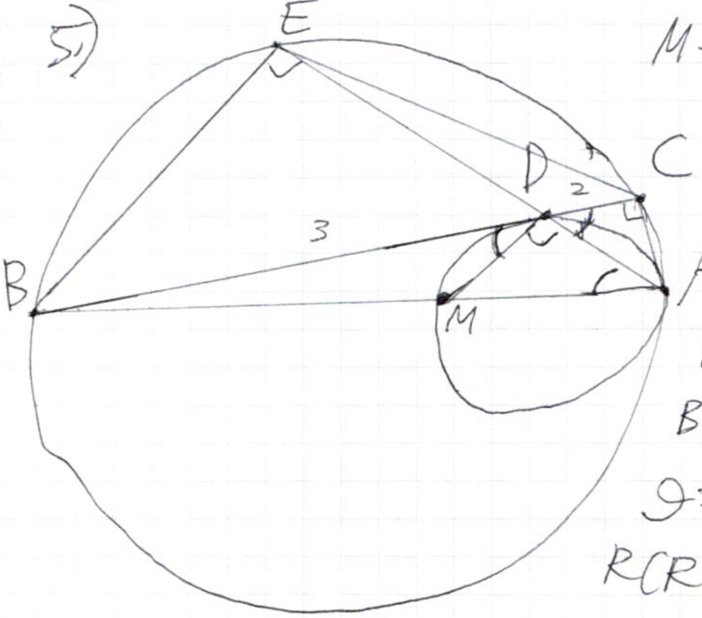
$$\begin{cases} 5 = k + q \\ 2 = -\frac{1}{2}k + q \end{cases} \Rightarrow k = 2,\ q = 3$$
$$y_0 = 2x + 3$$

~~Значит прямая $y=ax+b$ имеет положительный коэффициент наклона ($a>0$)~~

С другой стороны, $y_0\left(\frac{1}{2}\right)=4=y_1\left(\frac{1}{2}\right)$, значит прямая $y=ax+b$ должна лежать не ниже прямой y_0, поэтому единственный возможный случай – y_0 совпадает с y, тогда $2=a$, $b=3$

Ответ: $(2;3)$.

5)



M – точка пересечения AB и ω

r, R – радиусы ω и Ω соответственно

Тогда $MA=2r$, $AB=2R$ (как диаметры окружностей)

$BD^2=BM\cdot AB$

$9=2R(2R-2r)$

$R(R-r)=\frac{9}{4}$

$\angle MAD=\angle BDM$ (по т. о кас. и хорде),

значит $\angle ADC=180^\circ-\angle MAD-90^\circ=90^\circ-\angle MAD$

$\angle DAC=\angle MAD$, значит AD – бисс. $\triangle BCA$

$\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}$ (по св-ву бисс.) $\Rightarrow AC=\frac{2R\cdot 2}{3}=\frac{4R}{3}$

По т. Пифагора $AB^2=BC^2+AC^2$

$4R^2=25+\frac{16R^2}{9}\Rightarrow\frac{20R^2}{9}=25$; $R=\frac{15}{2\sqrt5}=\frac{3\sqrt5}{2}$

$\frac{9}{4}=\frac{3\sqrt5}{2}\left(\frac{3\sqrt5}{2}-r\right)\Rightarrow\frac{3\sqrt5}{2}r=9$; $r=\frac{6\sqrt5}{5}$

$S_{BACE}=\frac{1}{2}BC\cdot AE\sin\angle APC$ (по т. о площади четырёхуг.)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\angle BAE = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AE = \frac{AB}{\cos\angle BAE}$ $\cos\angle BAE = \frac{AE}{AB}$

$\cos\angle BAE = \cos\angle DAC = \sin\angle ADC$ $AE = AB\cos\angle BAE$

$S_{BACE} = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot \frac{AB}{\sin\angle ADC}\cdot \sin\angle ADC$

$\cos\angle BAE = \cos\angle DAC = \sin\angle ADC$

$S_{BACE} = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot AB\sin^2\angle ADC$

$\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{\frac{4R}{3}}{\sqrt{4+\left(\frac{4R}{3}\right)^2}}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2}\cdot 4R^2 \cdot \frac{\left(\frac{4R}{3}\right)^2}{4+\left(\frac{4R}{3}\right)^2} = \cancel{\frac{8R^4}{}}\ \frac{32R^4}{36+16R^2} =$

$= \frac{32\cdot\frac{81\cdot 25}{16}}{36+16\cdot\frac{9\cdot 5}{4}} = \frac{2\cdot 25\cdot 81}{36+20\cdot 9} = \frac{2\cdot 25\cdot 9^3}{\cancel{216}\ 24} = \frac{75}{4}$

Ответ: $\frac{3\sqrt5}{2}$; $\frac{6\sqrt5}{5}$; $\frac{75}{4}$.

7) При $b=1$ для любого рационального a:

$f(a\cdot 1) = f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(1) = f\left(\frac{m}{n}\right)+f\left(\frac{n}{m}\right)$, где m,n - рац.

значит $f\left(\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{n}{m}\right)$

В промежутке от 2 до 22 7 простых чисел: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

$f(3) = -f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$; $f(3)=1$

$f\left(6\cdot\frac{1}{3}\right) = f(6)-f(3)$; $f(2) = f(6)-1$

$f\left(\frac{2}{6}\right) = f(2)-f(6) = -1$

Из полученных ур-й находим: $f(2)=1$,

$f(6)=-1$

Так как $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)-f(y)$, то

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

чтобы выполнялось условие, необходимо, чтобы $t(x) < t(y)$

Найдём остальные значения t для составных чисел

$t(~~16~~) = 2t(2) = 2$, $t(2\cdot4) = 3$, $t(10) = t(2)+t(5) = 3$

$t(12) = t(4)+t(3) = 3$, $t(9) = 2t(3) = 2$

$t(14) = t(2)+t(7) = 1+3 = 4$, $t(15) = t(5)+t(3) = 2+1 = 3$

$t(16) = \cancel{t(8) = 6}\; t(2)+t(8) = 4$, $t(18) = t(9)+t(2) =$
$= 3$ $t(20) = t(10)+t(2) = 4$, $t(21) = t(3)+t(7) = 3$

~~при $x=10$ нет реш. т.к.~~ при $x=19$ нет реш., т.к. $t(19)$ – наиб. значение

~~$x=18$, $y=19, 20, 14, 16, 17, 13, 11$~~

Если $t(x)=1$, то реш. нет т.к. 1 – наим. знач. у $x \in \mathbb{Z}$

Если $t(x)=2$, то $y=3 \Rightarrow x=5, 4, 9$ – 3 реш.

Если $t(x)=3$, то $y=5, 4, 9, 3 \Rightarrow x=7, 8, 10, 12, 15, 21, 18$ 4·7 реш.

~~Если $t(x)=4$, то реш~~ ~~то $y=3,5,7,11,4,9,15$~~ Чтобы посчитать кол-во ~~реш.~~ возможных y при данном $t(x)$ необходимо умножить кол-во x при данном $t(x)$ на кол-во y, таких, что $t(y) < t(x)$.

Количество пар будет равно сумме реш. при всех данных $t(x)$ от 1 до 9.

$0+3+28+3\cdot(21-3-4)+1\cdot(21-4)+1\cdot(21-3)+$
$+1\cdot(21-2)+1\cdot(21-1) = 32+3\cdot14+84-10 = 42+32+84-10 =$
$= 74+84-10 = 148$

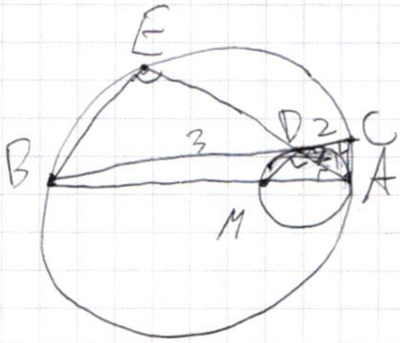
Ответ: 148.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BD=3$, $CD=2$

$2R(2R-2r)=9$

$R(R-r)=\frac{9}{4}$



$\triangle AMD \sim \triangle ADC$

$\frac{AM}{AD}=\frac{DM}{AC}=\frac{AD}{CD}$

$AD^2=2r\cdot 2=4r \Rightarrow AD=2\sqrt{r}$

$\triangle ACD \sim \triangle BED$ $\quad \frac{3}{AD}=\frac{DE}{2}$; $\triangle BAE \sim \triangle AMD$

$\cancel{DE=\frac{6}{2\sqrt{r}}}$ $\quad \cancel{DE+AD=}$ $\quad \cancel{\frac{2R}{2r}=\frac{AD}{AE}}$

$\cancel{\frac{2R}{r}=\frac{2\sqrt{r}}{}}$ $\quad \frac{R}{r}=\frac{AD}{AD+DE}$ $\quad \frac{R}{r}=\frac{AD+DE}{AD}$

$DE=\frac{6}{AD}=\frac{3}{\sqrt{r}}$ $\quad \cancel{\frac{R}{r}=\frac{2\sqrt{r}}{2\sqrt{r}+\frac{3}{\sqrt{r}}}}$ $\quad \frac{R}{r}=\frac{2\sqrt{r}+\frac{3}{\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}}$

$\cancel{\frac{R}{r}=\frac{2r}{2r+3}}$ $\quad \cancel{2rR+3R}$ $\quad \cancel{R=\frac{2r^2}{2r+3}}$ $\quad \frac{R}{r}=\frac{2r+3}{2r}$

$\cancel{\frac{2r^2}{2r+3}\left(\frac{2r^2}{2r+3}-r\right)=\frac{9}{4}} \Rightarrow \cancel{2r+3}\left(\frac{2r^2}{2r+3}\right.$ $\Big($

$\boxed{2R=2r+3}$ $\quad R-r=\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}R=\frac{9}{4} \Rightarrow R=\frac{3}{2}$

$3=2r+3$

$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{2} \Rightarrow AC=\frac{4R}{3}$

$\frac{16R^2}{9}+25=4R^2$, $\quad 25=\frac{20}{9}R^2 \Rightarrow R=\sqrt{\frac{25\cdot 9}{20}}=$

$=\frac{15}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$, $\quad \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}-r\right)=\frac{9}{4}$

$\frac{9}{4}\cdot 5-\frac{3\sqrt{5}}{2}r=\frac{9}{4}$

$9=\frac{3\sqrt{5}}{2}r$; $r=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

7) $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=0$ $\quad f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(3)=1$ $\quad f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(5)=2$ $\quad f(\frac{3}{2}\cdot 2)=f(\frac{3}{2})+f(2)$

$f(7)=3$ $\quad 1=f(2)+f(\frac{3}{2})$

$f(11)=5$ $\quad f(\frac{m}{n})=$ $5=f(2)+f(\frac{5}{2})$

$f(13)=6$ $\quad =f(m)+f(\frac{1}{n})$

$f(17)=8$ $\quad f(\frac{3}{2})+f(\frac{2}{3})=0$

$f(10)=9$ $\quad f(\frac{3}{2})=-f(\frac{2}{3})$

$f(\frac{1}{11})$ $\quad f(\frac{3}{1})=-f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{1}{3})=-1$

$\cancel{f(2)}$ $f(6\cdot\frac{2}{3})=f(\frac{1}{2})f(6)+f(\frac{1}{3})$

$f(2)=f(6)-1$ $\quad f(5)=-f(\frac{1}{5})$

$f(\frac{1}{5})=-2$

$f(2)+1=f(6)$

$f(\frac{1}{p})=-f(p)$; $f(\frac{1}{p})=-\left[\frac{p}{2}\right]$

$f(\frac{4}{2})=f(\frac{1}{2})+f(4)$

$\cancel{f(2)}$ $f(2)=-f(2)+f(4)$ $\quad f(4)=2f(2)$

~~$f(1)=f(2)$~~ $f(\frac{3}{11})=f(3)+f(\frac{1}{11})=f(3)-f(11)$

$\exists$ x, y – не простые

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)=f(x_1)+f(x_2)-f(y)$

$f(\frac{2}{4})=-3$ $\quad \begin{cases} f(2)-f(6)=-3 \\ f(2)+1=f(6) \end{cases}$ $\quad 1-f(6)=-3+f(6)$

$f(6)=2$

$f(\frac{2}{3})=f(2)-f(3)$

$f(\frac{8}{4})=4$ $\quad f(2)=1$

$f(9)=2(f(3))=2$ $\quad f(4)=2$

$f(10)=1+2=3$ $\quad f(12)=f(4)+f(3)=3$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) a, qa, q^2a $\quad b=qa, \ c=q^2a$

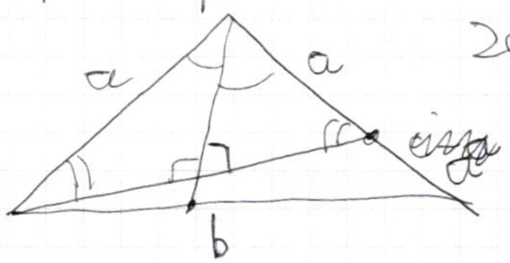
$ax^2-2qax+q^2a=0$ $\quad q^3a=q$ $\quad$ $x-6=a$

$x=q$ $\quad$ $y-1=b$

$q^3a=q \Rightarrow q^2a=\boxed{1}=c$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

2)



$2a+b=900$

$b=900-2a$ $\quad a^2+36b^2-12ab=ab$

$2a<a+b$ $\quad a^2-13ab+36b^2=0$

$a<b$

$\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$

$b<3a$

$\begin{cases} a<900-2a \\ 900-3a<3a \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a<300 \\ a>150 \end{cases}$ $\quad \boxed{149}$

$b=3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$a=27\sqrt{\frac{2}{83}}$

$a-6b>0$

$x=6+27\sqrt{\frac{2}{83}}$

$y=1+3\sqrt{\frac{2}{83}}$

3) $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$x-6y=\sqrt{x(y-1)-6(y-1)}$ $\quad x-6y=\sqrt{\underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(y-1)}_{b}}$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2=18$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$ $\quad a^2b^2=xy-6y-x+6$

$(x-6)^2=2(3-y+1)(3+y-1)$ $\quad -a^2b^2=(x-6)(1-y)=$

$(x-6)^2=2(y-2)(4-y)$ $\quad =x-xy-6+6y$

$a^2=x-6$ $\quad a^2-b^2=x-6-6y+6$

$b^2=y-1$ $\quad x-6y=a^2-b^2$

$\begin{cases} a^2-b^2=ab \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a^2-b^2=ab \\ a^4-2a^2b^2+b^4+b^4+2a^2b^2=18 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$ $\quad a=\sqrt{x-6},\ b=\sqrt{y-1}\quad a,b\geq 0$

$a^2-6b^2=x-6y$

$a^2-6b^2=ab$

$a^2-ab-6b^2=0$

$\left[\begin{array}{l} a=3b \\ a=-2b \end{array}\right.$

1) $\begin{cases} a=3b \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$ $\quad 81b^4+2b^4=18$

$b^4=\frac{18}{83}$

$b=\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$

$\sqrt{\frac{18}{83}}+1=y$ $\quad \boxed{y=1+3\sqrt{\frac{2}{83}}}$

$a=3\sqrt[4]{\frac{18}{83}},\ x-6=\sqrt{\frac{9\cdot 18}{83}}$ $\quad \boxed{x=6+9\sqrt{\frac{2}{83}}}$

2) $a=-2b$

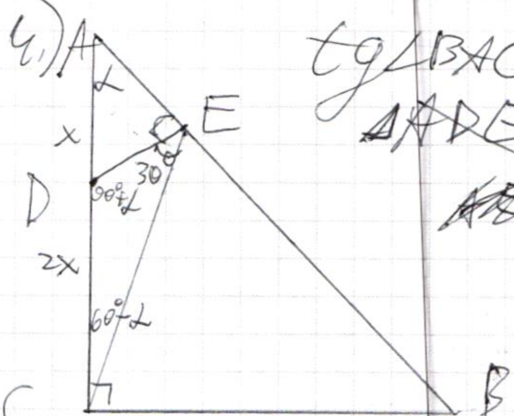
$a=0,\ b=0$ $\quad \boxed{\cancel{x=6,\ y=1}}$ не подх.

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{4}{3}$

$3\sin^2\alpha=4-4\sin^2\alpha$

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}$

4)



$tg\angle BAC-?$

~~$\triangle ADE \sim \triangle ABC$~~, ~~AE~~ DE

$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}}=\frac{1}{2}$

$S_{ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE$

$S_{CDE}=\frac{1}{2}DE\,CE\sin 30^\circ$

$\frac{AE\cdot DE}{\frac{1}{2}DE\cdot CE}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{AE}{CE}=\frac{1}{4}$

$CE=4AE$

$\frac{CE}{\sin\alpha}=\frac{AE}{\sin(60^\circ-\alpha)}$ $\quad 4\sin(60^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\sin\alpha$

б) $AC=\sqrt{7}$ $\quad 2\sqrt{3}\cos\alpha=3\sin\alpha$

$CD=\frac{2\sqrt{7}}{3}$ $\quad \boxed{tg\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$\frac{DE}{\frac{\sqrt{7}}{3}}=tg\alpha$ $\quad DE=\frac{\sqrt{7}}{3}tg\alpha$

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}tg\alpha\cdot\sin(90^\circ+\alpha)=\frac{7}{9}\sin\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{9}$