МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $S=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$; $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

a - первый
$b=aq$
$c=aq^2$
$x=aq^3$

$\frac{2}{3}=\frac{AC}{BE}=\frac{2\sqrt5}{BE}$

$a-1$
$b-2$
? $c-3$
$x-4$

$ax^2-2bx+c=0$

$ax^2-2aqx+aq^2=0$

$a(aq^3)^2-2aq\cdot aq^3+aq^2=0$

$a^3q^6-2a^2q^4+aq^2=0$

$BF=3\sqrt5$

$5\sqrt5+\frac{8\sqrt5+27\sqrt5}{6}$ $35\sqrt5$

1) $a=0$
геом пр: 0, 0, 0 ...

2) $a\neq0$; $q\neq0$ $|:aq^2$

$a^2q^4-2aq^2+1=0$

$(aq^2)^2-2\cdot a\cdot q^2\cdot 1+(1)^2=0$

$q=0$
аналогично: a, 0, 0, 0 ...

$\begin{array}{r}38\\+27\\\hline 65\end{array}$

$\begin{cases}x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}\\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0\end{cases}$; $x-6y=\sqrt{(x-6)y-1(x-6)}=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

1) $x\geq6$, $y\geq1$ 2) $x\leq6$, $y\leq1$

$x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)-38+20=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$ $(x-6)^2=2(9-(y-1)^2)=2(3-y+1)(3+y-1)=$
$=2(4-y)(y+2)$

$(x-6)^2+(y-1)^2=x^2-12x+36+y^2-2y+1=$

$-$ $+$ $-$
-2 4 y

$2R=3\sqrt5$; $9\cdot5=25+AC^2$ (45)
$AC=2\sqrt5$

1) $[1;4]$ или $(-2;1)$

$S_{ACB}=\frac{2\sqrt5\cdot5}{2}=5\sqrt5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x(y-1)-6(y-1)$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{(y-1)(x-6)}_{\geq 0} \Rightarrow \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \ (1) \end{cases}$$

$x \geq 6y$

$xy-6y-x+6$

(1) $(x-6)^2+2(y-1)^2 \underbrace{-2-36+20}_{-38}=0$ $\quad 2=2$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$(x-6)^2=2(9-(y-1)^2)$

$a-6b = x-6-6(y-1)=$

$=x-6-6y+6 = x-6y$

1) $\begin{cases} x-6=a \\ y-1=b. \end{cases}$ $\quad x-6y$

$ab \geq 0$

$a \geq 6b$

$D: b^2-4ac = 0-4(2b^2-18)=$

$-72-8b^2$

$$\begin{cases} a^2+2b^2-18=0 \ (1) \\ a-6b=\sqrt{ab} \ /^2 \end{cases}$$

2

$\times\begin{array}{r}36\\4\end{array}$

$144=12^2$

(2) $a^2+36b^2-12ab=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=(13b)^2-4\cdot 36b^2 = (\overset{b}{13b-12b})(\overset{25b}{13b+12b}) = 25b^2=(5b)^2$

$a= \dfrac{13b\pm 5b}{2}$ $\quad \left.\begin{array}{l} 1) \ a=9b \\ 2) \ a=4b \end{array}\right]$

1) (1) $a=9b$

$81b^2+2b^2-18=0$

$83b^2=18$

$b=\pm\sqrt{\dfrac{18}{83}}$

$a=\pm 9\sqrt{\dfrac{18}{83}}$

2) $a=4b$

$16b^2+2b^2-18=0$

$18b^2=18$

$b^2=1$

$b=\pm 1$

$a=\pm 4$

$\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} x=10 \\ y=2 \end{array}$

$\begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \end{array}$

$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt{\dfrac{18}{83}}+1 \\ x=\pm 9\sqrt{\dfrac{18}{83}}+6 \end{cases}$$

$16+2-18=0$. - истина

$10-12$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1 x $-$ $+$

$8x^2 - 6x - 7 =$

$\cancel{2(4x^2 - 3x}$

$b = 900 - 3a$ $\quad a \in \left(\frac{b}{3}; b\right)$

$a = \frac{900 - b}{3}$

$0 \quad \frac{b}{3} \quad b$

$b <$

$b < 3a$

$a < 300$

$900 - b \vdots 3$

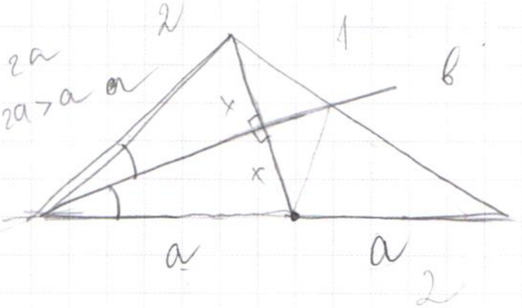
$900 \vdots 3$ $(b \vdots 3)$

$3a > b$

$\begin{cases} a > \frac{b}{3} \\ a < b \\ b > -a \end{cases}$

$P = 900 = 3a + b$

$\begin{cases} 3a > b \\ a + b > 2a \\ b + 2a > a \end{cases}$



$b = 900 - 3a = 3(300 - a)$

$\vdots 3$ $\quad \vdots 3$

$b = 3k$

$3a > b$

$2a + b > a$

$3a < 900$

$b < 900$

$2x = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{4a^2}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$

$b \vdots 3$

$3k = 900 - 3a$

$\begin{cases} b > a \\ b < 3a \end{cases}$

$k = 300 - a$

$\boxed{3a > b > a}$

$2\sqrt{2}\, x = \sqrt{b^2 - a^2}$

$b = 900 - 3a$

$a < 300$

$a = 100$

$a + k = 300$

$a + b > 2a$

$a < b$

$b = 600.$ $\quad 4a < 900$

$a < \frac{900}{4}$

$a < b$

$\begin{array}{r} 900 \\ \underline{8} \\ 10 \\ \underline{8} \\ 20 \end{array}$ $\quad \left|\begin{array}{l} 4 \\ \hline 225 \end{array}\right.$

$\exists\ a = b$, тогда

$4a < 900$

$a < 225$

$\begin{cases} a < 225 \\ a < b \end{cases}$

$k = 300 - a$

$k < 75$

$b \ge 2$

$a \ge 1$

$a \in [1; 225)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a \in \left(\frac{b}{3}; b\right)$

$a < 225$

$\boxed{3a + b = 900}$

$b = \frac{300}{a}$

$300 \vdots a$

$a < 300$

$a \vdots 3, \; 10, 2, 5, 6, 4, 3$

$300 \; | \; 2$

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19

9 шт

$a \in \frac{b}{3}$ $\quad b = \frac{300 \cdot 3}{b} = \frac{900}{b}$, $b^2 = 900$

$a \in b \quad b^2 = 300 \quad b^2 \in (300; 900)$

b

$b \quad b = 3k$

$3k = \frac{300}{a}$

$10 \cdot 10 = 7{,}5 \cdot 7{,}5 = 4 \cdot 25$

$k = \frac{100}{a}$ $\quad a: 2, 5, 4, 25$

$a = 2$ $\quad a = 5$; $k =$

$b = 60$

$k = 50$

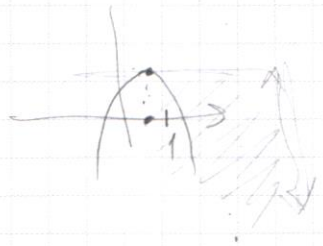
$150 = \frac{300}{2}$

$3k = 450$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$-8x^2 + 6x + 7 =$



$\frac{-b}{2a} = \frac{+6}{+19}$

$y_0 = -\frac{8 \cdot 36}{19^2} + \frac{36}{19} + 7 = \frac{36 \cdot 19 + 7 \cdot 19^2 - 8 \cdot 36}{\;} > 0$

$f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] \in [1; 11]$

$f(y) = \left[\frac{y}{2}\right] \in [1; 11]$

$22 \quad = 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{1}{2y}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + \underbrace{f\left(\frac{1}{y}\right)}_{=0} = f(x) < 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

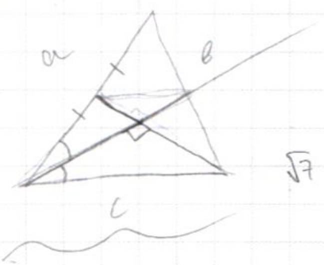
ШИФР

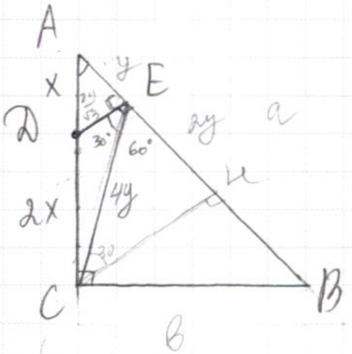
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$P = 900 = a+b+c$, где a, b, c – целые, полож

а)





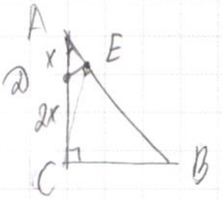
$a^2 = (3x)^2 + b^2$

$h = \frac{b+3x}{a}$

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$ с k: $\frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

$\frac{DE}{CH} = \frac{1}{3} = \frac{a \cdot DE}{b+3x}$

$DE = \frac{b+3x}{3a}$



$16y^2 = CH^2 + 4y^2$

$CH^2 = 12y^2$

$CH = \sqrt{12}\,y$

$26 \cdot 3 = 78$

$\frac{2}{39}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt3}{2}$

$DE = \frac{CH}{3}$

$DE = \sqrt{\frac{12}{9}}\,y = \sqrt{\frac{4}{3}}\,y = \frac{2y}{\sqrt3}$

$tg\, 60° = \cancel{\frac{1}{2\cdot\sqrt3}}$

б) $AC = \sqrt7 \Rightarrow AD = \frac{\sqrt7}{3}$; $DC = \frac{2\sqrt7}{3}$

$S_{CED} = ?$

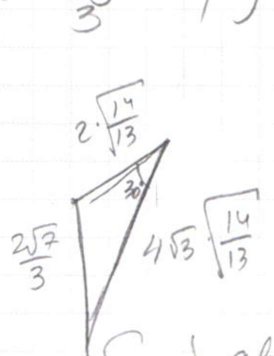
В $\triangle CED$ по т. cos: $\overset{28}{\frac{4\cdot7}{9}} = \left(\frac{2y}{\sqrt3}\right)^2 + \overset{16y^2}{(4y)^2} - \overset{8y^2}{\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt3}{\cancel{2}}\cdot 4y\cdot\frac{2y}{\sqrt3}}$

$\frac{28}{9} = \frac{4y^2}{3} + 16y^2 - 8y^2 = \frac{4y^2 + 24y^2}{3} = \frac{26y^2}{3} \quad |\cdot 9$

$28 = 26y^2 \cdot 3 = 78y^2$

$14 = 39y^2$

$y = \sqrt{\frac{14}{39}} = \sqrt{\frac{2\cdot7}{3\cdot13}} = \sqrt{\frac{14}{13}}\cdot\sqrt3$



$S = \frac12 ab\sin\alpha =$

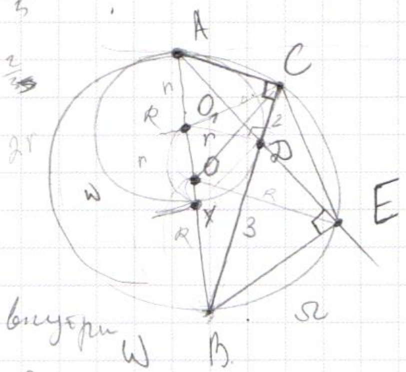
$4y =$ $\quad \frac{2y}{\sqrt3} =$ $\quad = \frac12 \cdot \frac12 \cdot 2\sqrt{\frac{14}{13}} \cdot \sqrt{\frac{14}{13}} \cdot 4\sqrt3 =$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{11}{30}$ $\frac{13}{35}$ $\frac{35}{11}$ $\frac{3}{11}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{35}$

R, R_1



$2R$

$9 = AB \cdot BX = AB \cdot (R-r) = 2R(2R-2r) = 4R(R-r)$

$\frac{O_1D}{O_1C} = \frac{DB}{O_1B}$; $\frac{2}{\sqrt{4+r^2}} = \frac{3}{2R-r}$

$O_1B = 2R-r$

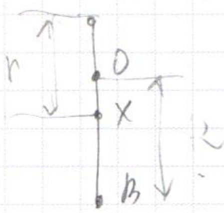
1) центр Ω внутри ω

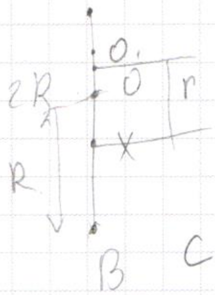
$BX = R-r$ $\quad O_1C = \sqrt{4+r^2}$

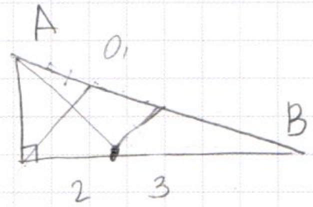
$3\sqrt{4+r^2} = 2(2R-r)$

$9 = 4R(R-r)$

$36 - 16 \cdot 9$







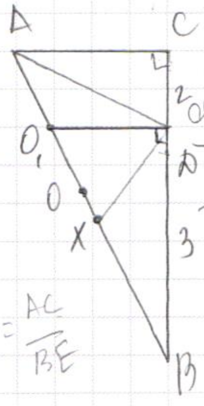
$9 = 4R^2 - 4Rr$

$r = \frac{4R^2-9}{4R} = R - \frac{9}{4R}$

$BX = AB - AX = 2R - 2r$

$3\sqrt{4 + \frac{(4R^2-9)^2}{(4R)^2}} = 2\left(2R - \frac{4R^2-9}{4R}\right)$

$O_1B = AB - AO_1 =$



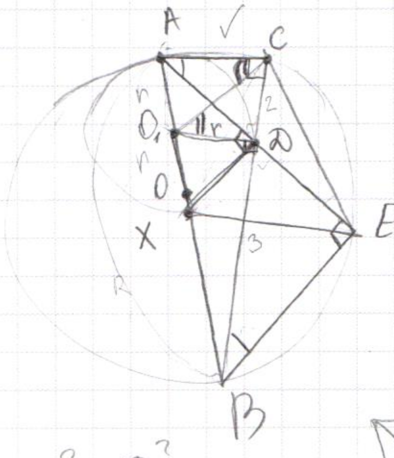
$9(4+r^2) = 4(4R^2 + r^2 - 4Rr) =$

$= 4(4R^2 - 4Rr + r^2) = 4(9 + r^2)$

$\frac{2}{DE} = \frac{AC}{BE}$

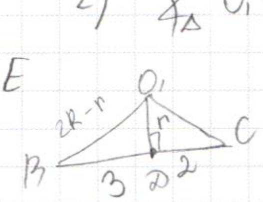
$\cancel{36} + 9r^2 = \cancel{36} + 4r^2$

$r = 0$



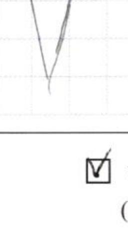
1) $9 = AB \cdot BX = 2R \cdot (2R - 2r) = 4R(R-r) = 4R^2 - 4Rr$

2) $\triangle O_1CB$



$(2R-r)^2 = 9 + r^2$

$4R^2 + r^2 - 4Rr = 9 + r^2$



$AD^2 + XD^2 = 4r^2$

$4R^2 = 25 + AC^2$; $AC^2 = 4R^2 - 25$

$AD^2 = 4R^2 - 25 + 4 = 4R^2 - 21$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c - последов. члены геом. пр., значит $b = a\cdot q$; $c = a\cdot q^2$

] 4-ый член прогрессии $= x$, он является корнем $ax^2 - 2bx + c = 0$, значит его можно подставить и равенство будет выполняться, также можно подставить числа a, b, c

$ax^2 - 2\cdot aqx + aq^2 = 0$

т.к. x - 4ый чл. геом. пр., то $x = a\cdot q^3$

$a\cdot(aq^3)^2 - 2aq\cdot aq^3 + aq^2 = 0$

$a^3q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

1. если $a=0$, то это не будет геом. пр. (посл: 0, 0, .. 0)
2. аналогично если $q=0$, то посл: $a, 0, 0 \ldots\ldots 0$
3. $\begin{cases} a\neq 0 \\ q\neq 0 \end{cases}$

$a^3q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0 \quad |: aq^2 \neq 0$

$a^2q^4 - 2aq^2 + 1 = 0$

$(aq^2 - 1)^2 = 0$

$aq^2 = 1 = c$ ← третий член прогрессии

Ответ: 1

№2

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \quad (2) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \quad (1) \end{cases}$

(*) $xy - 6y - x + 6 \geq 0$

$(y-1)(x-6) \geq 0$

\# т.к. пр. часть (2) всегда ≥ 0, то $x - 6y \geq 0$

(1): $x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 18 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

] $x - 6 = a$; $y - 1 = b$, тогда $x - 6y = a - 6b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \quad (3) \\ a^2+2b^2-18=0 \quad (4) \end{cases}$$

(3): $ab \geq 0$; $a-6b \geq 0$, тогда можно возвести в кв-т л.ч. и пр.ч:

$$a^2+36b^2-12ab=ab$$

$$a^2+36b^2-13ab=0$$

D: $(13b)^2-4\cdot 36b^2=(13b-12b)(13b+12b)=25b^2$

$a=\dfrac{13b\pm 5b}{2}$; $\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$

1) $a=4b$; $ab\geq 0$

$\begin{cases} 4b^2\geq 0 \leftarrow \text{истина} \\ 4b-6b\geq 0 \end{cases}$ $-2b\geq 0 \Rightarrow b\leq 0 \Rightarrow a\leq 0$

подставляем $a=4b$ в (4): $16b^2+2b^2-18=0$; $18b^2=18$; $b=\pm 1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases} \text{— не подходит т.к. по усл 1) } a;b\leq 0 \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \text{— подходит} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$

2) $a=9b$; $ab\geq 0$

$\begin{cases} 9b^2\geq 0 \leftarrow \text{истина} \\ 9b-6b\geq 0 \end{cases}$; $3b\geq 0$; $b\geq 0 \Rightarrow a\geq 0$

подставляем $a=9b$ в (4): $81b^2+2b^2-18=0$; $83b^2=18$; $b=\pm\sqrt{\dfrac{18}{83}}$,

учитывая усл, что $b\geq 0$: $b=\sqrt{\dfrac{18}{83}}$, тогда $a=9\sqrt{\dfrac{18}{83}}$

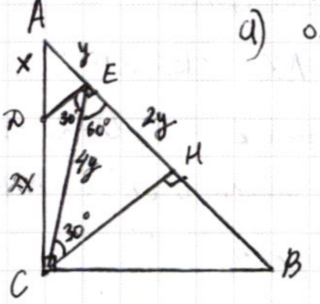
$$\begin{cases} x=9\sqrt{\dfrac{18}{83}}+6 \\ y=\sqrt{\dfrac{18}{83}}+1 \end{cases}$$

Ответ: $(2;0)$; $\left(9\sqrt{\dfrac{18}{83}}+6;\ \sqrt{\dfrac{18}{83}}+1\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:
$\triangle ABC$ - пр. уг.
AC - катет
AB - гип.
$D \in AC$; $E \in AB$
$AD : AC = 1:3$
$DE \perp AB$
$\angle CED = 30°$
а) $tg \angle BAC$ - ?
б) $AC = \sqrt{7}$
S_{CED} - ?



а) о. ∃ $AD = x$, тогда т.к. $x : AC = 1:3 \Rightarrow AC = 3x \Rightarrow DC = 2x$
$x > 0$

1. Проведем CH - высоту на AB ($CH \perp AB$)
$H \in AB$

2. т.к. $\angle DEC = 30°$, $\angle DEH = 90$ | $\angle CEH = 60°$

т.к. $\angle CHE = 90°$, $\angle CEH = 60°$ | $\angle ECH = 30°$ | $\frac{CE}{EH} = 2$

3. $DE \perp AB$, $CH \perp AB$, $\angle CAB$ - общ. | $DE \parallel CH$, $\angle CAB$ - общ. | $\triangle ADE \sim \triangle AHC$ (по трем углам)

4. $DE \parallel CH$ (п.3)
$AD : DC = x : 2x = 1:2$ | $AE : EH = 1:2$

5. ∃ $AE = y \Rightarrow$ т.к. $AE : EH = 1:2$, то $EH = 2y$; $y > 0$

6. $\frac{CE}{EH} = 2$ (п.2), $EH = 2y$ | $CE = 4y$

7. ∡ $\triangle CEH$ - пр-уг; по т. Пифагора:
$16y^2 = 4y^2 + CH$; $CH = \sqrt{12}\, y$

8. из п.3: $\triangle ADE \sim \triangle AHC$

$K = \frac{AE}{AH} = \frac{AE}{AE + EH} = \frac{y}{y + 2y} = \frac{1}{3} = \frac{DE}{CH}$; $DE = \frac{CH}{3} = \sqrt{\frac{12}{9}}\, y = \frac{2y}{\sqrt{3}}$

9. ∡ $\triangle ADE$ - прямоуг: $tg \angle ADE = \frac{DE}{AE} = \frac{2y}{\sqrt{3} \cdot y} = \frac{2}{\sqrt{3}} = tg \angle BAC$

б) 10. $AC = \sqrt{7}$; $DC = \frac{2}{3} AC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

∡ $\triangle CED$: по т. cos : $CD^2 = DE^2 + CE^2 - 2 \cdot DE \cdot CE \cdot \cos \angle CED$;

$\frac{4 \cdot 7}{9} = \left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)^2 + (4y)^2 - \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot 4y \cdot \frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{4y^2}{3} + 16y^2 - 8y^2 = \frac{28y^2}{3}$ | $\cdot 9$

$28 = 28y^2 \cdot 3$; $y^2 = \frac{1}{3}$; т.к. $y > 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow DE = \frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$;

$CE = 4y = \frac{4}{\sqrt{3}}$

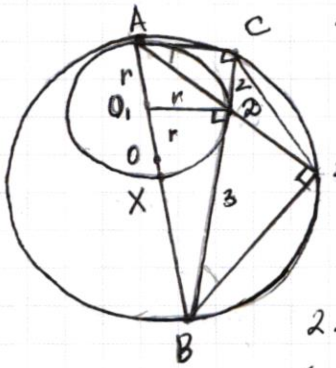
11. $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EC \cdot \sin \angle DEC = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

№5

Дано:
Ω, ω - окр, кас. внутр.
AB - диам Ω
$\Omega > \omega$
BC - хорда Ω
BC кас $\omega = D$
$AD \cap \Omega = E$
$CD = 2$
$BD = 3$
Найти: радиусы, S_{BACE} - ?

] r - радиус ω; R - радиус Ω, O_1 - центр ω, O - центр Ω



1. $\angle$ окр ω: BC - кас, AB - секущ.

$BD^2 = AB \cdot BX = 9 = 2R \cdot 2(R-r) = 4R(R-r)$

$X = AB \cap \omega$

$AB = 2R$ - диаметр

$BX = 2R - AX = 2R - 2r$

2. BC - касательная к $\omega \Rightarrow O_1D = r \perp BC$

$\angle ACB$ - опир. на диаметр $\Omega \Rightarrow \angle ACB = 90°$

т.о. $\angle ACD = \angle O_1DB$ | $\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$ (по трём углам)
$\angle ABC$ - общ

$k = \frac{5}{3} = \frac{AB}{O_1B} = \frac{2R}{2R-r} = \cancel{1 + \frac{1}{2R-r}}$; $\cancel{\frac{2}{3} = \frac{1}{2R-r}}$; $\cancel{4R - 2r = 3}$; $\cancel{2r = 4R-3}$

$r = 2R - \frac{3}{2}$

3. ~~(из п.1 и п.2)~~

$\cancel{\begin{cases} 2R(2R-2r) = 9 \\ 2r = 4R-3 \end{cases}}$ $\cancel{2R(2R-4R+3) = 9}$

$\cancel{-4R^2 + 6R = 9}$; $4R^2 - 6R + 9 = 0$

$6R = 10R - 5r$; $4R = 5r$; $r = \frac{4R}{5}$

3. $r = \frac{4R}{5}$ | $4R^2 - \frac{16R^2}{5} - 9 = 0$; $\frac{20R^2 - 16R^2}{5} = 9$; $4R^2 = 45$
$9 = 4R^2 - 4Rr$

$R^2 = \frac{45}{4}$, $R > 0$

$R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$,

тогда $r = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3\sqrt{5}}{\cancel{5}_{\sqrt{5}} \cdot \cancel{2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

4. $2R = 3\sqrt{5}$, по т. Пифагора для $\triangle ACB$: $9 \cdot 5 = 25 + AC^2$; $AC = 2\sqrt{5}$

5. AC - высота в $\triangle ADB$; $S_{ADB} = AC \cdot BD \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 3\sqrt{5}$

6. $S_{ACB} = AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} \cdot 5 = 5\sqrt{5}$

7. $S_{ACD} = S_{ACB} - S_{ADB} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

8. $\angle ACD = \angle DEB = 90°$ | $\triangle ACD \sim \triangle BDE$ (по трём углам); $k = \frac{2}{3}$
$\angle ADC = \angle BDE$ (верт)

$\frac{S_{ACD}}{S_{BDE}} = k^2 = \frac{4}{9} = \frac{2\sqrt{5}}{S_{BDE}}$; $S_{BDE} = \frac{9\sqrt{5}}{2}$

9. т.к. $ACEB$ - вписанный $\Rightarrow$ $\angle BAD = \angle BCE$

10. $\angle BAD = \angle BCE$ | $\triangle ADB \sim \triangle CDE$ (по трём углам) $k = \frac{3}{2}$
$\angle ADB = \angle CDE$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{S_{ADB}}{S_{CDE}} = k^2 = \frac{9}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{S_{CDE}};\ S_{CDE} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

11. $S_{ABEC} = S_{ADC} + S_{CDE} + S_{BDE} + S_{ADB} = 2\sqrt{5} + \frac{4\sqrt{5}}{3} + \frac{9\sqrt{5}}{2} + 3\sqrt{5} =$

$= \frac{12\sqrt{5} + 8\sqrt{5} + 27\sqrt{5} + 18\sqrt{5}}{6} = \frac{65\sqrt{5}}{6}$

Ответ: радиус $\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; радиус $\omega = \frac{6}{\sqrt{5}}$; $S_{BACE} = \frac{65\sqrt{5}}{6}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)