МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

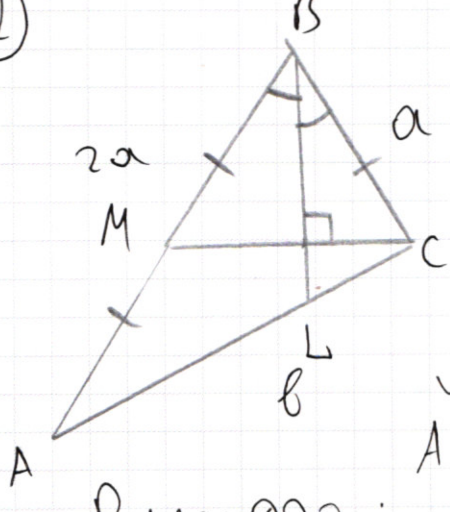
① a, b, c – три последов. члена геом. прогрессии d – четвертый член. Тогда, пускай: $a = pq^0$
$b = pq^1$ $c = pq^2$ $d = pq^3$.

Т.к. d – является корнем уравнения, справедливо равенство: $ad^2 - 2bd + c = 0 \Rightarrow$

$p \cdot p^2 \cdot q^6 - 2 \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q^3 + p \cdot q^2 = 0$ сокращу все на pq^2, т.к. иначе $pq^2 = 0$. Уравнение примет вид: $p^2q^4 - 2pq^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
$(pq^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow pq^2 = 1$.

Ответ: 1.

②



ΔABC, BL – бис-са, CM – медиана. Т.к. в ΔBMC бисс-са является еще и высотой, ΔBMC – р/б. т.е. $BM = BC \Rightarrow AB = 2BM = 2BC$
Пусть $BC = a$, $AC = b$ тогда $AB = 2a$. Необходимо, чтобы $P_{ABC} = 900$: $3a + b = 900$, причем a и b – натуральные числа. Также, чтоб треугольник ABC – существовал, необходимо чтоб выполнялись 3 неравенства.

(2) $\begin{cases} 2a+a>b \Leftrightarrow 3a>b \\ a+b>2a \Leftrightarrow b>a \\ 2a+b>a \Leftrightarrow a+b>0, \text{ что выполняется всегда.} \end{cases}$

Итого получаю систему: $\begin{cases} 3a+b=900 \\ 3a>b \\ b>a \end{cases}$

$3a>b$ $\qquad$ $b>a$

$900-b>b$ $\qquad$ $b>300-\frac{b}{3}$

(1) $450>b$ $\qquad$ $4b>900$

(2) $b>9\cdot 25$ Тогда получаю

равносильную систему: $\begin{cases} 3a+b=900 \\ 450>b \\ 9\cdot 25<b \end{cases}$, замечу

также, что $b=900-3a=3(300-a)\ \vdots\ 3$

тогда $b=3k$, где $k\in N$. Тогда из ограничений

(1) и (2) получу все возможные „b":

$3\cdot 76,\ 3\cdot 77, \ldots, 3\cdot 149$ т.е. $149-76+1=$

$=74$ возможных значений. Очевидно, что

каждому „b" соответствует „a" $\Rightarrow$

всего возможных треугольников 74

Ответ: 74

□ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3) $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

Перепишем систему в виде:

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$, по ОДЗ: $(x-6)(y-1)\geq 0$ $\Downarrow$ $\left[\begin{array}{l} x\geq 6 \text{ и } y\geq 1 \\ x\leq 6 \text{ и } y\leq 1 \end{array}\right.$

1) $x\leq 6$ и $y\leq 1$:

$\sqrt{6-x}=a$ $\sqrt{1-y}=b$, где a и $b\geq 0$, тогда:

$\begin{cases} 6b^2-a^2=a\cdot b \to 6b^2-ab-a^2=0 \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$

$D=a^2+24a^2$

$b_{1,2}=\frac{a\pm 5a}{12}$ — $b=\frac{1}{2}a$, $b=-\frac{1}{3}a$

Т.к. a и $b\geq 0$ $b=-\frac{1}{3}a$ не подходит.

Тогда $b=\frac{1}{2}a$ или $a=2b$, тогда:

$16b^4+2b^4=18 \Rightarrow b^4=1$, т.к. $b\geq 0$. $b=1$

$b=\sqrt{1-y}$: $1=\sqrt{1-y} \Rightarrow y=1$ $a=2b=2$: $\sqrt{6-x}=2$:

$x=2$

2) $x\geq 6$ и $y\geq 1$: $a=\sqrt{x-6}$ $b=\sqrt{y-1}$; $a,b\geq 0$

$\begin{cases} a^2-b^2\cdot 6=ab \to a^2-ab-6b^2=0 \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$ $a=3b$ или $a=-2b\to$ не подход.

Тогда $a=3b$: $81b^4+b^4\cdot 2=18$: $b^4=\frac{18}{83}$, ~~[illegible]~~

$b^2=\sqrt{\frac{18}{83}}$: $b^2=y-1$: $y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}$

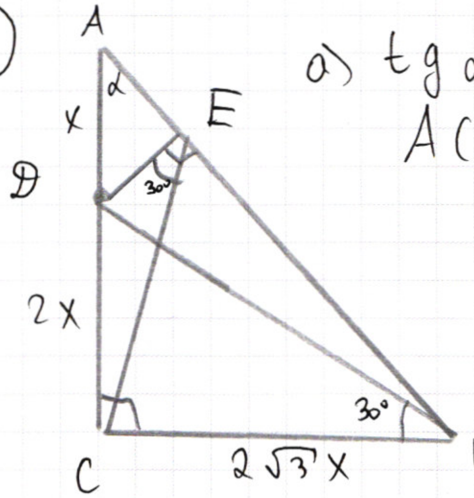
3

$a^2 = 9b^2$: $\quad a^2 = 9\sqrt{\frac{18}{83}} = x - 6$

$x = 6 + 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

Ответ: $(2; 1)$; $\left(6 + 9\cdot\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1 + \sqrt{\frac{18}{83}}\right)$

4



а) $tg\,\alpha - ?$ $(\alpha = \angle BAC)$. Пусть $AC = 3x$, тогда $AD = x \Rightarrow$ $CD = 3x - x = 2x$. Т.к. CDEB вписанный четырехугольник $(\angle DCB + \angle DEB = 90° + 90° = 180°)$ Углы $\angle DEC$ и $\angle DBC$ равны, т.к. опираются на общую хорду CD. $\Rightarrow$ $\angle DBC = 30° \Rightarrow$ в $\triangle BCD$ $\angle DCB = 90°$ и угол $\angle DBC = 30° \Rightarrow$ $BD = 2\cdot CD = 4x \Rightarrow BC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} =$ $= 2\sqrt{3}x$ Тогда $tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

б) $AC = \sqrt{7}$ $\quad S_{CED} - ?$ $\quad S_{CED} = \frac{CD \cdot ED \cdot \sin\angle CDE}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{ED}{AD} \Rightarrow ED = AD \cdot tg\,\alpha$. Т.к. CDEB – вписан., то $\angle CDE + \angle EBC = 180° \Rightarrow \sin\angle CDE = \sin\angle EBC$

$\sin\angle EBC = \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{\sqrt{12x^2 + 9x^2}} = \frac{3}{\sqrt{21}}$. Тогда:

$$S_{CED} = \frac{\cancel{2}x \cdot x \cdot tg\,\alpha \cdot \frac{3}{\sqrt{21}}}{\cancel{2}} = x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}} =$$

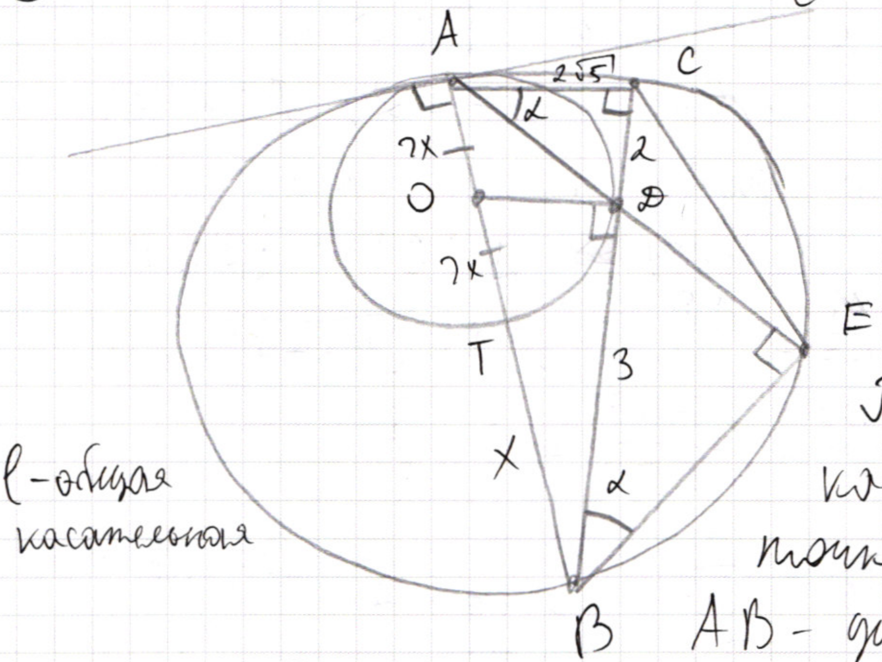
$$= \frac{2x^2}{\sqrt{7}} \qquad AC = \sqrt{7} = 3x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3};$$

$$S_{CED} = \frac{2\cdot\frac{7}{9}}{\sqrt{7}} = \frac{14}{9\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{9}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4) Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{2\sqrt{7}}{9}$

(5)



$CD = 2$

$BD = 3$

r_Ω – ?

r_ω – ?

S_{BACE} – ?

Проведу общую касательную в точке A. Тогда, т.к. AB – диаметр Ω => $AB \perp l$. Тогда пусть AB пересекает окр-ть ω повторно в точке T, => т.к. $AB \perp l \Rightarrow AT \perp l \Rightarrow AT$ – диаметр ω. Пусть O – центр ω => $AO = OT$. Т.к. (B – кас =>) $OD \perp BC \Rightarrow AC \parallel OD \Rightarrow AO : OB = CD : BD$. Пускай $AO = OT = 2x \Rightarrow \frac{2x}{OB} = \frac{2}{3} \Rightarrow OB = 3x$

$BT = OB - OT = 3x - 2x = x$. Тогда по теореме о касательной и секущей для точки B и касательной BD, секущей BA и окр-ти ω: $BT \cdot AB = BD^2 \Rightarrow$

$x \cdot 5x = 9 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{5}}$. $r_\omega = 2x = \frac{6}{\sqrt{5}}$

(5) $r_\Omega = \frac{5x}{2} = \frac{5 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} = 1{,}5 \cdot \sqrt{5}$

AC по теореме пифагора $= \sqrt{AB^2 - BC^2} =$

$= \sqrt{25x^2 - 25} = 5\sqrt{x^2-1} = 5\sqrt{\frac{9}{5} - 1} = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{5}} =$

$= 2\sqrt{5}$. Т.к. $\angle CAE$ и $\angle CBE$ опираются на одну дугу $EC \Rightarrow$ они равны. Пусть $\angle CAE = \angle CBE = \alpha$. Также $\angle ACB$ и $\angle AEB$ равны по 90° т.к. опираются на диаметр $\Rightarrow \triangle ACD$ и $\triangle DEB$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{AD}{BD}$. $AD = \sqrt{4 \cdot 5 + 4} = 2\sqrt{6}$

$BE = \frac{AC \cdot BD}{AD} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 3}{2\sqrt{6}} = 3\sqrt{\frac{5}{6}}$

$\sin\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. $S_{CBE} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BE \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{15\sqrt{5}}{12}$. $S_{ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} =$

$= \frac{2\sqrt{5} \cdot 5}{2} = 5\sqrt{5} \Rightarrow S_{BACE} = S_{ACB} + S_{CBE} = \frac{15\sqrt{5}}{12} +$

$+ 5\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $r_\Omega = 1{,}5 \cdot \sqrt{5}$ $\quad r_\omega = \frac{6}{\sqrt{5}}$ $\quad S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\begin{cases} 8x-6|2x-1| \le ax+b \\ ax+b \le -8x^2+6x+7 \end{cases}$

$y = 8x-6|2x-1| \Leftrightarrow y = \begin{cases} 6-4x, & x \ge \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$y=-8x^2+6x+7 \quad x_b = -\frac{(-6)}{2\cdot 8} = \frac{3}{8}$

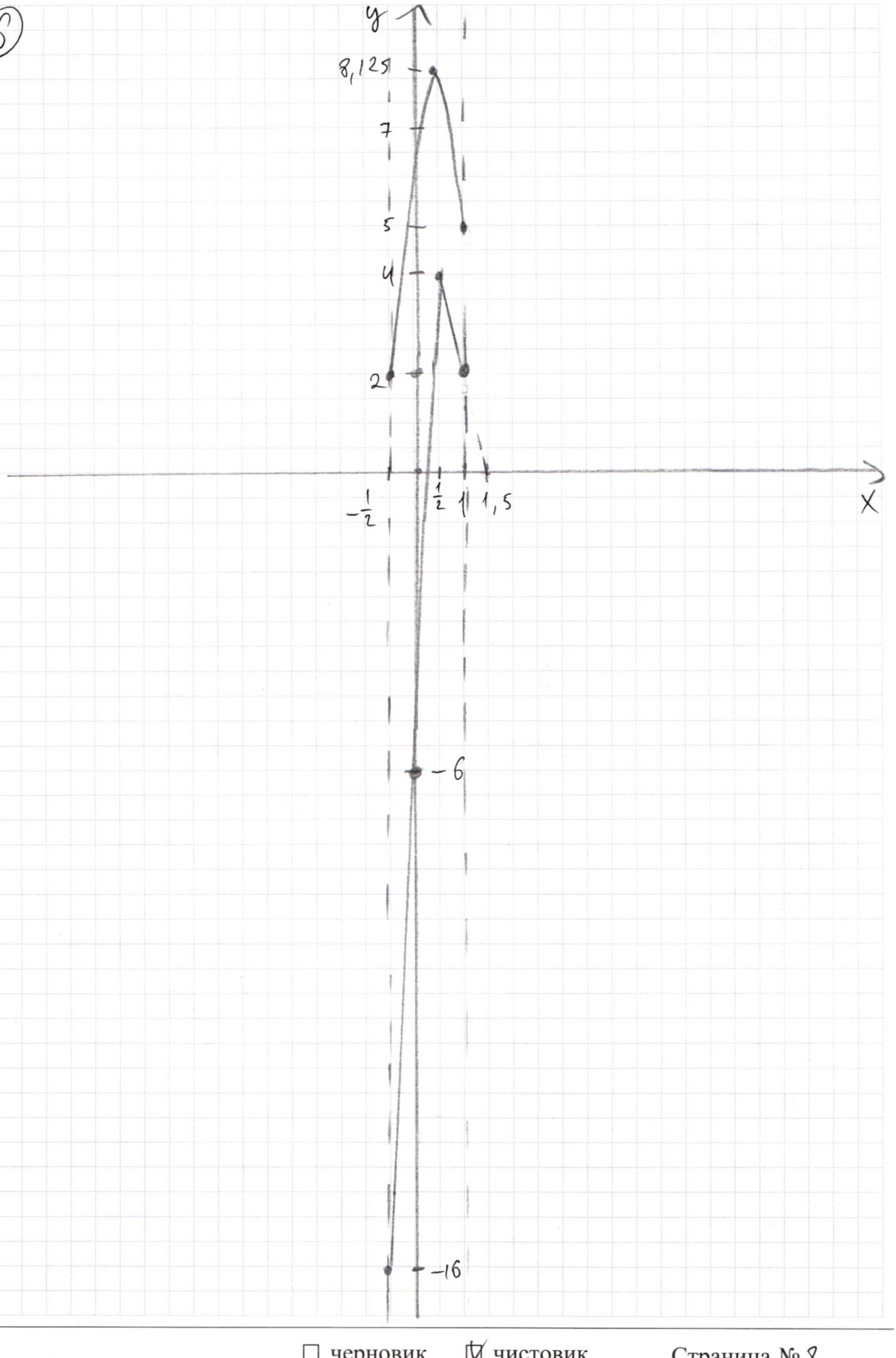
$y_b = -8\cdot\frac{9}{8\cdot 8}+\frac{6\cdot 3}{8}+7 = -\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+7 = 7+\frac{9}{8} = 8,125$

$x=-\frac{1}{2}: \ y=-8\cdot\frac{1}{4}-\frac{6\cdot 1}{2}+7 = -2-3+7=2$

$x=1: \ y=-8+6+7=5$. Нам нужно, чтобы прямая $y=ax+b$ на промежутке от $[-\frac{1}{2};1]$ не пересекала множества $y > 8x-6|2x-1|$ и множество $y > -8x^2+6x+7$. Очевидно, что при $b<-6$ или $b>7$ прямая будет пересекать множество. При $b \in [-6;7]$ необходимо, чтобы при $x=-\frac{1}{2}$ $y \in [-16;2]$ а при $x=1$ $y \in [2;5]$ и при этом не пересекал множества. $\Rightarrow a>0$

~~Тогда рассмотрю предельный случай, когда прямая проходит через точки $(-\frac{1}{2};2)$ и $(\frac{1}{2};4)$. Замечу, что она также проходит через точку $(1;5)$~~

6



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) a, b, c, d: $a \cdot c = b^2$, $b \cdot d = c^2$ $\quad c - ?$

$b \quad bq \quad bq^2 \quad bq^3$

$a \quad b \quad c \quad d$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$bx^2 - 2bqx + bq^2 = 0$: bq^3 – корень $\quad bq^2 - ?$

$b \cdot b^2 \cdot q^6 - 2b \cdot q \cdot b \cdot q^3 + bq^2 = 0 \quad | : b$

$b^2q^6 - 2bq^4 + q^2 = 0 \quad | : q^2$

$b^2q^4 - 2bq^2 + 1 = 0$

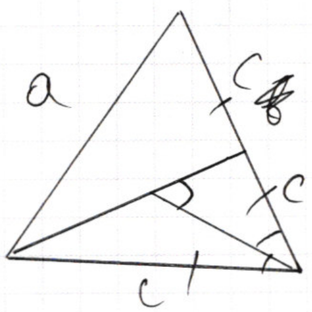
$bq^2 = t$

~~$bq^2(bq^2 - 2) + 1 = 0$~~

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$\boxed{t = 1}$

2)



$a + b + c = 900$

$a + 2c + c = 900$

$a + 3c = 900$

$\boxed{3c > a}$

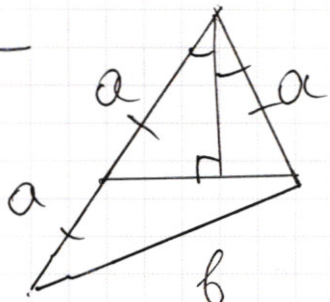
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№25
9



$$\begin{cases} 3a+b=900 \\ 3a>b \end{cases} \Rightarrow \quad 900=3a+b>4b$$

$$b<9\cdot 25$$

$b\in[3;\ 6;\ 9;\ \ldots\ 3\cdot 75-3]$

$3\cdot 74$

$b=74 \Leftrightarrow a$

Ответ: 74

(3)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \rightarrow x(y-1)-6(y-1)=(x-6)(y-1)$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2-12x+36+2y^2-4y-16\Rightarrow(x-6)^2+2(y^2-2y+1)=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \\ x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \end{cases} \quad \sqrt{x-6}=a \quad \sqrt{y-1}=b \quad a,b\geq 0$$

$$\begin{cases} a^4+2b^4=18 \\ ab=a^2-6b^2 \end{cases}$$

$a^2-ab-6b^2=0$

$D=b^2+24b^2=25b^2$

$a_{1,2}=\dfrac{b\pm 5b}{2}$

$a_1=3b$

$a_2=-2b$

1) $16b^4+2b^4=18$

$b^4=1$

$\begin{cases} \boxed{b=1} \\ a=2 \end{cases}$

2) $27b^4+2b^4=18$

$29b^4=18$

$b^4=\dfrac{18}{29}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$900 > 7b$

$b < 75 \cdot 3$

$\begin{cases} b > a \\ 3a > b \end{cases}$

$3a + b = 900$

$900 - b > b$

$900 > 2b$

$\boxed{b < 450}$

$900 = 3a + b > 4a$

$a < 75 \cdot 3$

$\cancel{900 = 3a + b} < 75 \cdot 9 + b$

$900 < 75 \cdot 9 + b$

$b > 300 - \frac{b}{3}$ $\quad b <$

$\frac{4b}{3} > 300$

$4b > 900$

$b > 75 \cdot 3$

$b \in (3 \cdot 75 ; 3 \cdot 150)$

$3 \cdot 76, 3 \cdot 77, \ldots 3 \cdot 149$

$149 - 76 + 1 = 150 - 1 - 75 - 1 + 1 = 75 - 1 = \boxed{74}$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$x - 6 = a$

$y - 1 = b$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$a - \sqrt{ab} - 6b = 0$

$D = b + 24b = 25b$

$\sqrt{a}_{1,2} = \frac{\sqrt{b} \pm 5\sqrt{b}}{2}$

$\sqrt{a} = 3\sqrt{b}$, т. к. $\sqrt{a} \geq 0$

$a = 9b$

$81b^2 + 2b^2 = 18$

$83b^2 = 18$

$b^2 = \frac{18}{83}$

$y^2 - 2y + 1 = \frac{18}{83}$

$y^2 - 2y + \frac{83 - 18}{83} = 0$

$83 - 18 = 65$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{\cancel{xy}\, y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ \underbrace{x^2-12x+36}+2y^2-4y+2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \\ x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \end{cases}$$

1) $x \le 6$ и $y \le 1$

$\sqrt{6-x}=a \quad \sqrt{1-y}=b \qquad a,b \ge 0$

$6b^2-a^2=\cancel{\sqrt{a}\sqrt{b}}\cdot a\cdot b$

$6b^2-ab-a^2=0$

$D=a^2+24a^2=25a^2$

$b_{1,2}=\frac{a\pm 5a}{12} \Rightarrow b=\frac{1}{2}a$

$\boxed{a=2b}$

$a^4+2b^4=18$

$16b^4+2b^4=18$

$b=1$, $a=2$ $\Rightarrow$ $1=\sqrt{1-y} \Rightarrow y=0$; $2=\sqrt{6-x} \Rightarrow x=2$

2) $x>6 \quad y>1$

$$\begin{cases} a^2-6b^2=ab \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$$

$a^2-6b^2-ab=0$

$a=-2b$

$a=3b$

$81b^4+2b^4=18$

$b^4=\frac{18}{83}$

$\cancel{\sqrt{1-b}}\ \sqrt{y-1}=\sqrt{\frac{18}{83}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = -\frac{1}{2} \quad y \in [-16; 2]$

$x = 1 \quad y \in$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

⑥

~~И как бы я не менял a и b, прямая не пройдет через промежуток $y \in [2;5]$ при $x=1$. Тоесть, чтобы условие выполнялось подходит единственная прямая, проходящая через точки $(-\frac{1}{2};2)$ $(\frac{1}{2};4)$ и $(1;5)$ $\Rightarrow$ $y=2x+3$~~

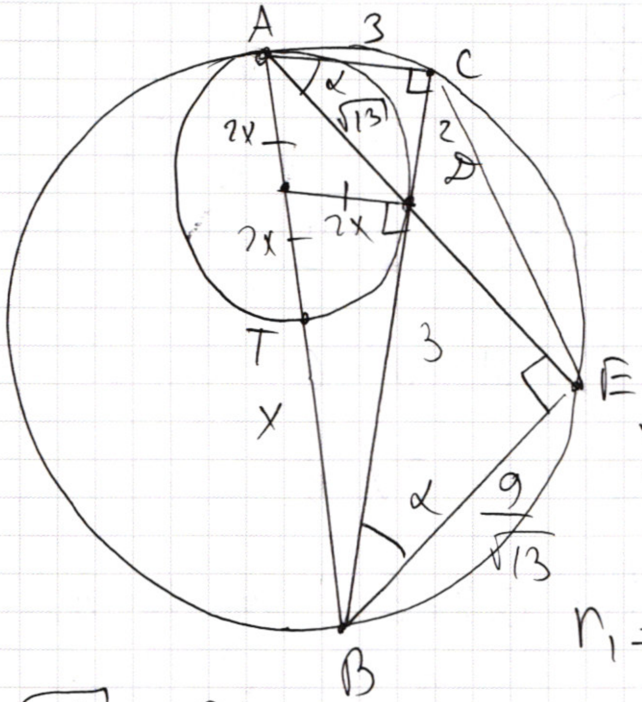
Рассмотрю предельный случай расположения, при котором при $x=-\frac{1}{2}$ $y=2$ и прямая проходит через точку $(0,5;4)$. Замечу, что она также проходит через точку $(1;5)$ $\Rightarrow$ Как бы я не менял a и b, прямая не может при $x=-\frac{1}{2}$ давать значение $y \in [-16;2)$, при $x=1$ давать значение $y \in [2;5]$ и при этом не пересекать множества $y > 8x-6|2x-1|$ и $y > -8x^2+6x+7$ $\Rightarrow$ Прямая, проходящая через точки $(-\frac{1}{2};2)$, $(\frac{1}{2};4)$, $(1;5)$ – единственная возможная: $y=2x+3$ $\Rightarrow$

$a=2$ $b=3$.

Ответ: $(2;3)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



r_1 - ?

r_2 - ?

S_{BACE} - ?

$CD=2$

$BD=3$

$x\cdot 5x=9$

$x=\frac{3}{\sqrt5}$

$r_1=2x=\frac{6}{\sqrt5}$

$r_2=2,5x=\frac{7,5}{\sqrt5}$

$\frac{\sqrt{13}}{3}=\frac{3}{?}$

$?=\frac{9}{\sqrt{13}}$

$5y=3\sqrt5$

$AC=\sqrt{9\cdot5-36}=\sqrt{45-36}=$

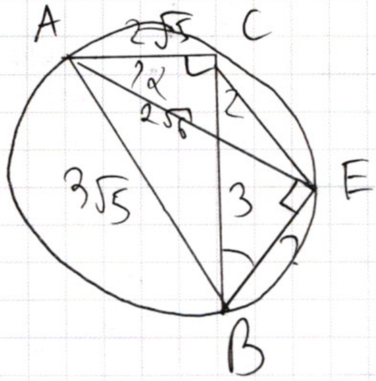
$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$S_{BEC}=\frac{\frac{9}{\sqrt{13}}\cdot5\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}=\frac{45}{13}$

$S_{AMC}=$

$5^2+(2\sqrt5)^2=\cancel{(5\sqrt5)^2}(3\sqrt5)^2$

$25+\underset{20}{\underline{y}}\cdot5=9\cdot5$



$y \cdot 5 + y = 2y = 2\sqrt6$

$\frac{2\sqrt6}{3} = \frac{2\sqrt5}{?}$

$? = \frac{3\sqrt5}{\sqrt6}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt6}$

$\frac{5\sqrt5}{4} + 5\sqrt5 = \frac{5\sqrt5 + 20\sqrt5}{4}$

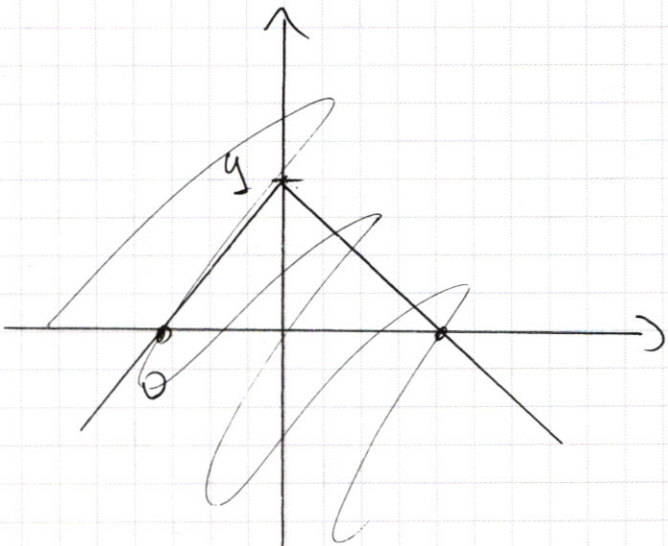
(6) $\begin{cases} 8x - 6|2x-1| \le ax+b \\ -8x^2+6x+7 \ge ax+b \end{cases}$

$y \le ax+b$ где $y = 8x - 6|2x-1|$

$x = \frac12 : y = 4$

$\Downarrow$

$\boxed{b \ge 4}$

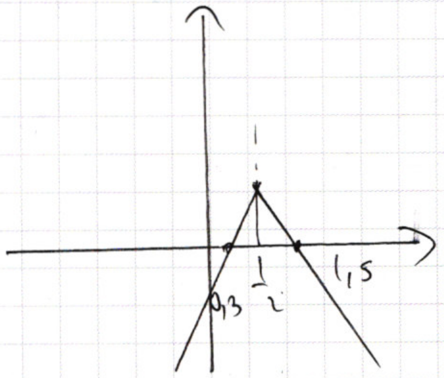


$y = \begin{cases} 6-4x, & x \ge \frac12 \\ \cancel{20x} \; 20x-6, & x < \frac12 \end{cases}$

$0 = 20x - 6$

$10x = 3$

$x = 0,3$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

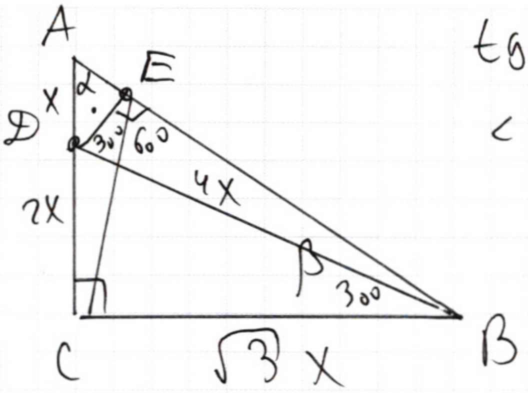
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



$tg\alpha - ?$

$\angle CED = 30^\circ$

$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}x}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$AC = \sqrt{7} = 3x$

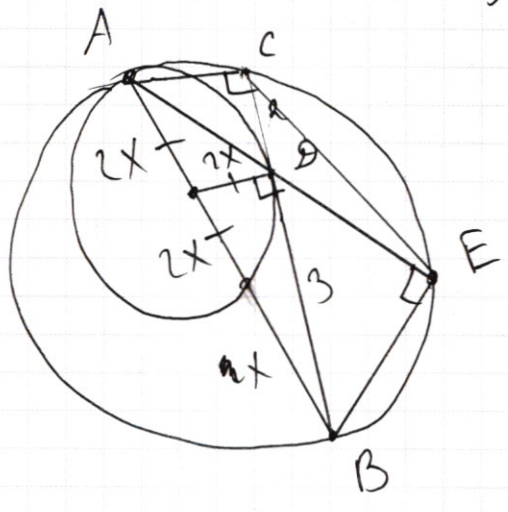
$S_{CED} = CD \cdot ED \cdot \frac{\sin\beta}{2} = \frac{2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x \cdot \sin\beta}{2} =$

$= x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sin\beta$

$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{3x^2 + 9x^2}}{3x^2} = \frac{\sqrt{12}\cancel{x}}{3\cancel{x}} = 2\sqrt{3}$

$S_{CED} = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2 \cdot \cancel{\sqrt{3}} = \boxed{14}$

5



$4x^2 + 9 = 9x^2$

$5x^2 = 9$

$x = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$r_1 = 2x = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$r_2 = \frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} =$

$= 1,5\sqrt{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

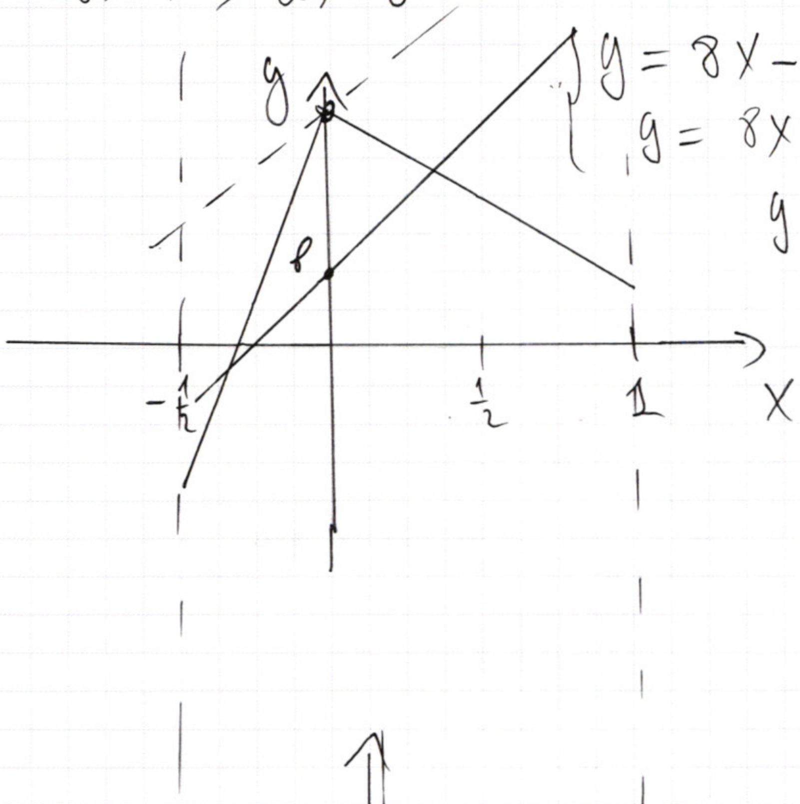
⑥ $\begin{cases} 8x - 6(2x-1) \leq ax+в \\ -8x^2+6x+7 \geq ax+в \end{cases}$

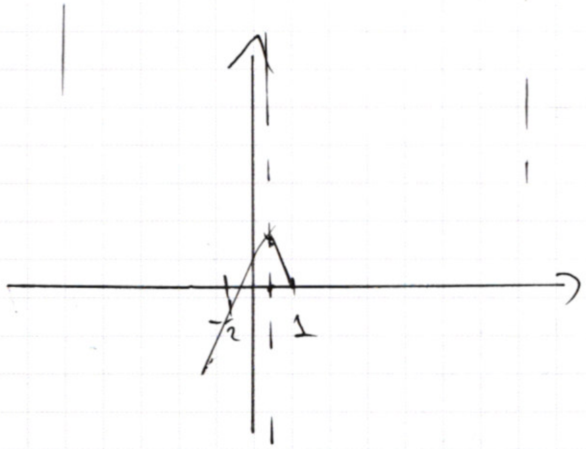
$(0; в)$

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$\begin{cases} y = 8x - 12x + 6, & x \geq \frac{1}{2} \\ y = 8x + 12x - 6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$y = \begin{cases} 6 - 4x, & x \geq \frac{1}{2} \\ 20x - 6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -8x^2+x(6-a)+7-b\geq 0 \\ 6-4x\leq ax+b \end{cases}$$

$x\in[-\frac{1}{2};2]$

$1\geq x\geq\frac{1}{2}$

$(a+4)x+b-6\geq 0$

$\cancel{(a+4)x\geq 6-b}$

$\cancel{x\geq\frac{6-b}{a+4}}$

7 $\cancel{f(p)=[\frac{p}{2}]}$ $p=2$

$\cancel{f(2)=1}$

$\cancel{f(3)=1}$

(b) $y=\begin{cases} 6-4x, & x\geq\frac{1}{2} \\ 20x-6, & x<\frac{1}{2} \end{cases}$

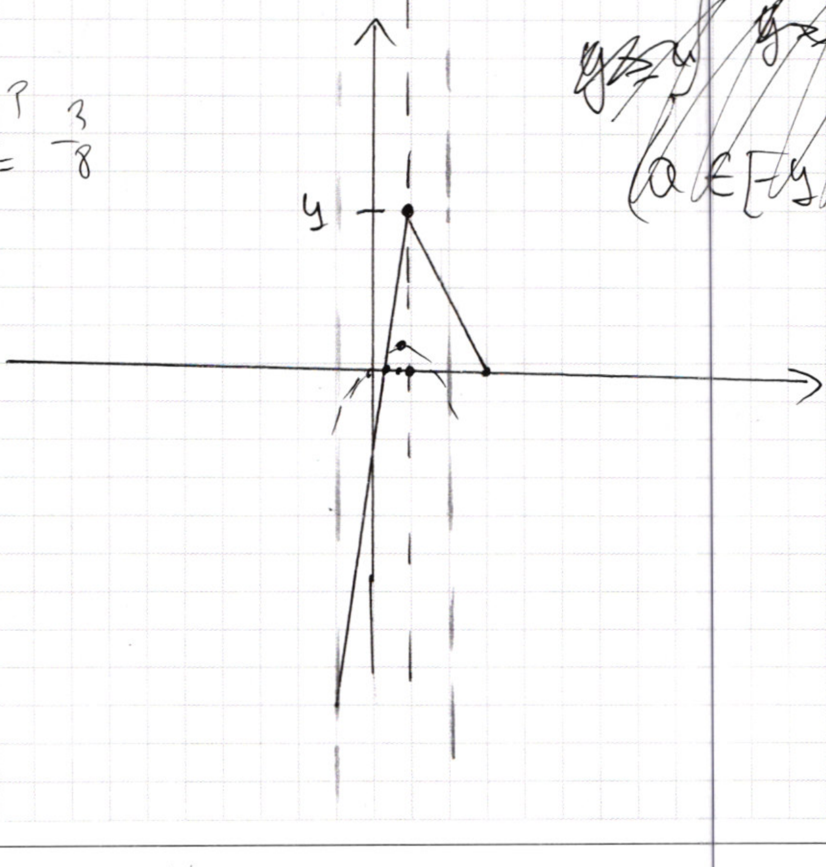
$y=ax+b$

$-8x^2+6x+7$

$x_b=-\frac{6}{2\cdot 8}=-\frac{3}{8}$

$\cancel{b\geq 4}$

$\cancel{a\in[-4;20]}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

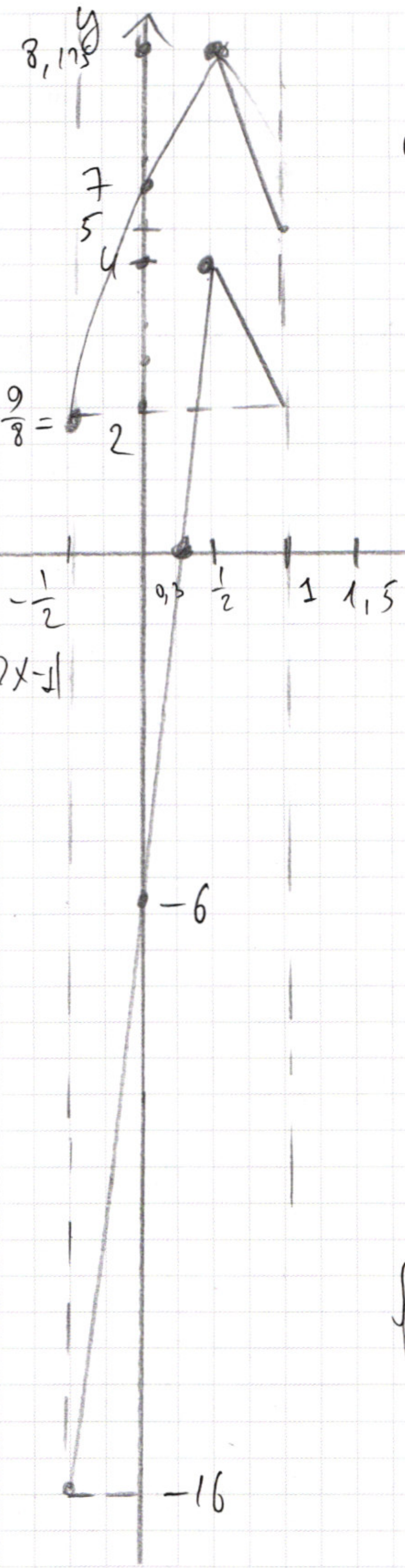
$y=-10-6=-16$

$y_в = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$-\frac{9}{64}\cdot 8 + \frac{6\cdot 3}{8} + 7 =$

$= -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 = 7 + \frac{9}{8} =$

$= 8 + \frac{1}{8} = 8{,}125$



$x = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{8\cdot 1}{4} - 3 + 7 =$

$= -2 - 3 + 7 =$

$= 2$

$x = 1:$

$-8 + 6 + 7 = 5$

$y \le 8x - 6|2x-1|$

$в \in [-6; 7)$

$(0;0)$

$y = 8x - 6|2x-1|$

$0 = 0 \le -6$

нет

$0 >$

$y \geq$

$y < -8x^2 + 6x + 7$

$0 < 7$

$(1;5)$

$(\frac{1}{2}; 4)$

$(-\frac{1}{2}; 2)$

$y = ax + в$

$\begin{cases} 5 = a + в \\ 4 = \frac{1}{2}a + в \end{cases}$

$\frac{1}{2}a = 1$

$a = 2$

$в = 3$

$y = 2x + 3$

$x = -\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)