

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N1 \quad a = b_1$$

$$b = b_1 \cdot q$$

$$c = b_1 \cdot q^2$$

Нужно найти: $b_1 \cdot q^2$

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$b_1 x^2 + 2b_1 q x + b_1 q^2 = 0 \quad (:\cdot b_1 \neq 0)$$

$$x^2 + 2qx + q^2 = 0$$

$$(x+q)^2 = 0 \Rightarrow x+q=0$$

$$x = -q, \text{ но } x = b_1 \cdot q^3 \Rightarrow -q = b_1 \cdot q^3 \quad (:\cdot q \neq 0)$$

$$\underline{-1 = b_1 \cdot q^2}$$

Если $b_1 = 0$, то и $b_1 \cdot q^2 = 0$

Если $q = 0$, то и $b_1 \cdot q^2 = 0$

Ответ: -1 или 0

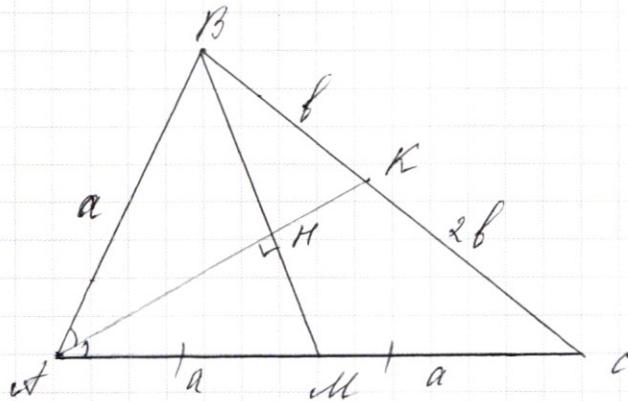


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.



1) в $\triangle AMB$: AM -высота и бисс. $\Rightarrow \triangle ABM$ -р/д \Rightarrow
 $\Rightarrow AM = AB$

Пусть $AM = a \Rightarrow M = a = AB$.

2) По св-ву бисс. $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow KC = 2BK$.

Пусть $BK = b \Rightarrow KC = 2b$

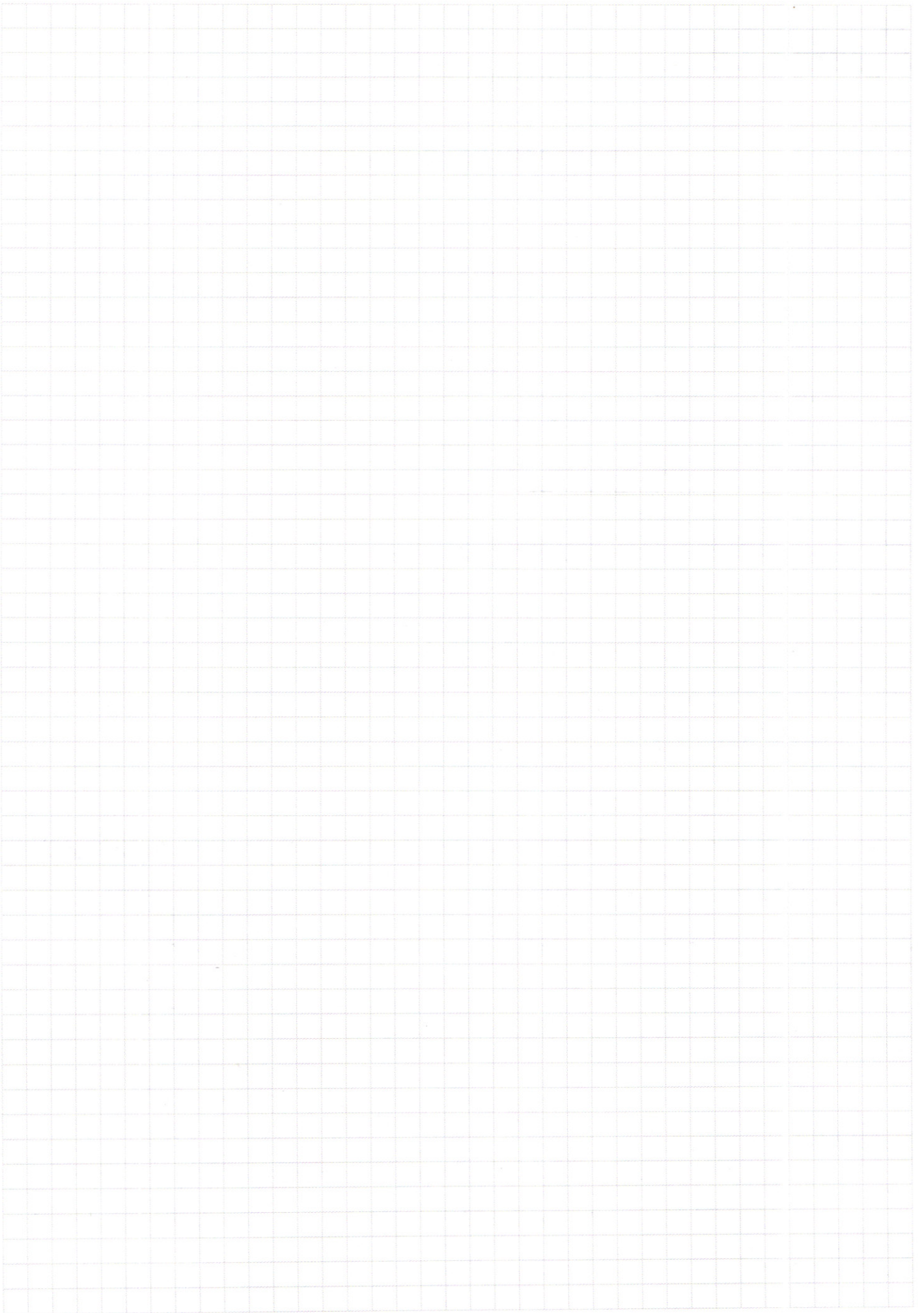
$$P = 3a + 3b = 400$$

$a + b = 400$, но должно выполняться неравенство Δ :

$$\begin{cases} 2a < 3b + a \\ a < 2a + 3b \\ 3b < 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 3b \\ -a < 3b \\ b < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 3b \\ b < a \end{cases}$$

$$a = 400 - b, \text{ тогда имеем } \begin{cases} 400 - b < 3b \\ b < 400 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 400 < 4b \\ 2b < 400 \end{cases}$$

$\begin{cases} b > 100 \\ b < 200 \end{cases} \Rightarrow b \in [101; 199]$ и пробегает ~~все~~ целые значения
Поскольку a выражается через b , то для каждого значения b есть значение a , но a и b зададут $\Delta \Rightarrow$
количество $\Delta =$ количеству $b \Rightarrow$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Количество троек = $199 - 101 + 1 = \underline{99}$

Ответ: 99

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{x(y-2) - (y-2)} \\ 2x^2 - 4x + 2 - 2 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases} \quad \text{Введём замену } \begin{cases} x-1=a \\ y-2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a+1 \\ y=b+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2-2a-2 = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-2a = \sqrt{ab} \\ b^2 + 2a^2 = 3 \end{cases} \quad \text{Введём}$$

$$\text{Введём } b^2 - 4ab + 4a^2 = ab$$

$$b^2 - 5ab + 4a^2 = 0$$

$$D = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$$

$$b_1 = \frac{5a - 3a}{2} = a \Rightarrow a^2 + 2a^2 = 3 \quad 3a^2 = 3 \quad a^2 = 1 \quad a = \pm 1$$

$$b_2 = \frac{5a + 3a}{2} = 4a \quad 16a^2 + 2a^2 = 3 \quad 18a^2 = 3 \quad 6a^2 = 1 \quad a^2 = \frac{1}{6}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Если $a=1$, то $b=1 \Rightarrow 1-2 = \sqrt{1}$ - неверно

Если $a=-1$, то $b=-1 \Rightarrow -1-2 = \sqrt{1}$ - верно

Если $a = \frac{\sqrt{6}}{6}$, то $b = 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ - неверно

Если $a = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, то $b = -\frac{4\sqrt{6}}{6}$ - неверно

$$-\frac{4\sqrt{6}}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\dots} \text{ - неверно}$$

Если $a = \frac{\sqrt{6}}{6}$, то $b = \frac{4\sqrt{6}}{6}$

$$\frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \text{ - верно}$$

\Rightarrow имеем пары

$$\left(\begin{matrix} -1 \\ a \end{matrix} ; \begin{matrix} -1 \\ b \end{matrix} \right) ; \left(\begin{matrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a \end{matrix} ; \begin{matrix} \frac{4\sqrt{6}}{6} \\ b \end{matrix} \right)$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

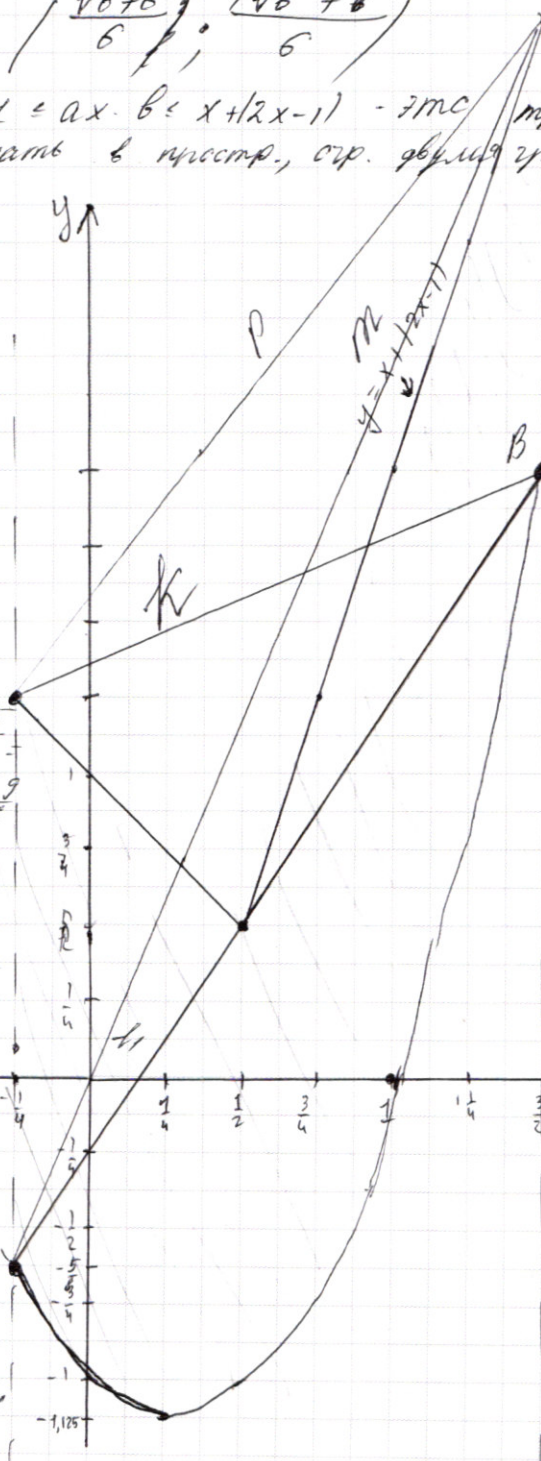
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $x = -1 + 1$ или $x = +\sqrt{6} + 1$
 $y = -1 + 2$ $y = \frac{4\sqrt{6}}{6} + 2$

Ответ: $(0; 1); (\frac{\sqrt{6}+6}{6}; \frac{4\sqrt{6}+6}{6})$

№ 6 Пусть $2x^2 - x - 1 = ax \cdot b \in x + (2x - 1)$ - это три функции.
 Тогда $ax + b$ будет лежать в плоск., стр. двумя графиками.

$2x - 1 > 0: x + 2x - 1 = 3x - 1$
 $2x - 1 < 0: -x + 1$
 $x = \frac{1}{3}$
 $y = 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$
 $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$
 или $x = 1$ $x = -\frac{1}{2}$
 $y(\frac{1}{3}) = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2$
 $y(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$
 одинак $v_1 = \frac{0,5 + 0,625}{0,75} = \frac{1,125}{0,75} = 1,5$
 одинак $v_2 = \frac{1,5}{1} = 1,5$
 $\frac{9}{6} = \frac{9}{6} \Rightarrow v_1 \text{ совпадает } v_2$

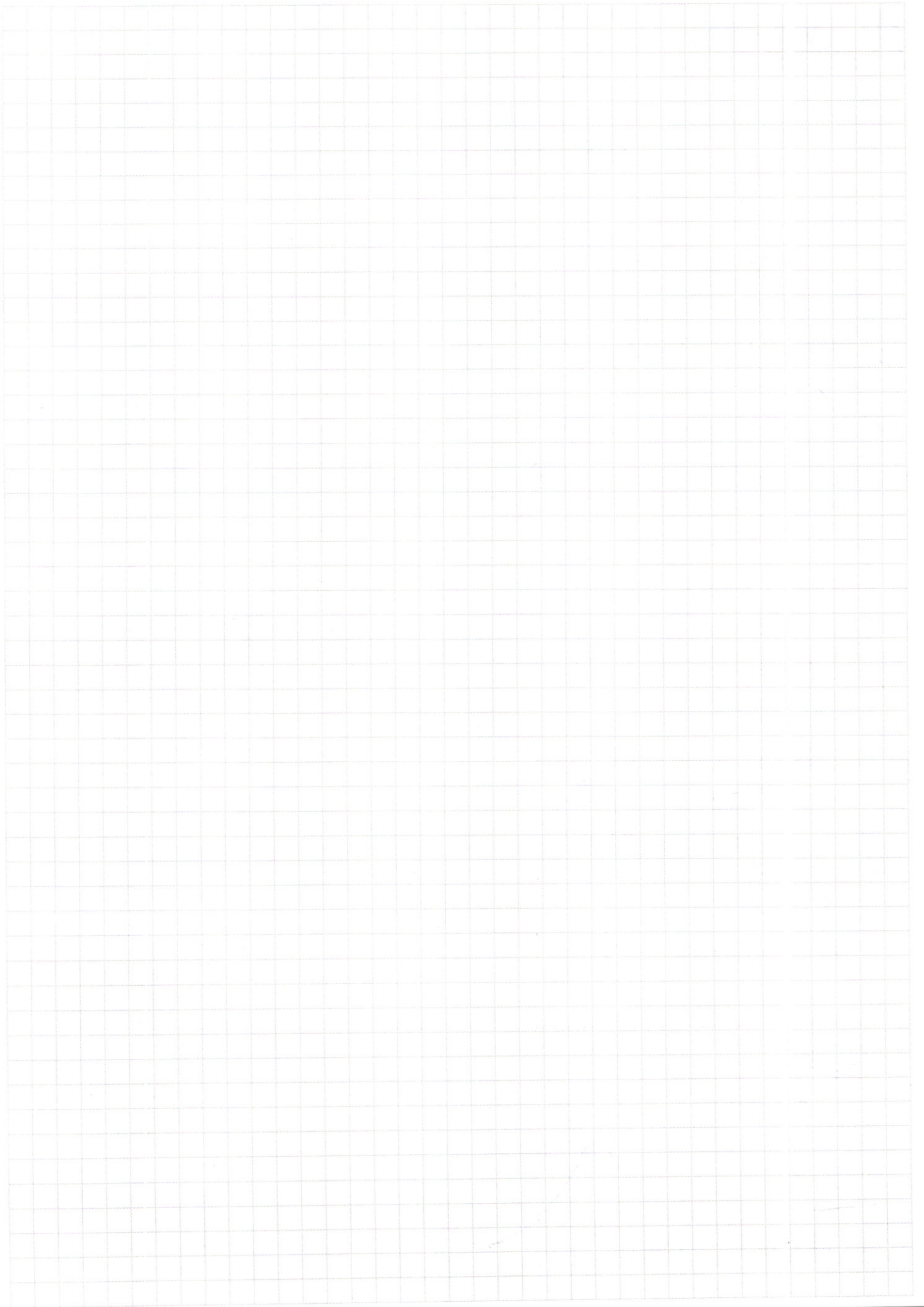


При уменьшении угла наклона l к оси абсцисс, т.е. $a \in (1, 5; 3)$ будет двигаться вверх параболы $y = x + (2x - 1)$ будет выше $y = 2x^2 - x - 1$ или A и B будут двигаться по $x = \frac{3}{2}$ и $x = -\frac{1}{4}$. Если m l лежит в обл., то y идет ниже или выше параболы, если A или B ниже параболы, то наруш. усл. Если A выше области, то B ниже параболы, то наруш. усл.

$\Rightarrow a = 1,5$
 $2 = 1,5 \cdot 1,5 + b$
 $2 = 2,25 + b$
 $b = -0,25$

Дальше справа!

При уменьшении b т. А и В будут двигаться параллельно перпендикулярно. т. А и В могут оказать выше или ниже параболы. Если А и В движутся \rightarrow



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

по $x = -\frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{2}$ в области, то прямая обязательно
будет выходить из области (это видно из крайних
значений k , m и p) \Rightarrow найдем условие.

Случай $a=0$ и $b=0$ не интересен. ведь при $x = \frac{3}{2} y = 0$,
а это за область. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то имеем кривую
 $a = 0$ $b \neq 0$ $y = \cos \theta t$,

но нет таких областей, где пр. \parallel Sx лежала бы в области ^{нужна}

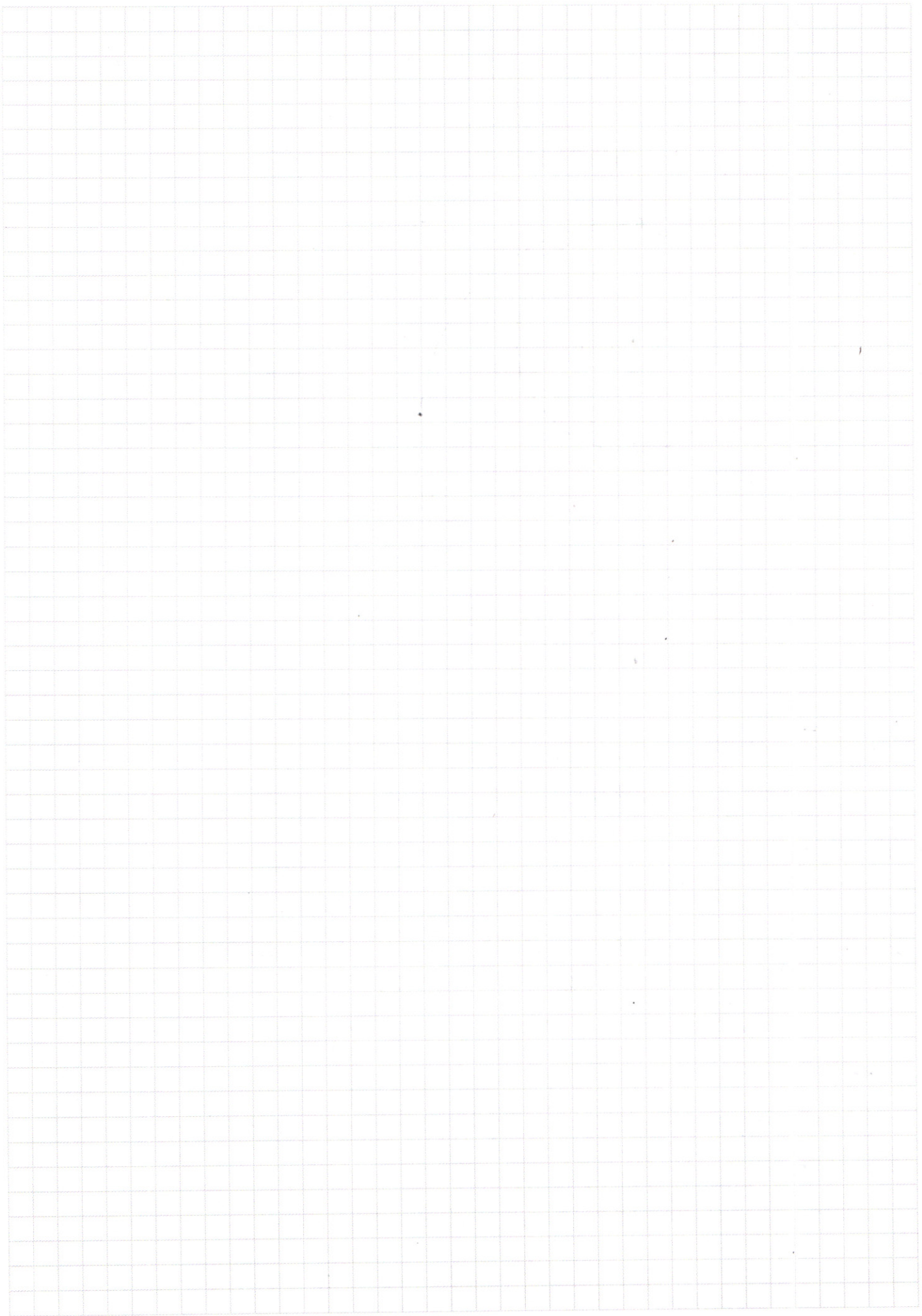
Если $a \neq 0$ и $b = 0$, то имеем прямую из нач. коорд,
для кот. такое условие не выполнимо $\Rightarrow a = 1,5$ $b = -0,25$
единств.

Ответ: $a = 1,5$; $b = -0,25$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

OB из $\triangle OAB = \sqrt{9+r^2}$, но $AB = OA + OB = r + \sqrt{9+r^2}$

из $\triangle ACB$: $AB = \sqrt{\frac{16}{9}r^2 + 16}$

$(r + \sqrt{9+r^2})^2 = \frac{16}{9}r^2 + 16$

$r^2 + 9 + r^2 + 2r\sqrt{9+r^2} = \frac{16}{9}r^2 + 16$

$2r\sqrt{9+r^2} = \frac{16}{9}r^2 - 2r^2 + 7$

$2r\sqrt{9+r^2} = 7 - \frac{2r^2}{9}$

$4r^2(9+r^2) = 49 - 2 \cdot 7 \cdot \frac{2r^2}{9} + \frac{4r^4}{81}$

$36t + 4t^2 = 49 - \frac{28t}{9} + \frac{4t^2}{81}$

$36 \cdot 81t + 81 \cdot 4t^2 = 49 \cdot 81 - 28 \cdot 9t + 4t^2$

$80t + 36 \cdot 81 + 28 \cdot 9t - 49 \cdot 81 = 0$

$80t + \frac{9(36 \cdot 9 + 28)}{324}t - 49 \cdot 81 = 0$

$18r\sqrt{9+r^2} = 63 - 2r^2$

$324r^2(9+r^2) = 63^2 + 4r^2 - 9 \cdot 63 \cdot r^2$

$9 \cdot 324r^2 + 324r^4 = 63^2 + 4r^4 - 252r^2$

$320r^4 + r^2(9 \cdot 324 + 252) - 63^2 = 0$

$320t^2 + t(9 \cdot 352) - 63^2 = 0$

$D = 81 \cdot 352^2 + 320 \cdot 4 \cdot 63^2 = 9^2 \cdot 123904 + 320 \cdot 4 \cdot 9^2 \cdot 7^2 =$

$t_1 = \frac{-9 \cdot 352 + \sqrt{a}}{640}$ $9^2 \cdot (123904 + 1280 \cdot 49) = a$

$t_2 = \frac{-9 \cdot 352 - \sqrt{a}}{640}$

Записалась в счете.

из $\triangle ABC$ по формуле косинусов

BM

352
x 352

704
+ 1760
1056

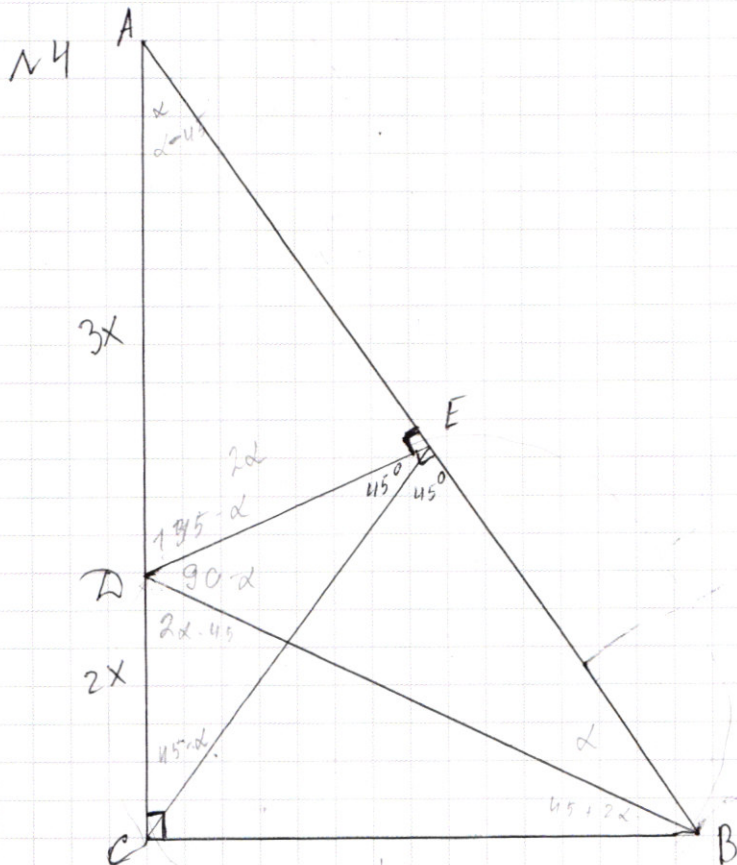
123904



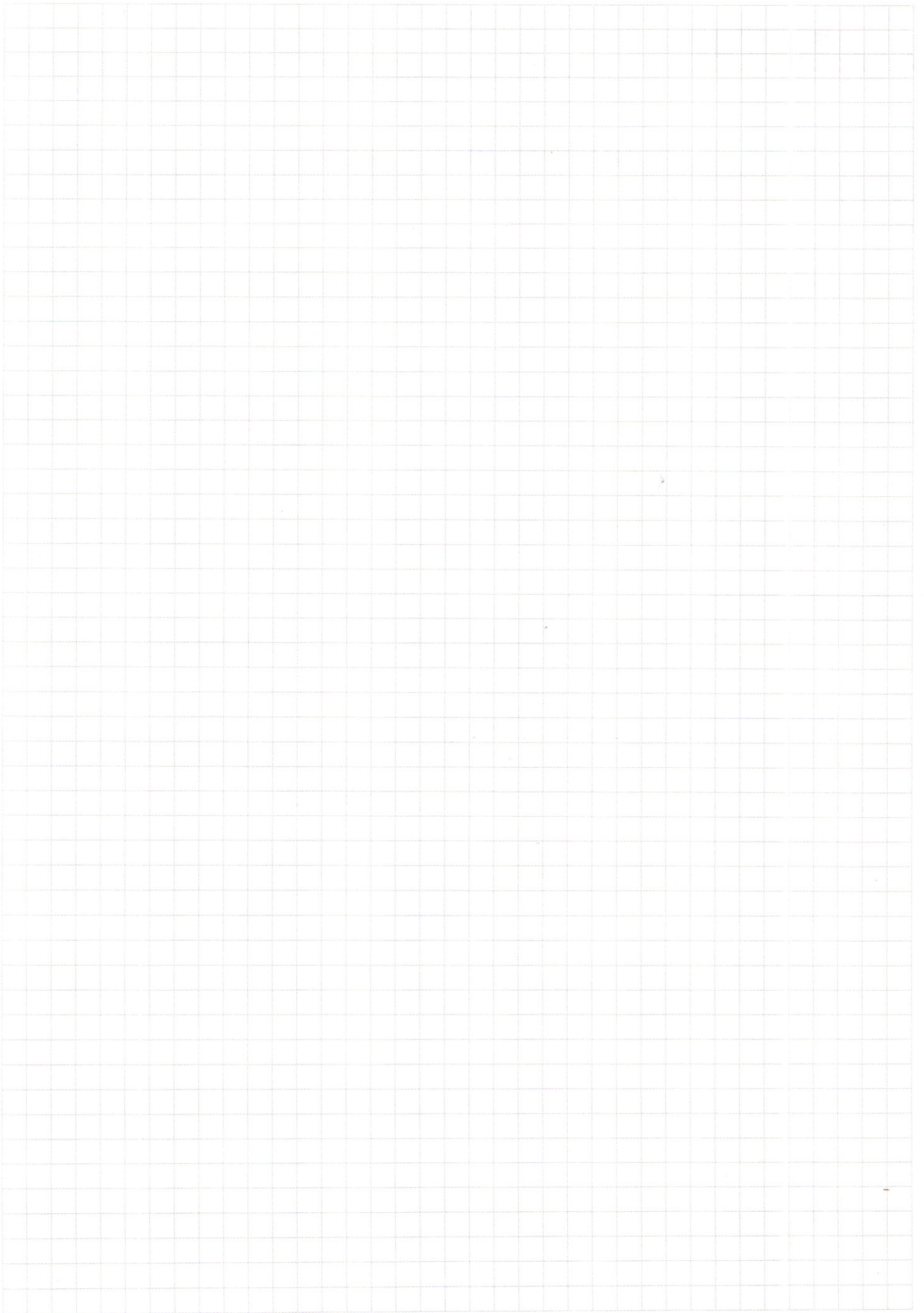
черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle DCB = \angle DEB \Rightarrow$ \exists ω $\text{окколо } DEBC \Rightarrow \overset{\sim}{\angle C} = 90^\circ$, 1
90°



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Top Left:**

$$2x^2 - x - 1 \quad x_1 = \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1$$
- Top Right:**

$$2x - 1 > 0 \quad x > \frac{1}{2}$$

$$\begin{matrix} x+2x-1 \\ 3x-1 \\ -x+1 \end{matrix}$$
- Center:** A coordinate system with a curve and several lines. The y-axis has marks at $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{4}$. The x-axis has marks at $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}$. A line is labeled $x - \frac{1}{2} = 1.5x - 3.1 = y - \frac{1}{2}$.
- Left Side:**

$$3x$$

$$2x$$

$$3 - 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} = 3.5$$
- Right Side:**

$$\sqrt{9+r^2+r} = \frac{16}{9}r^2 + 16$$

$$9+r^2+r+2r\sqrt{9+r^2} = \frac{16}{9}r^2 + 16$$

$$9+2r^2+2r\sqrt{9+r^2} = \frac{16}{9}r^2 + 16$$

$$2r\sqrt{9+r^2} = \frac{16r^2}{9} - 2r^2 + 7$$

$$2r\sqrt{9+r^2} = \frac{16r^2}{9} - 2r^2 + 7$$

$$2r^2 \quad 4r^2(9+r^2) =$$

$$b^2 - 5ab + 4a^2 = 0$$

$$D = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$$

$$b_1 = \frac{5a + 3a}{2} = 4a$$
- Bottom Left:**

$$2a^2 + b^2 = 3$$

$$b - 2a = \sqrt{ab}$$

$$2a^2 + b^2 = 3$$

$$b^2 - 4ab + a^2 = -ab$$

$$2b^2 - 5ab = 0$$
- Bottom Center:**

$$D = 25a^2 - 4a^2 = 21a^2$$

$$b_1 = \frac{5a - a\sqrt{21}}{2}$$

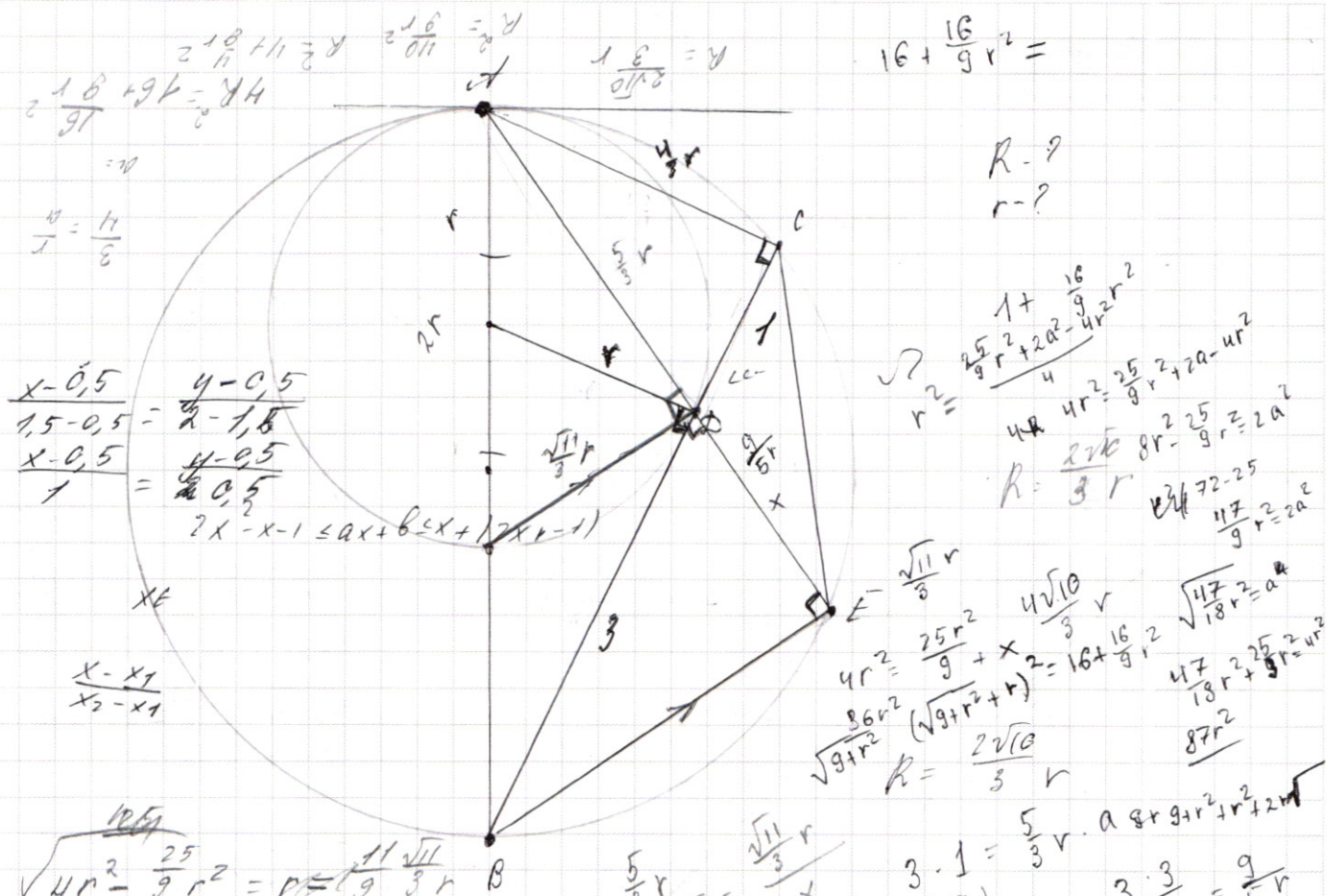
$$b_2 = \frac{5a + a\sqrt{21}}{2}$$
- Bottom Right:**

$$2a^2 + b^2 = 3$$

$$\sqrt{ab} = b - 2a$$

$$a = x - 1 \quad x = a + 1$$

$$b = y - 2 \quad y = b + 2$$



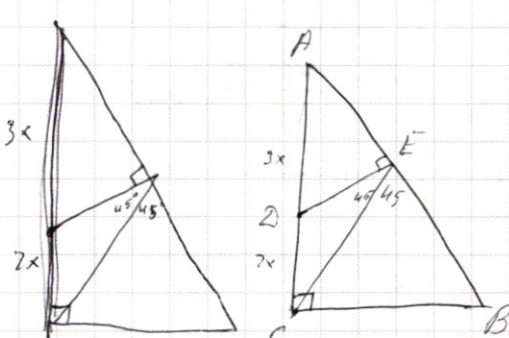
$$\frac{x-0,5}{1,5-0,5} = \frac{y-0,5}{2-1,5}$$

$$\frac{x-0,5}{1} = \frac{y-0,5}{0,5}$$

$$2x - x - 1 \leq ax + b \leq x + 1 \quad (x > -1)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\sqrt{4r^2 - 9r^2} = r = \frac{11\sqrt{11}}{9 \cdot 3r} B$$



$$2A \sqrt{\frac{9+16r^2}{9}} \cdot x = 3$$

$$\frac{x-0,5}{-4-0,5} = \frac{y-0,5}{-5-0,5}$$

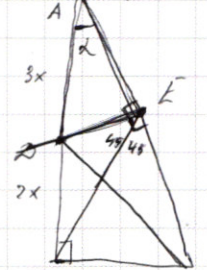
$$\frac{x-0,5}{-\frac{3}{4}} = \frac{y-0,5}{-\frac{9}{8}}$$

$$4R^2 = \frac{16}{9}r^2 + 16$$

$$R = \sqrt{\frac{4}{9}r^2 + 4}$$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{CB}{AB}$$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{CB}{AC}$$



$$1 + \frac{1}{9}x^2 = \cos^2 x$$

$$\cos \alpha = \frac{AE}{3x} = \frac{5x}{AB}$$

$$\sqrt{9 - \frac{81}{25r^2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 25r^2 - 81}{25r^2}}$$

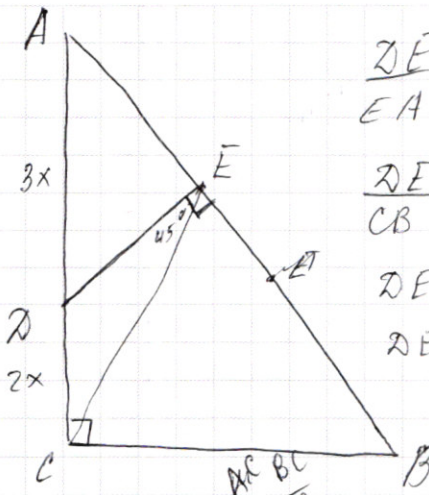
$$\sqrt{\frac{9(25r^2 - 9)}{5r}} = \frac{3\sqrt{25r^2 - 9}}{5r}$$

$$\frac{160}{9r} = \frac{9(25r^2 - 9)}{25r^2} + \left(\frac{5r}{3} + \frac{9}{5r}\right)^2$$

$$\frac{160}{9r^2} = \frac{9(25r^2 - 9)}{25r^2} + \frac{25r^2 + 27}{15r}$$

$$\sqrt{\frac{16r^2}{9} + 16} = \sqrt{\frac{16}{9}r^2 + 1} \cdot \frac{4\sqrt{r^2 + 1}}{3}$$

$\text{tg}(\alpha - 45)$



$$\frac{DE}{EA} = \frac{CB}{AC}$$

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + 12x - 1$$

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC}$$

$$y - 2x = \sqrt{x(y-2)} - (y-2)$$

$$DE \cdot AC = AE \cdot CB$$

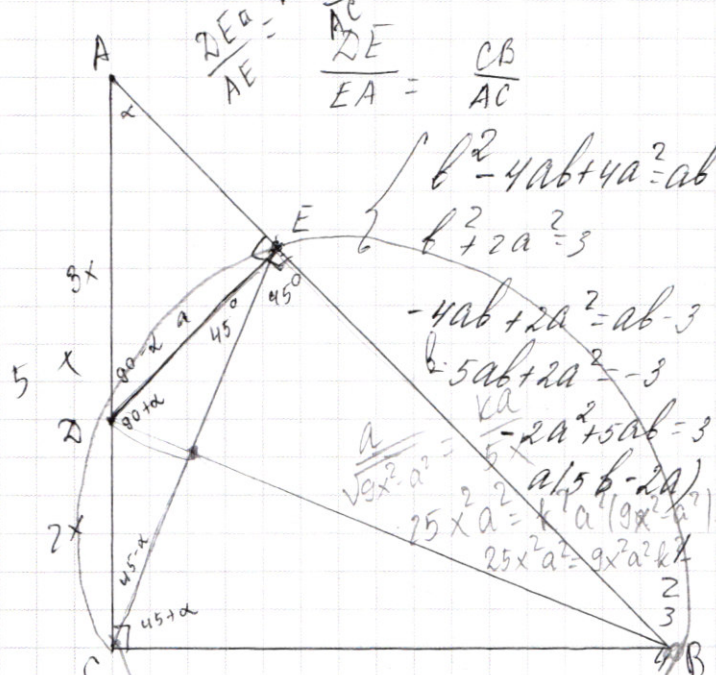
$$y - 2x = \sqrt{(y-2)(x-1)}$$

DE

$$2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$2(x^2 - 2x + 1) - 2 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + 3 = 0$$

$$(2(x-1))^2 + (y-2)^2 = 3$$



$$\frac{2EA}{AE} = \frac{AC}{DE} = \frac{CB}{EA}$$

$$b^2 - 4ab + 4a^2 = ab$$

$$b^2 + 2a^2 = 3$$

$$-4ab + 2a^2 = ab - 3$$

$$b^2 - 5ab + 2a^2 = -3$$

$$-2a^2 + 5ab = 3$$

$$\frac{a}{\sqrt{5x^2 a^2}} = \frac{1}{5x}$$

$$25x^2 a^2 = 5x^2 a^2 (9x^2 + 2)$$

$$25x^2 a^2 = 9x^2 a^2 + 2x^2$$

$$16x^2 a^2 = 2x^2$$

$$8a^2 = 1$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

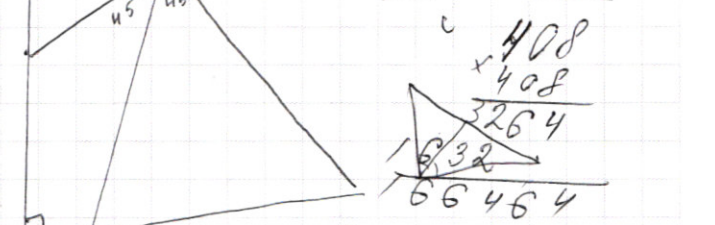
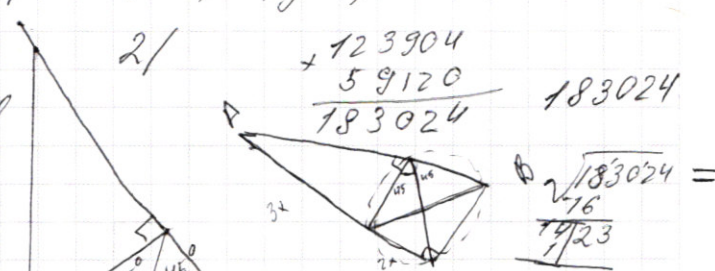
$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



$$(2(x-1))^2 + (y-2)^2 = 3$$

$$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$2u + v^2 = 3$$

$$a - b = \sqrt{ab}$$

$$2b^2 + a^2 = 3$$

$$3 \cdot b^2 = 3ab$$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{CB}{AC}$$

$$4r^2 = (2r^2 - 2r^2 \cos \alpha)^2 + (2r^2 + 2r^2 \cos \alpha)^2$$

$$b^2 + 2ab = 3 - ab$$

$$b^2 - 3 = -3ab$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a = b_1 \cdot v$$

$$b = b_1 \cdot g$$

$$c = b_1 \cdot g^2$$

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-2b + 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

$$b_1 x^2 + 2b_1 g x + b_1 g^2 = 0$$

$$\sqrt{y-2x} = \sqrt{x(y-2)} - (y-2)$$

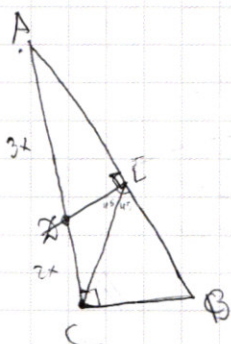
$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$x^2 + 2gx + g^2 = 0$$

$$(x+g)^2 = 0 \quad x = -g$$

$$-g = b_1 \cdot g^3$$

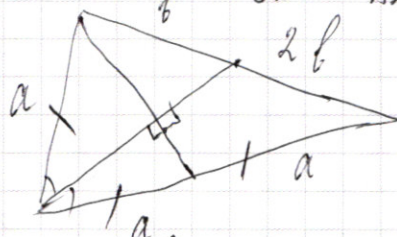
$$b_1 = b_1$$



$$\frac{CB}{5x} = ?$$

$$\frac{CB}{DE} = \frac{AB}{AD}$$

$$CB = \frac{DE \cdot AB}{AD}$$



$$3a + 3b = 1200$$

$$a + b = 400$$

$$a + b = a = 400 - b$$

$$b = 400 - a$$

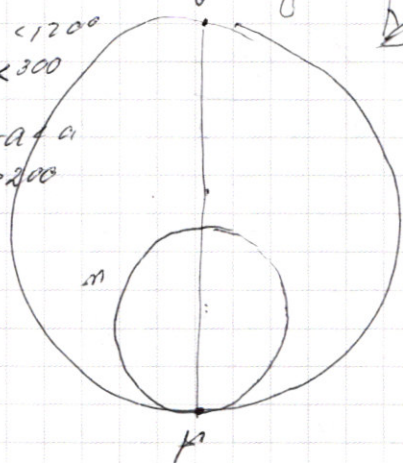
$$a < 1200 - 3a$$

$$4a < 1200$$

$$a < 300$$

$$400 - a + a$$

$$a > 200$$



$$3b < 3a$$

$$2a < 3b + a$$

$$a < 2a + 3b$$

$$-3a < 3b$$

$$3a > 3b$$

$$2a <$$

$$a < 3b$$

$$b < a$$

$$b < a$$

$$a < 3b$$

$$-a < 3b$$

$$g = \frac{2ab}{a+b}$$

$$g = \frac{2ab}{a+b}$$

$$g = \frac{2ab}{a+b}$$

$$g = \frac{2ab}{a+b}$$

$$g = \frac{2ab}{a+b}$$

$$g = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\sqrt{y-2x} = \sqrt{(y-2)(x-1)}$$

$$2x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4$$

$$2x^2 + (y-2)^2 - 4x - 4 + 3$$

$$2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$$

$$2(x-1)^2 + 2x^2 - 4x + 2 - 2 - 4 + 3$$

$$\frac{-6}{-3}$$