МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 12

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Меньший корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57, \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12468.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 4$, $AN = 8$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = \sqrt{10}$, $BM = \sqrt{2}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них делятся на 5, но не делятся на 7, остальные же наоборот делятся на 7 и при этом не делятся на 5. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно кратное 5 и хотя бы одно кратное 7, можно 49 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$4 - 3x - |6x - 2| \leqslant ax + b \leqslant \frac{17 + 15x}{5 + 3x}$$

выполнено для всех x на промежутке $[-1; 1]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_1^n, x_2^n, \dots x_n^n$ – шестизначные числа, удовлетворяющие условию.

$100000 \le a < 1000000$

На 10^6 ост.-ся число $\Rightarrow$ на $(10^4, 10^5, 10^6)$ и больше сумма остатков будет хотя бы 100000, что больше, чем 12468.

~~На 10^5 ост ≤ 99999~~

10^4 ост. ≤ 9999 $\Rightarrow$ на $(10^2, 10^3, 10^4)$ и меньше

10^3 ост ≤ 999 сумма остатков меньше,

10^2 ост ≤ 99 чем $9999+999+99=11097$,

10^1 ост ≤ 9 что меньше, чем 12468.

10^0 ост 0

Возможные степени:

$10^3, 10^4, 10^5$

$x_i^n = 10^3 \cdot q_1 + R_1$

$x_i^n = 10^4 \cdot q_2 + R_2$

$x_i^n = 10^5 \cdot q_3 + R_3$

$R_1 + R_2 + R_3 = 12468$

$x_i^n = abcdef$ (на 10^4, на 10^3, на 10^5)

~~$12468 = 10^5 b + 2\cdot 10^4$~~

$12468 = 10^4 \cdot b + 2\cdot 10^3 \cdot c + 3\cdot 10^2 \cdot d + 3\cdot 10^1 \cdot e + 3\cdot f \Rightarrow f=6$

$1247\cancel{0} = 10^3 \cdot b + 2\cdot 10^2 \cdot c + 3\cdot 10^1 \cdot d + 3\cdot \cancel{10}\cdot e \Rightarrow e=9$

$122\cancel{0} = 10^2 \cdot b + 2\cdot 10^1 \cdot c + 3\cdot \cancel{10}\cdot d \Rightarrow d=4$

$11\cancel{0} = 10^1 b + 2\cdot \cancel{10}\cdot c$ $11 = 10b + 2c$

Ответ: Ни одного.

№3

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

Предположим, что ~~не существуют~~ такие числа существуют. Тогда пусть их существует n. Пронумеруем все такие числа в порядке возрастания от 1 до n. И каждое из этих чисел назовём x_i, где i - его номер $(i \in \overline{1,n})$.

По условию x_i - шестизначные $\Rightarrow 10^5 \leq x_i < 10^6$

Заметим, что остаток при делении x_i на 10^6, 10^7 и т.д. - это и есть x_i, т.к. $x_i < 10^6$, но этот остаток > 12468, т.к. $x_i \geq 10000 \Rightarrow$ условие про сумму трёх остатков, равную 12468 не выполняется, если хотя бы одна из степеней десяток, на которые мы делим x_i $\geq 10^6$.

Заметим, что остаток при делении на 10^4 - ≤ 9999; при делении на 10^3 - ≤ 999; при делении на 10^2 - ≤ 99, при делении на 10 - ≤ 9 $\Rightarrow$ ~~Если~~ Если среди трёх степеней десятки, на которые мы делим не найдётся ни одной $\geq 10^5$, то максимальная сумма остатков, которые мы можем получить - $9999 + 999 + 99 = 11097$, то есть не выполняется условие про сумму трёх остатков, равную 12468.

Таким образом, у нас должна найтись хотя бы одна степень $\geq 10^5$, но не должно найтись ни одной степени $\geq 10^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Единственные три степени, на которые мы можем делить, чтобы образовалась сумма остатков, равная 12468 - это 10^3; 10^4; 10^5.

Пусть число x_i представляет собой $x_i = \overline{abcdef}$ ($a, b, \ldots, f$ - цифры)

Заметим, что остаток от деления x_i на 10^3 - это $d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f$; остаток от деления x_i на 10^4 - это $c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f$; Продолжение на след. странице.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\left.\begin{array}{l} x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57 \\ y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68 \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=57+68=125=5^3$$

$$\left.\begin{array}{l} x+\sqrt[3]{(x+y)\cdot 5^3}=57 \\ y+\sqrt[3]{(x+y)\cdot 5^3}=-68 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x+5\sqrt[3]{x+y}=57 \\ y+5\sqrt[3]{x+y}=-68 \end{array}$$

$$(x+y)+10\sqrt[3]{x+y}=-11 \qquad \sqrt[3]{x+y}=t$$

$$\cancel{t+10\cdot\sqrt[3]{t}=-11}$$

$$t^3+10t+11=0$$

$$(t+1)(t^2-t+11)=0$$

-1 - корень

нет корней

$$\sqrt[3]{x+y}=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x-y=125 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=124 \Rightarrow x=62 \Rightarrow$$

$$\cancel{x-y=125}$$

$$\Rightarrow y=-63$$

Ответ: $(62;-63)$

№2

$$\begin{cases} x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57 \\ y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68 \end{cases} \Rightarrow \left(x+\sqrt[3]{x^2-y^2}\right)-\left(y+\sqrt[3]{x^2-y^2}\right)=(57)-(-68)$$, т.е.

$$x-y=57+68=125=5^3$$

$$\begin{cases} x+\sqrt[3]{(x+y)(x-y)}=57 \\ y+\sqrt[3]{(x+y)(x-y)}=-68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\sqrt[3]{(x+y)\cdot 5^3}=57 \\ y+\sqrt[3]{(x+y)\cdot 5^3}=-68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5\sqrt[3]{x+y}=57 \\ y+5\sqrt[3]{x+y}=-68 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+5\sqrt[3]{x+y}\right)+\left(y+5\sqrt[3]{x+y}\right)=(57)+(-68)$$, т.е.

$$x+y+2\cdot 5\sqrt[3]{x+y}=57-68=-11$$

$$(x+y)+10\sqrt[3]{x+y}=-11$$

Проведём замену: $\sqrt[3]{x+y}=t$, тогда:

$$t^3+10t=-11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^3+10t+11=0$$

Заметим, что $t=-1$ является корнем уравнения, т.к.

$$(-1)^3+10\cdot -1+11=-1-10+11=-11+11=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по следствию из теоремы Безу мы можем вынести $(t+1)$. Получим:

$$(t+1)(t^2-t+11)=0$$

заметим, что уравнение $t^2-t+11=0$ не имеет корней (т.к. $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 11=1-44=-43$, т.е. $D<0$) $\Rightarrow$ $t=-1$ – единственный корень уравнения $t^3+10t+11=0$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \sqrt[3]{x+y}=-1 \Rightarrow x+y=-1 \\ x-y=125 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x=124 \Rightarrow x=62 \\ x+y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=-63.$$

Ответ: $(62; -63)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a $\qquad a > 0 > a-2n$

$b = a - n$

$c = a - 2n$

$d = a - 3n$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2\cdot(a-n)\cdot x + a - 2n = 0$

$$x_{12} = \frac{-2(a-n) \pm \sqrt{4(a-n)^2 - 4\cdot a\cdot(a-2n)}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-2(a-n) - \sqrt{4a^2 - 8an + 4n^2 - 4a^2 + 16an - 16n^2}}{2a} =$$

$\cancel{2(n-a) - \sqrt{-2a^2 + 12an - 14n^2}}$

$$= \frac{2(n-a) - \sqrt{8an - 12n^2}}{2a} = \frac{2(n-a) - 2\sqrt{2an - 3n^2}}{2a} = \frac{(n-a) - \sqrt{2an-3n^2}}{a}$$

$$a - 3n = \frac{(n-a) - \sqrt{2an - 3n^2}}{a}$$

$a^2 - 3an = n - a - \sqrt{2an - 3n^2}$

$a^2 - 3an + a - n = \sqrt{2an - 3n^2} = \sqrt{n\cdot(2a - 4n) + n^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 1

Назовём четвёртый член прогрессии d. Пусть разность прогрессии равна $(-n) \Rightarrow b = a-n;\ c = a-2n;\ d = a-3n$. $a>0>c$, т.е. $a>0>a-2n \Rightarrow$ $\Rightarrow 2n>a$

$ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2\cdot(a-n)\cdot x+(a-2n)=0$

$D=(2\cdot(a-n))^2-4\cdot a\cdot(a-2n)=4\cdot((a-n)^2-a(a-2n))$

$$x_{12}=\frac{-2\cdot(a-n)\pm\sqrt{4\cdot((a-n)^2-a(a-2n))}}{2a}=\frac{2(n-a)\pm2\sqrt{\cancel{a^2}-\cancel{2an}+n^2-\cancel{a^2}+\cancel{2an}}}{2a}=$$

$$=\frac{n-a\pm\sqrt{n^2}}{a}$$

$$\left.\begin{array}{l}a>0\\ \sqrt{n^2}>0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{n-a+\sqrt{n^2}}{a}\text{ - больший корень; } \frac{n-a-\sqrt{n^2}}{a}\text{ - меньший корень.}$$

$$d=\frac{n-a-\sqrt{n^2}}{a}=\frac{n-a-n}{a}=\frac{-a}{a}=-1.$$

Ответ: Четвёртый член прогрессии равен -1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a $\qquad$ $a > 0 > c$, т.е. $a > 0 > a - 2n$

$b = a - n$ $\qquad$ $a + 2n > \boxed{2n > a}$

$c = a - 2n$

$d = a - 3n$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2(a-n)x + (a-2n) = 0$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2(n-a) \pm \sqrt{4(a^2 - 2an + n^2) - 4 \cdot a \cdot (a-2n)}}{2a}$$

$a > 0 \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow$ чем больше числитель, тем больше само $x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в числителе меньшего корня стоит „$-$" (минус).

$$x = \frac{2n - 2a - 2\sqrt{a^2 - 2an + n^2 - a(a-2n)}}{2a} = \frac{n - a - \sqrt{a^2 - 2an + n^2 - a^2 + 2an}}{a} =$$

$$= \frac{n - a - \sqrt{n^2}}{a} = \frac{n - a - n}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

на 10^5 - это $b\cdot10^4+c\cdot10^3+d\cdot10^2+e\cdot10+f$.

Тогда верно, что $d\cdot10^2+e\cdot10+f+c\cdot10^3+d\cdot10^2+e\cdot10+f+b\cdot10^4+c\cdot10^3+$
$+d\cdot10^2+e\cdot10+f=12468$, т.е.

$b\cdot10^4+2\cdot c\cdot10^3+3\cdot d\cdot10^2+3\cdot e\cdot10+3f=12468$

Заметим, что раз $n_i=\overline{abcdef}$ ~~...~~, то сколько решений будет у этого (на 2 строки выше) уравнения с условием, ~~...~~ что $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}$ и $a,b,c,d,e,f\in[0;9]$, столько же шестизначных чисел удовлетворяет условию задачи.

$10\cdot(b\cdot10^3+2\cdot c\cdot10^2+3\cdot d\cdot10+3\cdot e)+3f=12468$

$3f$ должно заканчиваться на 8. Единственная подходящая цифра - 6 $\Rightarrow f=6$, т.е.

$10\cdot(b\cdot10^3+2\cdot c\cdot10^2+3\cdot d\cdot10+3\cdot e)+18=12468$

$10\cdot(b\cdot10^3+2\cdot c\cdot10^2+3\cdot d\cdot10+3\cdot e)=12450$

$b\cdot10^3+2\cdot c\cdot10^2+3\cdot d\cdot10+3\cdot e=1245$

$10\cdot(b\cdot10^2+2\cdot c\cdot10+3\cdot d)+3e=1245$

$3e$ должно заканчиваться на 5. Единственная подходящая цифра - 5 $\Rightarrow e=5$, т.е.

$10\cdot(b\cdot10^2+2\cdot c\cdot10+3\cdot d)+15=1245$

$10\cdot(b\cdot10^2+2\cdot c\cdot10+3\cdot d)=1230$

$b\cdot10^2+2\cdot c\cdot10+3\cdot d=123$

$10(b\cdot10+2\cdot c)+3d=123$

$3d$ должно заканчиваться на 3. Единственная подходящая цифра - 1 $\Rightarrow d=1$, т.е.

$10(b\cdot10+2\cdot c)+3=123$

$10(b\cdot10+2\cdot c)=120$ Продолжение на след. странице.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6

Пусть чисел, которые делятся на 5 — x, а чисел, которые делятся на 7 — y.

Количество способов выбрать 3 числа, среди которых одно делится на 5 и хотя бы одно делится на 7:

$$C_x^1 \cdot C_y^1 \cdot C^1_{(x+y-2)} : 2$$

~~По условию:~~

$$\cancel{49 = \frac{C_x^1 \cdot C_y^1 \cdot C^1_{(x+y-2)}}{2} = \frac{x!}{(x-1)!} \cdot \frac{y!}{(y-1)!}}$$

По условию:

$$49 = \frac{C_x^1 \cdot C_y^1 \cdot C^1_{(x+y-2)}}{2} = \frac{x \cdot y \cdot (x+y-2)}{2} \Rightarrow x \cdot y \cdot (x+y-2) = 98$$

$98 = 2^1 \cdot 7^2$

Все варианты разложения числа 98 на 3 делителя:

$98 = 1 \cdot 1 \cdot 98$

$98 = 1 \cdot 2 \cdot 49$

$98 = 1 \cdot 7 \cdot 14$

$98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$

Заметим, что для $98 = x \cdot y \cdot (x+y-2)$ подходит только $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow$ или $x = 2$, а $y = 7$ или $x = 7$, а $y = 2$.

Поэтому $x + y = 9$

Ответ: Всего было записано 9 чисел

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

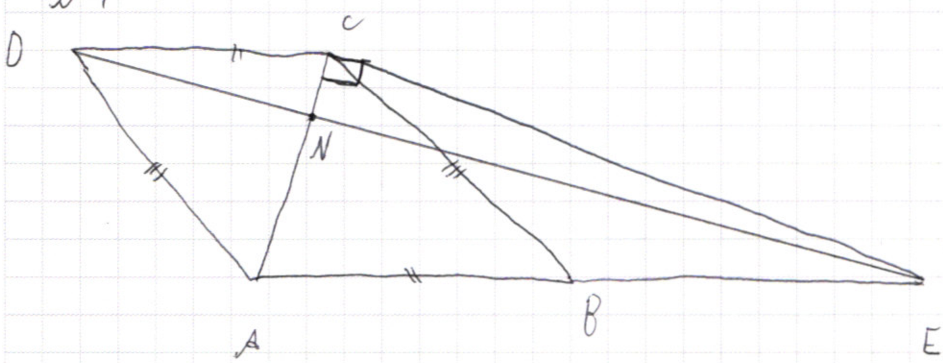
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$CN=4$

$AN=8$

$tg(\frac{1}{2}\angle ADC)=\frac{2}{5}$

№6

Пусть чисел, которые делятся на 5 – x, а на 7 – y.

тогда

$$49=\frac{C_x^1\cdot C_y^1\cdot C_{(x+y-2)}^1}{2}=$$

$$=\frac{x\cdot y\cdot(x+y-2)}{2}\Rightarrow$$

$$98=2\cdot7^2$$

$$\Rightarrow 98=x\cdot y\cdot(x+y-2)$$

$x=2$ $y=7$

Ответ: 9.

a.5 .b7

c5. .d7

$C_4^3=\frac{4!}{3!}=4$

a b c

a b d

c b a

c b d

a d b

a d c

c d a

c d b

$98=1\cdot2\cdot49$

$98=1\cdot1\cdot49$

$98=1\cdot7\cdot14$

$98=2\cdot7\cdot7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$b \cdot 10 + 2 \cdot c = 12$

$2c$ должно заканчиваться на 2. ~~Есть~~ Есть две подходящие цифры: 1 и 6.

1) $c = 1$

$b \cdot 10 + 2 = 12$

$b \cdot 10 = 10$

$b = 1$

2) $c = 6$

$b \cdot 10 + 12 = 12$

$b \cdot 10 = 0$

$b = 0$

Итого есть два варианта комбинаций цифры b, c, d, e, f:

1) $a11158$

2) $a06158$

Заметим, что цифра a может быть любой (кроме 0, т.к. число шестизначное), т.к. на выполнение условий это не влияет. $\Rightarrow$ всего таких шестизначных чисел — ~~ихх~~ $2 \cdot (10-1) = 2 \cdot 9 = 18$. Вот эти числа:

111158	811158	606158
211158	911158	706158
311158	106158	806158
411158	206158	906158
511158	306158	
611158	406158	
711158	506158	

Ответ: 18.