МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

\+ 1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

\+ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

\+ 3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

\+ 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

\+ 5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

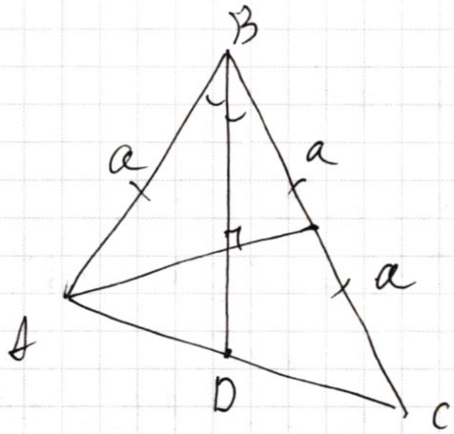
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$P = 1200$ ~~, где~~ $a, b, c \in \mathbb{N}$ и a, b, c – стороны тр.



Очевидно $AB = \frac{1}{2} BC = a$.

Также по свойству бисс. $\triangle ABC$:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

$$\frac{AD}{a} = \frac{DC}{2a} \Rightarrow$$

$2AD = DC$, т.е.

$AD = b \Rightarrow$

$DC = 2b$.

Значит $P = 3a + 3b = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$

$3a + 3b = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$

$a + b = 2^4 \cdot 5^2$, a и $b \in \mathbb{N}$

~~Значит нам нужны~~

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 2^4 \cdot 5^2 - 1$ ($2^4 \cdot 5^2$ исключаем т.к. помогает? 0, а у нас $\mathbb{N}$).

т.е. $a = k$, тогда $b = 2^4 \cdot 5^2 - k$.

Найдём кол-во n.

$2^4 \cdot 5^2 - 1 = 1 + n - 1 \Rightarrow n = 2^4 \cdot 5^2 - 1$ – кол-во чисел ~~АП~~.

но их нечетное количество => ~~парами~~ ~~только~~ ~~$\frac{n+1}{2}$~~ один из тр. будет р/б.

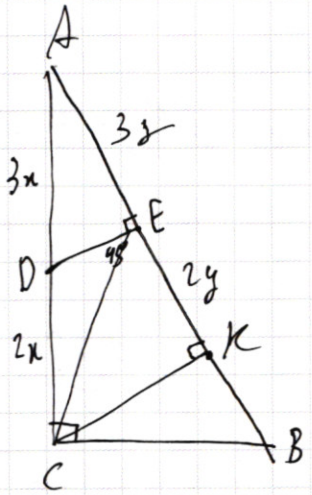
значит их всего: $\frac{2^4\cdot 5^2-1+1}{2}=$

$=2^3\cdot 5^2=8\cdot 25=$

$=200.$

Ответ: 200.

№4



Найти: tg A

1. Пров. $CK\perp AB$.

2. $\angle DEC=\angle CEK=45°$.

3. ΔEKC – р/б.

4. $CK \parallel DE \Rightarrow \frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EK}$ (теор. о пропорц. отр.)

$\frac{3}{2}=\frac{AE}{EK}.$

5. $CK=2y$

Значит $tg A=$ ~~$\frac{2y}{AC}$~~ ~~$\frac{AK}{KC}$~~ $\frac{CK}{AK}=\frac{2y}{5y}=\frac{2}{5}$

$$\boxed{tg A=\frac{2}{5}}$$

6. $AC=\sqrt{29}$

Найти: S_{CED}.

7. $AC=\boxed{\sqrt{29}=5x}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{29}}{5}.$

8. $\angle EDC=180°-\angle B.$

~~$ctg^2A=\frac{1}{\sin^2A}-1$~~

~~$\frac{4}{25}+1=\frac{1}{\cos^2A}\Rightarrow\frac{29}{25}=\frac{1}{\cos^2A}\Rightarrow$~~

~~$\frac{25+4}{4}=\frac{1}{\sin^2A}\Rightarrow\sin A=\frac{2}{\sqrt{29}}$~~ $\cos A=\frac{5}{\sqrt{29}}$,

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пр. 4 номера

$\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A$

значит $tg^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} - 1$

$\frac{4+25}{25} = \frac{1}{\cos^2 A}$

$\frac{5}{\sqrt{29}} = \cos A$,

т.е.

$\sin B = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\sin(180^\circ - B) = \sin B = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

9. $\triangle DAE$:

$\sin A = \frac{DE}{DA} = \frac{DE}{3 \cdot x} = \frac{5 \cdot DE}{3 \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow$

$DE = \frac{3 \cdot \sqrt{29} \cdot \sin A}{5} = \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{5} \sin A$.

Найдём $\sin A$:

$ctg^2 A + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$

$\frac{25+4}{4} = \frac{1}{\sin^2 A}$

$\frac{2}{\sqrt{29}} = \sin A$.

В итоге: $DE = \frac{3 \cdot \cancel{\sqrt{29}}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{29}}} = \frac{6}{5}$.

Таким образом: $S_{EDC} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DE \cdot \sin B =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{29}}}{5} \cdot \frac{6}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{\sqrt{29}}} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $tg\,A = \frac{2}{5}$; $S_{CED} = \frac{6}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c – члены геом. прогр., (1) Найти: c.

т.е. $b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$, $b_4 = x_0$, где x_0 – корень уравнения $ax^2+2bx+c=0$.

Т.К. (1) $\Rightarrow$ $b^2 = a \cdot c$. (2)

$ax^2+2bx+c=0$ (*)

$D_{/4} = b^2 - ac$.

Т.К. $b^2 = a\cdot c \Rightarrow D_{/4} = a\cdot c - a\cdot c = 0 \Rightarrow$ (*) ~~у~~равнение имеет 1 решение.

Значит $x_0 = -\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow b_4 = -\frac{b}{a}$. (3)

Т.К. b_1, b_2, b_3, b_4 – ~~част~~ последоват. члены геом. прогрессии ~~то~~

~~то $b_3^2 = b_2 \cdot b_4$~~

~~$c^2 = b \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)$~~

~~$c^2 = -\frac{b^2}{a}$~~

~~Значит $b_3 = \sqrt{-\frac{b^2}{a}} = \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{-a}} = \frac{|b|}{\sqrt{-a}}$.~~

~~Ответ:~~

Найдём разность прогр. q.

$b_2 = b_1 \cdot q$

$b = a \cdot q$

$q = \frac{b}{a}$.

$b_4 = b_3 \cdot q \Rightarrow -\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} = b_3 \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} \Rightarrow b_3 = -1$.

Ответ: -1.

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, & ② \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & ① \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} y-2x\geq 0 \\ y\geq 2x \end{matrix}} \quad (*)$$

~~① $y^2-4y+2x^2-4x+2+1=0$~~

~~исходя из размышлений во втором пункте, а именно~~

~~$\left[\begin{matrix} y=x+1 \\ y=4x-2 \end{matrix}\right.$~~

②

Опираясь на (*), иначе выражение ② не имеет смысла.

$(y-2x)^2=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0$

Разложим на множители относительно y.

$D=(5x-1)^2-16x^2-8x+8=$

$=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$

$=9x^2-18x+9=3^2(x-1)^2$

$\left[\begin{matrix} y=\dfrac{5x-1+3x-3}{2} \\ y=\dfrac{5x-1-3x+3}{2} \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} y=4x-2 \\ y=x+1 \end{matrix}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение 3 номера

В итоге (2) выражение принимает вид:

$(y-4x+2)(y-x-1)=0$,

т.е. система принимает вид:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=4x-2\end{array}\right. \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=x+1 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+2+1\end{cases} \\ \begin{cases} y=4x-2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+1+2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=y-1, \\ 2(x-1)^2+y^2-4y+1=0\end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} x=\dfrac{y+2}{4}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+1+2=0\end{cases} \quad (II)\end{array}\right.$$

$(*)$ $\begin{cases} x=y-1 \\ 2(y-1-1)^2+y^2-4y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1, \\ 2(y^2-4x+4)+y^2-4y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1, \\ 3y^2-12y+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1, \\ \underbrace{y^2-4y+3=0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1, \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

по теор. Виета очевидно, что $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0 \\ y=1\end{cases} \\ \begin{cases} x=+2 \\ y=3\end{cases}\end{array}\right.$$

(11)

$$\begin{cases} x = \frac{y+2}{4}, \\ 2x^2+y^2-4y-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y+2}{4}, \\ \frac{2(y+2)^2}{16}+y^2-4y-y-2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y+2}{4}, \\ \frac{\cancel{2}(y^2+4y+4)}{\cancel{16}\,8} + y^2-5y+1=0 \;\Big|\cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y+2}{4}, \\ y^2+4y+4+8y^2-40y+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y+2}{4} \\ 9y^2-36y+12=0 \;\Big|\cdot\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y+2}{4}, \\ \underline{3y^2-12y+4=0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$D_{14} = 36-12=24$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{6+\sqrt{24}}{3} \\ y=\frac{6-\sqrt{24}}{3} \end{array}\right.$$

фигурная скобка

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y+2}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{6+\sqrt{24}}{3} \\ y=\frac{6-\sqrt{24}}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\frac{6+\sqrt{24}}{3}+2}{4} \\ y=\frac{6+\sqrt{24}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{\frac{6-\sqrt{24}}{3}+2}{4} \\ y=\frac{6-\sqrt{24}}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{12+\sqrt{24}}{12} \\ y=\frac{6+\sqrt{24}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{12-\sqrt{24}}{12} \\ y=\frac{6-\sqrt{24}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверим решения по (*):

1. $1 \geq 2\cdot 0$ (+)
2. $3 \geq 4$ (−)
3. $\frac{6+\sqrt{24}}{\cancel{3}\,1} \geq \frac{12+\sqrt{24}}{\cancel{6}\,2}$
4. ~~$\frac{6-\sqrt{24}}{3} \geq$~~

$6+\sqrt{24} \geq 6+\sqrt{\frac{24}{4}}$

$\sqrt{24} \geq \sqrt{6}$ (+)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение 3 номера

4. $\frac{6-\sqrt{24}}{3} \geq \frac{12-\sqrt{24}}{6}$

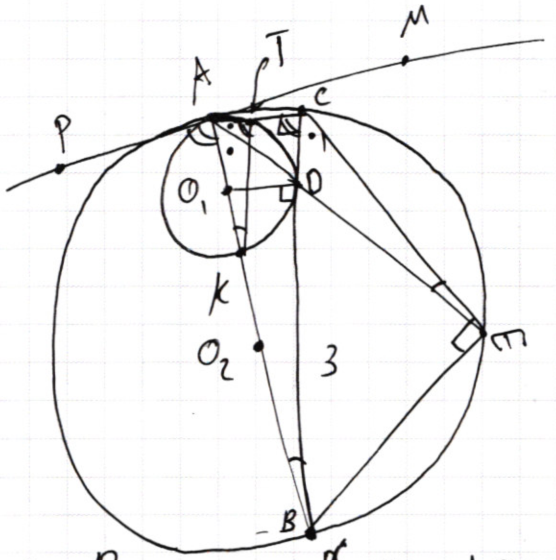
$6-\sqrt{24} \geq 6-\sqrt{6} \quad |\cdot(-1)$

$\sqrt{24} \leq \sqrt{6}$ $\ominus$

Значит

Ответ: $(0;1)$; $\left(\frac{12+\sqrt{24}}{12};\ \frac{6+\sqrt{24}}{3}\right)$.

№5



1. по лемме Пифагора в $\angle ACB$ AD-бисс.
Значит $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow$

$\left[\frac{3}{AB} = \frac{1}{AC}\right]$ (1)

(док: 1. проведем общ. кас и обозначим.
2. пользуясь свойством угла между хордой и кас. доказать равенство углов.)

2. известно, что AB-диаметр большей окр. $\Rightarrow$ $AB = 2R$, R-рад. б. окр.

т.е. $\frac{3}{2R} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \left[AC = \frac{2}{3}R\right]$ (2)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

3. $O_1D = r$, r – рад. ω.

Значит по теор. Пифаг. для $\triangle O_1DB$:

~~$r^2+(R-2r)^2=$~~

$r^2+9=(R-2r)^2$

$r^2+9=R^2-4Rr+4r^2$

$R^2-4Rr+3r^2=9$ (*)

4. $KT \parallel BC$, т.к.

$\angle PAB = \angle TCB = \angle ATK$.

$\angle MAC = \angle AKT = \angle ABC$

5. $\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$ (опир. на AB).

Значит

$\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$ (по 2 $\angle$).

$\frac{AC}{O_1D} = \frac{4}{3}$

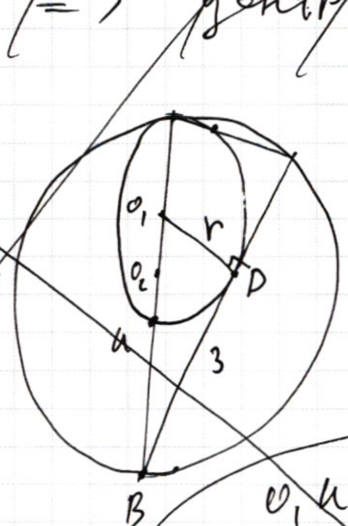
$\frac{\frac{2}{3}R}{r} = \frac{4^{2}}{3} \Rightarrow \frac{R}{r} = 2 \Rightarrow \boxed{R = 2r}$. (A)

~~(*) и (A):~~

~~$4r^2-8r^2+3r^2=9 \Rightarrow$ центр Ω лежит внутри ω.~~

~~Значит~~

~~$r^2+9=(2r-R)^2$~~



Значит для $\triangle BO_1D$ по т. Пифаг.:

$r^2+9=(2r)^2$

$r^2+9=4r^2$

$9=3r^2$

$r=\sqrt{3} \Rightarrow R=2\sqrt{3}$.

!

$O_1K = 2r - R$

Значит $O_1B = 2r - R + R = 2r$.

!

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение 5

6. проведём CE.

$\angle CEP = \angle MAC$.

Т.к. AD - бис. $\Rightarrow \angle BAD = \angle CAE \Rightarrow$

$\triangle ACE \sim \triangle ADB$ (по 2 $\angle$).

7. для $\triangle ACD$ по теор Пиф.:

$AD^2 = AC^2 + CD^2$

$AD = \sqrt{\frac{9}{\cancel{8}_3} 4 \cdot \cancel{3} + \frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{16+3}{3}} = \sqrt{\frac{19}{3}}$.

8. ~~по теор.~~

$\triangle CDE \sim ADB$ (по 2 $\angle$)

значит $\frac{DE}{DB} = \frac{CD}{AD}$, $\boxed{DE = \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{\frac{19}{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}}$

по теореме косинусов для $\triangle ADB$:

$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos\angle ADB$

$16 \cdot 3 = \frac{19}{3} + 9 - 2 \cdot \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}} \cdot 3 \cdot \cos\angle ADB$

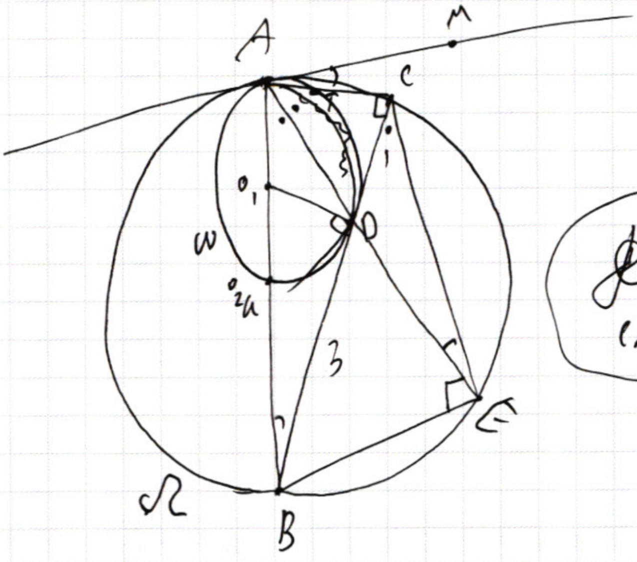
$16 \cdot 3 - \frac{19}{3} - 9 = -2 \cdot \frac{\sqrt{19 \cdot 3}}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot \cos\angle ADB$

$\cos\angle ADB = \frac{16 \cdot 9 - 19 - 27}{-2 \cdot \sqrt{19 \cdot 3}} = -\frac{98}{2 \cdot \sqrt{19 \cdot 3}} = -\frac{49}{\sqrt{19 \cdot 3}}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 9 \\ \hline 144 \end{array}$ $\begin{array}{r} 144 \\ - 46 \\ \hline 98 \end{array}$

$\sin\angle ADB = \sqrt{1 - \frac{49 \cdot 49}{19 \cdot 3}} = \sqrt{19 \cdot 3 -}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



Дальнейшие рассуждения см. по новому рисунку.

6. Значит $O_2 \in \omega$, опир. на $\varnothing$.

Т.е. по теор. Пифагора в $\triangle BAC$:

$$(2R)^2 = AC^2 + 16$$

$$4R^2 = \frac{4}{9}R^2 + 16$$

$$4R^2 - \frac{4}{9}R^2 = \cancel{16}\ 4$$

$$\frac{9R^2 - R^2}{9} = 4$$

$$\frac{8R^2}{9} = 4$$

$$R^2 = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{R = \frac{3\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow R = 2r \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2r$$

$$\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4} = r}$$

7. $\angle ABC = \angle AEC = \angle MAC$ и $\angle ADB = \angle CDE$ $\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle CDE$ (по 2 $\angle$).

8. по теор. Пифагора $\triangle ADC$:

$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{4}{9}R^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{9}\cdot\frac{9\cdot 2}{4} + 1} = \sqrt{3}$$

Значит коэф. подобия $\triangle ADB$ и $\triangle CDE$ $k = \frac{DA}{DC} = \sqrt{3}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. по теор. косинусов $\triangle ADB$:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\angle ADB$$

$$(2R)^2 = 3 + 9 - 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos\angle ADB$$

$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 2}{4} = 12 - 2\sqrt{3} \cdot 3 \cos\angle ADB$$

$$18 - 12 = -2\sqrt{3} \cdot 3 \cos\angle ADB$$

$$6 = -6\sqrt{3} \cos ADB$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3} = \cos ADB}$$

$$\sin ADB = \sqrt{1 - \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{9-3}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Т.к. исходя из выше установленного подобия:

$$\cancel{\frac{AD}{DE}} = \cancel{AD} \quad \frac{BD}{DE} = \sqrt{3}$$

$$DE = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Значит $S_{ABEC} = \frac{AE \cdot BC \cdot \sin ADB}{2} =$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3})(\overset{2}{4})}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{3 \cdot 6}}{3} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 3}{3} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{ABEC} = 4\sqrt{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$b_4 = -\frac{b}{a}$$

$$b = a \cdot q$$

$$q = \frac{b}{a}$$

$$b_4 = b_3 \cdot q$$

$$-\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} = c \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}}$$

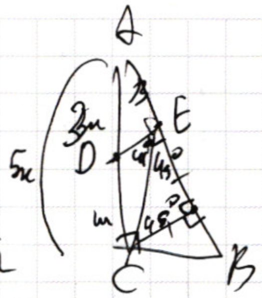
$$c = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ЧРН.

1

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ ax + b \leq 3x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ ax + b \leq -x + 1 \end{cases} \\ ax + b \geq 2(x-2)(x+\frac{1}{2}) \end{array}\right.$$



$x \geq \frac{1}{2}$

~~ax 3x~~

$3x - ax - 1 \geq b$

$x(3-a) - 1 \geq b$

~~$x(3-a) \geq b+1$~~

$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta} - 1} =$

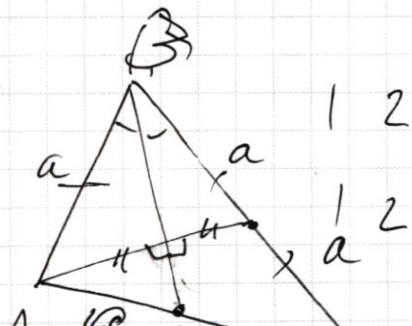
$= \sqrt{}$

$ax + b \geq 2x^2 - x - 1$

$2x^2 - x(a+2) - 1 \leq b$

$D = a^2 + 2a + 1 + 8 = a^2 + 2a + 9$

3



1 2 3 4 5 … ~~16·25~~ $16 \cdot 25 - 1$

1 2 3 4 5 … $16 \cdot 25 - 1$ →

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4}(a+2) - 1 \leq b$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4} - 1 \leq b$

$\frac{AH}{ABC} = \frac{HC}{2C}$

1200	2
600	2
300	2
150	2
75	5
15	5

$3a + b = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$

$2AH = HC$

$ab \cancel{7}$

$2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$

$AC = 3c$

$3a + 3c = 2^4 \cdot 5^2 \cdot \cancel{3}$

$a + c = 2^4 \cdot 5^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$y^2 - 4y + 3$

$D_4 = 4 - 3 = 1$

$\left[\begin{array}{l} y = 2+1 \\ y = 2-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right.$

$(y-2)(y-3)$

$2x^2 - 4x = 2x(x-2)$

$\begin{cases} ax+b \geq 2x^2 - x - 1, \\ ax+b \leq x + |2x-1| \end{cases}$ $D = 1+8 = 9$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$(x-2)(x+\frac{1}{2})$

$\begin{cases} (y-4x+2)(y-x-1) = 0 \\ (y-2)(y-3) + 2x(x-2) = 0 \end{cases}$

$\frac{6 - \sqrt{24} + 6}{12} = \frac{12 - \sqrt{24}}{12}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ ax+b \leq \overset{3x}{x + 2x - 1} \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ ax+b \leq \overset{-x}{x - 2x} + 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ ax+b \leq 3x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ ax+b \leq 1 - x \end{cases} \end{array}\right.$

$y - 2x \geq 0$ и ~~$xy + 2x + y + 2 \geq 0$~~

$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$

$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$y^2 - y(5x-1) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 25x^2 + 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8 =$

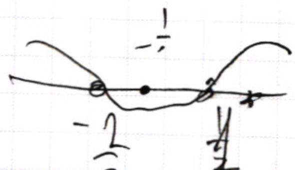
$= 9x^2 - 18x + 9 =$

$= 9(x^2 - 2x + 1) =$

$= 3^2(x-1)^2$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{5x - 1 + 3x - 3}{2} \\ y = \frac{5x - 1 - 3x + 3}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{8x-4}{2} = 4x - 2 \\ y = \frac{2x+2}{2} = x + 1 \end{array}\right.$

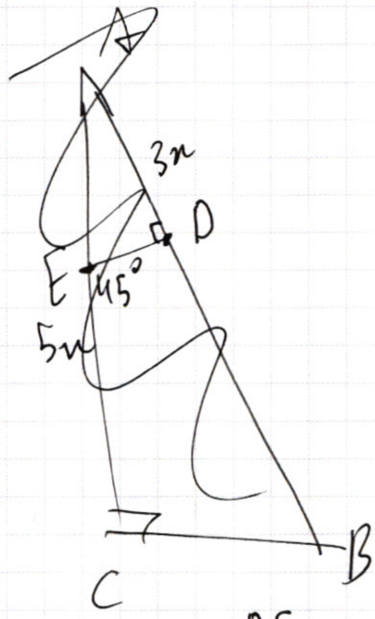


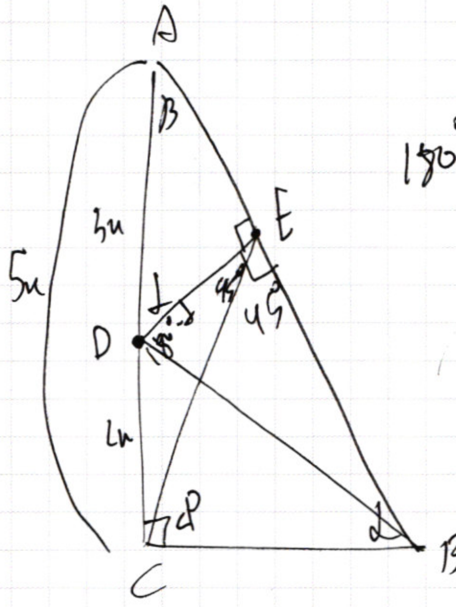
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$180^\circ = \angle P + 45^\circ + f$

$\sin f = \frac{5n}{AB}$

$\sin f = \frac{AE}{3n}$

$PE \perp AB$

$\triangle EAD \sim \triangle BAC$ (по 2 углам).

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{3n}{AB} = \frac{AE}{5n}$$

$\cancel{180^\circ} = \cancel{180^\circ} - \alpha + 45^\circ + f$

$\alpha - 45^\circ = f$

$\alpha = 90^\circ - \beta$

$45^\circ - \beta = f$

$90^\circ = \angle P + 45^\circ - \beta$

$\cancel{45^\circ = \angle P - \beta}$

$16 + \frac{4\cdot 3}{9} = 16\cdot 3$

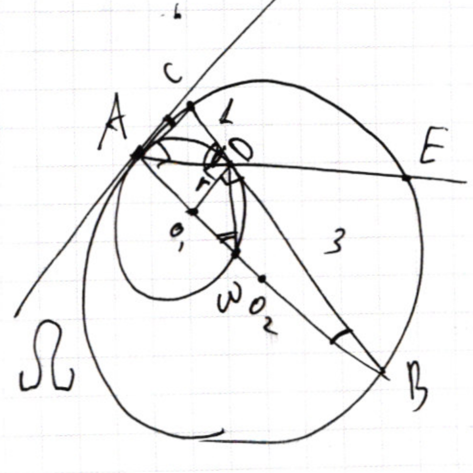
$\frac{16\cdot 9 + 4\cdot 3}{9} = 16\cdot 3$

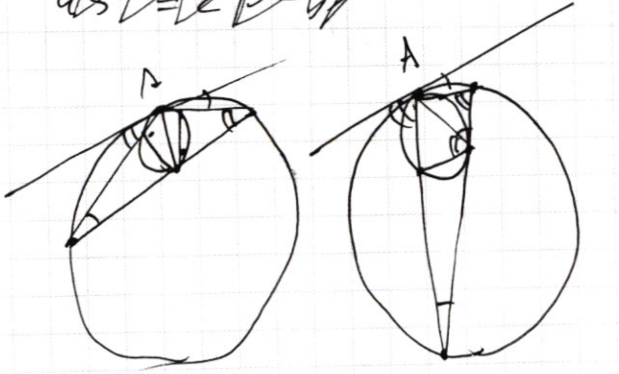
$16\cdot 9 + 4\cdot 3 = 16\cdot 3\cdot 9$

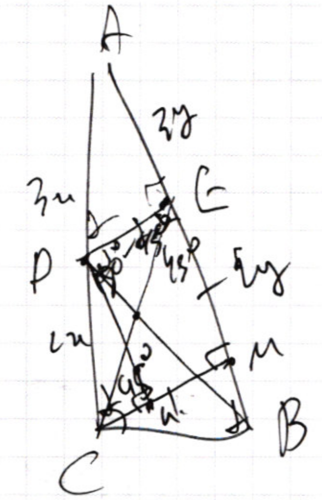
$(4\sqrt{3})^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{3}\right)^2 + 16$

$16\cdot 3^2 = \frac{4\cdot 16\cdot 3}{3}$

$\cancel{AB} = \frac{CB}{AC}$







$90^\circ - \gamma$

$AM = AE + DM =$
$= AE + \frac{2}{3}AE =$
$= \frac{5}{3}AE$

$\frac{AE}{DM} = \frac{3}{2}$

$AE = \frac{3}{2}DM$

$\frac{AE}{AM} = \frac{AE}{\frac{5}{3}AE} = \frac{3}{5}$

1 2 3 4 5 6 ... $2^4 \cdot 5^2 - 1$

~~$2^4 \cdot 5^2 - 1 - 1 + 1$~~

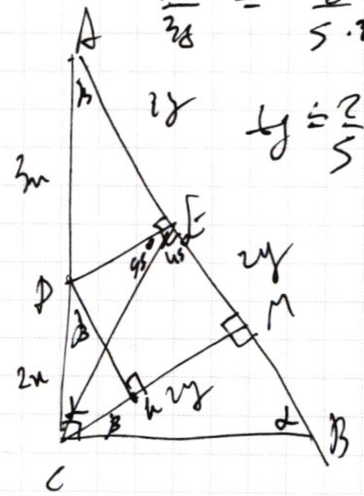
~~$2^4 \cdot 5^2$~~

~~$2^4 \cdot 5^2 - 1 = 1 + n - 1$~~

$n = 2^4 \cdot 5^2 - 1$

$\frac{DE}{3y} = \frac{6y}{5 \cdot 3y} = \frac{2}{5}$

$tg = \frac{2}{5}$



$N = \frac{n-1}{2}$

$y = \frac{5}{26} x\sqrt{26}$

$tg A =$

$\frac{CM}{DE} = \frac{5}{3}$

$9x^2 = 9y^2 + \frac{36y^2}{25} \Big| \cdot 25$

$225x^2 = 225y^2 + 36y^2$

$225x^2 = 261y^2$

$\frac{6y}{5} = DE$

$y = \frac{15x}{3}$

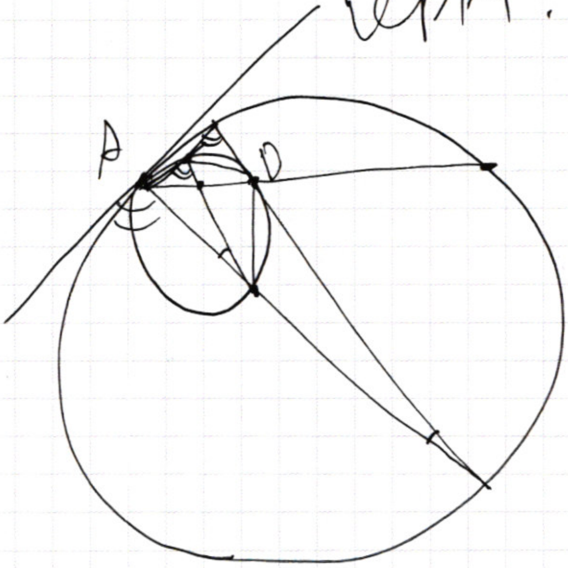
$y = \frac{\cancel{15} \cdot x}{\cancel{3}\, 26}\sqrt{26}$ $\quad y^2 = \frac{15^2 \cdot x^2}{3^2 \cdot 2 \cdot 13}$ $\quad 3^2 \cdot 2 \cdot 13$

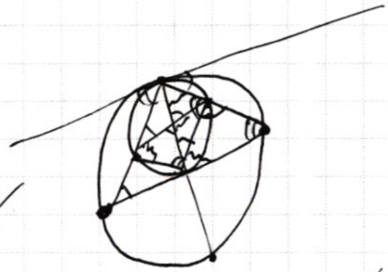
261 | 3
87 | 3
29 | 2
13

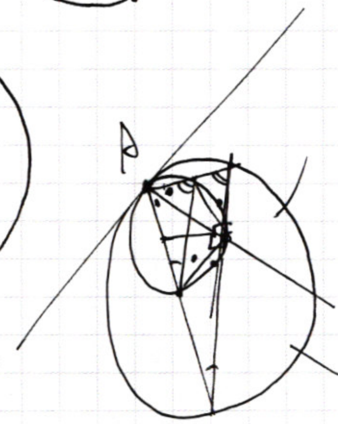
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

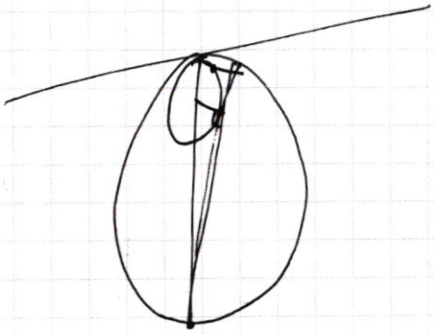
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

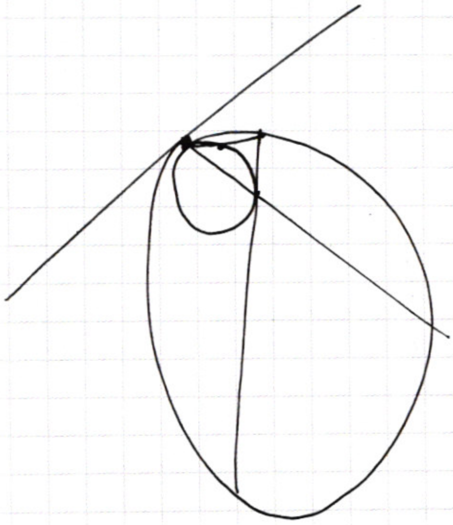
черн:











$$\frac{2R}{AC} = 3$$

$$AC = \frac{2R}{3}$$

$$\frac{AC}{r} = \frac{4}{\cancel{2R}}$$