МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\exists$ q – знаменатель данной геометрической прогрессии, тогда $b = a\cdot q$, $c = a\cdot q^2$, а также $\exists$ d – четвёртый член данной г.п., тогда $d = a\cdot q^3$

Найдём корни трёхчлена: $ax^2+2bx+c=0$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} = \frac{aq \pm \sqrt{a^2q^2-a^2q^2}}{a} = q$$

Таким образом, $d = q$, а также $d = a\cdot q^3$

$a\cdot q^3 = q$, $q \neq 0$

$a\cdot q^2 = 1 = c$ (1) *

Если q – единств. корень, то $ax^2-2bx+c \equiv (x-q)^2 = x^2-2qx+q^2$

Получаем систему: $\begin{cases} a=1 \\ -2b=-2q \\ c=q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=q \\ c=q^2 \end{cases}$

Теперь, зная, что $a=1$, подставим в (1): $q^2=1$

$q_1 = 1$

$q_2 = -1$

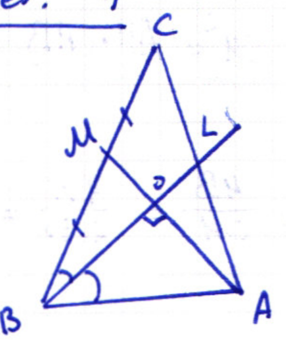
Таким образом, мы получаем 2 варианта значения четвёртого члена: $d_1 = a\cdot q_1^3 = 1\cdot 1^3 = 1$

$d_2 = a\cdot q_2^3 = 1\cdot(-1)^3 = -1$

*Таким образом, 3 член прогрессии равен 1

Ответ: 1

№2



Дано: ΔABC

BL – бис., AM – мед.

$BL \perp AM$

$BC, AC, BA \in \mathbb{Z}$

0) $\exists$ $BC=a$, $AC=b$, $BA=c$ $\in \mathbb{Z}$

1) ΔBMA – р/б (т.к. бис. BO совпадает с высотой)

$\Rightarrow BM = BA = c$

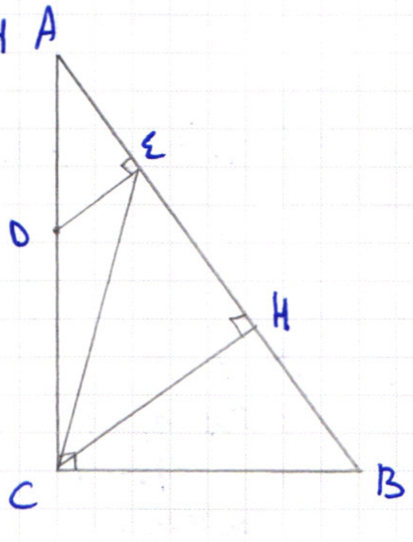
2) $\begin{cases} AM - \text{медиана} \Rightarrow BM = \frac{a}{2} \\ BM = c \text{ (по п. 1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = c \Leftrightarrow a = 2c$

3) Из нер-ва треугольника: $|a-c| < b < a+c \Leftrightarrow$

$c < b < 3c$

Тогда, если все стороны – целые, то

№4



Дано: $\triangle ABC$ – п/у

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ $\widehat{CED} = 30°$ $DE \perp AB$

ⓐ Найти $tg\,\widehat{BAC}$ – ?

Решение:

1) Доп. постр.: $CH \perp AB$

2) $\triangle DAE \sim \triangle CAH$ (по острому углу) (общ. угол $\hat{A}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{1}{3}$

Тогда, $\exists$ $AE = x$, тогда $AH = 3x \Rightarrow EH = AH - AE = 2x$

3) $\widehat{CEH} = 90° - \widehat{CED} = 90° - 30° = 60°$

$tg\,\widehat{CEH} = \frac{CH}{EH} = \sqrt{3} \Rightarrow CH = 2\sqrt{3}x$

4) CH – высота, провед. из прямого угла $\Rightarrow CH^2 = AH \cdot HB \Rightarrow$

$\Rightarrow HB = \frac{CH^2}{AH} = \frac{4 \cdot 3x^2}{3x} = 4x$

5) ~~ctg(~~ $ctg\,\widehat{CBH} = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAC}\right) = tg\,\widehat{BAC} = \frac{HB}{CH} = \frac{4x}{2\sqrt{3}x} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

(8) Дополнит. в дано: $AC=\sqrt{7}$

Найти: S_{CED}

Решение

1) $tg\,\widehat{BAC} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ (по п.а) $= \frac{DE}{AE} \Rightarrow DE = \frac{2\sqrt{3}\,x}{3}$

2) ~~В ΔCED:~~ $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow DC = \sqrt{7} - \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

3) $CE = 4\cancel{y}x$ (из п/у ΔCEH, т.к. напротив угла в $30°$ леж. стор., рав. пол. гип.)

4) В ΔCED:

$(DC)^2 = DE^2 + CE^2 - 2DE\cdot EE\cdot\cos\widehat{CED}$

$\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}\cancel{y}x}{3}\right)^2 + (4\cancel{y}x)^2 - 2\cdot\frac{2\sqrt{3}\cancel{y}x}{3}\cdot 4\cancel{y}x\cdot\cos 30°$

$\frac{4\cdot 7}{9} = \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{y^2}x^2}{9} + 16\cancel{y^2}x^2 - 8\cancel{y^2}x^2$

$28 = 12\cancel{y^2}x^2 + 72\cancel{y^2}x^2$

$\cancel{y^2}x^2 = \frac{28}{84} \Rightarrow \cancel{y}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Таким образом, $DE = \frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{2}{3}$

$CE = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

5) $S_{CED} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot CE\cdot\sin 30 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $tg\,\widehat{BAC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№7

Рассчитаем все знач. функций:

$f(2) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$

$f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$

$f(4) = f(2)\cdot 2 = 2$

$f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

⋮

$f(20) = f(10) + f(2) = 4$

$f(21) = f(7) + f(3) = 4$

$f(22) = f(11) + f(2) = 6$

Таким образом получилось, что:

$f(2)=f(3) < f(4)=f(5)=f(6)=f(9) < f(7) = f(8)=f(10)=f(12)=$
$=f(15)=f(18) < f(14)=f(16)=f(20)=f(21) < f(11) < f(13)=f(22) <$
$< f(17) < f(19)$

Заметим, что!

$\forall n,m \in \mathbb{Q}^+ \quad f(n) = f(\frac{n}{m}) + f(m) = f(n) + f(\frac{1}{m}) + f(m)$

$\underline{f(\frac{1}{m}) = -f(m)}$

Тогда: $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$\underline{f(x) < f(y)}$

$\forall$ все случ.!

1) $x=\{2;3\}$ для каждого найд. по 19 y: $19 \cdot 2 = 38$

2) $x=\{4;5;6;9\}$ для каждого по 15 y-ов: $15 \cdot 4 = 60$

3) $x=\{7;8;10;12;15;18\}$: $6 \cdot 9 = 54$

4) $x=\{14;16;20;21\}$ $5 \cdot 4 = 20$

5) $x=11$: 4

6) $x=\{13;22\}$: $2 \cdot 2 = 4$

7) $x=17$: 1

8) $x=19$ для него не найд., т.к. у него максим. значение

В итоге, суммируем все полученные варианты!

$38+60+54+20+4+4+1 = 181$

Ответ: 181

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 (дополнение)

$f(7) = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = 2 \cdot f(3) = 2$

$f(10) = f(5) + f(2) = 3$

$f(11) = \left[\frac{11}{2}\right] = 5$

$f(12) = f(6) + f(2) = 3$

$f(13) = \left[\frac{13}{2}\right] = 6$

$f(14) = f(7) + f(2) = 4$

$f(15) = f(5) + f(3) = 3$

$f(16) = f(4) + f(4) = 4$

$f(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$

$f(18) = f(9) + f(2) = 3$

$f(19) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№

$\forall x \in [-\frac{1}{2}; 1] \quad 8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$f(x) = 8x - 6|2x-1|$

① $2x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

$f(x) = 8x - 12x + 6$

$f(x) = -4x + 6$

② $2x - 1 < 0$

$x < \frac{1}{2}$

$f(x) = 8x + 12x - 6$

$f(x) = 20x - 6$

$20 \cdot \frac{1}{2} - 6 = 4$

$-8 + 6 + 7 = 5$

$= 2$

$g(x) = -8x^2 + 6x + 7$

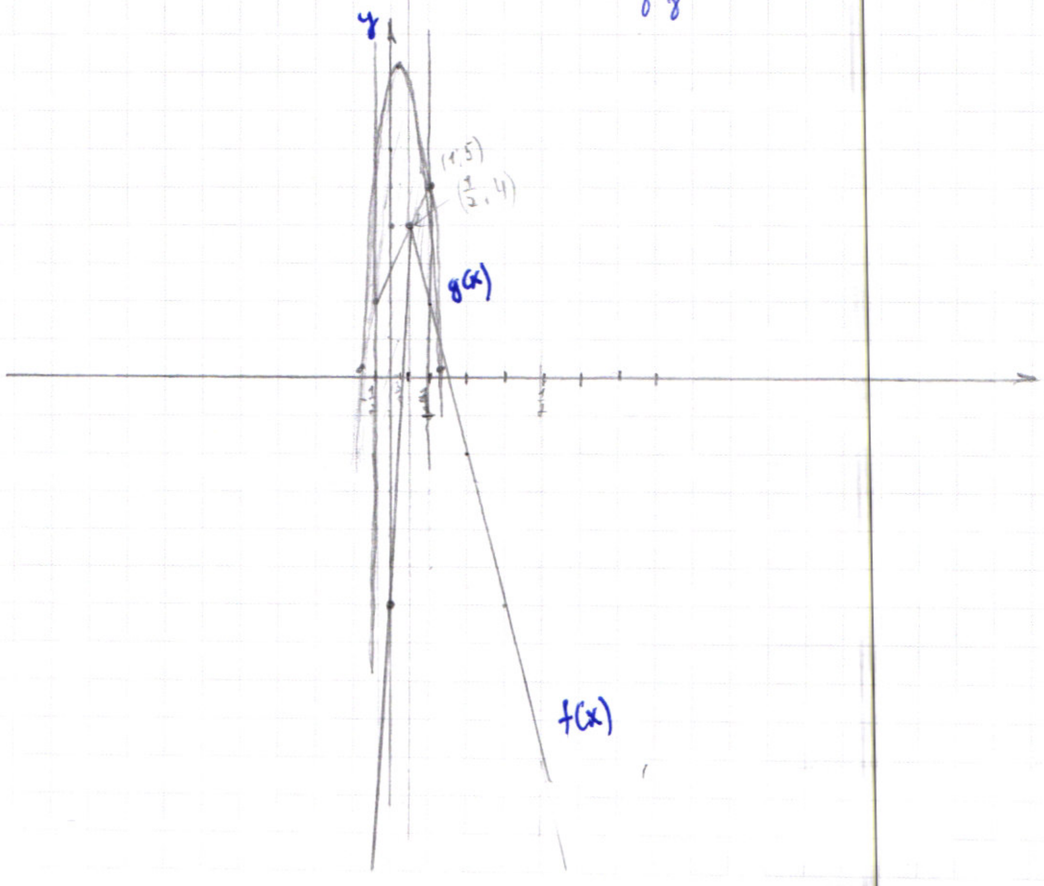
$x_0 = -\frac{6}{-8 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

$y_0 = -8 \cdot \frac{9}{8^2} + \frac{18}{8} + \frac{56}{8} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$

$+\frac{56}{18}$

$-\frac{74}{9}$

65



☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

№7

$\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \quad f(ab) = f(a) + f(b)$

$\forall p$-прост. $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} 2 \le x \le 22 \\ 2 \le y \le 22 \\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \end{cases}$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

Простые числа из пром. [2;22] : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

$f(2) = 1 \quad f(3) = 1 \quad f(5) = 2 \quad f(7) = 3 \quad f(11) = 5 \quad f(13) = 6$

$f(17) = 8 \quad f(19) = 9$

~~Обознач~~: Составные: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 1 + 1 = 2$

$f(8) = f(2) + f(4) = 1 + 2 = 3$

$f(9) = 2f(3) = 2$

$f(10) = \cancel{2f(5) = 4}\ f(5) + f(2) = 3$

$f(12) = \cancel{2}f(6) + f(2) = \cancel{4}\ 3$

$f(14) = 2f(7) = 6$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = 2f(4) = 4$

$f(18) = 2f(9) = 4$

$f(20) = \cancel{2f(10) = 8}\ f(10) + f(2) = 4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

$f(22) = 2f(11) = 10$

$f(4) = f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$f(4) = f(12) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 4 + f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$\cancel{f(6) = f(21)}$

$f(3) = f(15) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f(4) - f(16) = 2 - 4 = -2$

$\cancel{f\left(\frac{1}{5}\right) = f(4) - f(20) = 2 - 4 = -2}$

$\cancel{f(i) = f\left(\frac{1}{i}\right) + f\left(\frac{i}{i}\right)}$ $= 3 + f\left(\frac{1}{5}\right) = 1$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = -2$

$\cancel{f\left(\frac{1}{i}\right) = f(j) - f(i \cdot j) = f(j) - f(i) - f(j)} = -f(i)$

$f(2) = f(20) + f\left(\frac{1}{10}\right) = 1$

8

$f(n) = f\left(\frac{n}{m}\right) + f\left(\frac{1}{m}m\right) = f(n) + f\left(\frac{1}{m}\right) + f(m)$

$0 = f\left(\frac{1}{m}\right) + f(m)$

$f\left(\frac{1}{m}\right) = -f(m)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Простые:

$f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$

$f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = [\frac{5}{2}] = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = [\frac{7}{2}] = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(5) + f(2) = 3$

$f(11) = [\frac{11}{2}] = 5$

$f(12) = f(6) + f(2) = 3$

$f(13) = [\frac{13}{2}] = 6$

$f(14) = f(7) + f(2) = 4$

$f(15) = f(5) + f(3) = 3$

$f(16) = f(4) + f(4) = 4$

$f(17) = [\frac{17}{2}] = 8$

$f(18) = f(9) + f(2) = 3$

$f(19) = [\frac{19}{2}] = 9$

$f(20) = f(10) + f(2) = 4$

$f(21) = f(7) + f(3) = 4$

$f(22) = f(11) + f(2) = 6$

В порядке возраст.! $\underline{f(2) = f(3)} < \underline{f(4) = f(5) = f(6) = f(9)} < \underline{f(7) =}$
$\underline{= f(8) = f(10) = f(12) = f(15) = f(18)} < f(14) = f(16) = f(20) = f(21) < f(11) <$
$< f(13) = f(22) < f(17) < f(19)$

$f(x) < f(y)$

1) $x = \{2; 3\}$, тогда для каждого найдётся по 19 y итого: $19 \cdot 2 = 38$

2) $x = \{4; 5; 6; 9\}$, для каждого по 15 y итого: $15 \cdot 4 = 60$

3) $x = \{7; 8; 10; 12; 15; 18\}$, для каждого по 9 итого: $6 \cdot 9 = 54$

4) $x = \{14; 16; 20; 21\}$, для каждого по 5 итого: $5 \cdot 4 = 20$

5) $x = 11$, для него найдётся 4 y итого: 4

6) $x = \{13; 22\}$, для каждого по 2 y итого: $2 \cdot 2 = 4$

7) $x = 17$, для него 1 y итого: 1

8) $x = 19$, для него y не найд. т.к. максимальное значение

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

В итоге: $\cancel{38}+60+\cancel{54}+20+\cancel{4}+\cancel{4}+1$

$38+4=42+4=46+54=$
$=100+81=\underline{181}$

Ответ: 181

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

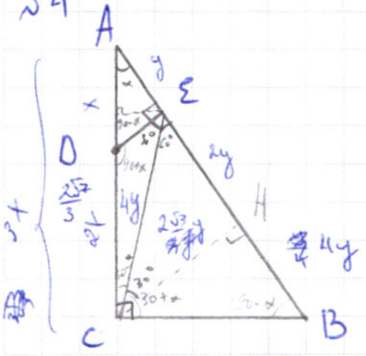
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ $\quad CED = 30^\circ$

$tg\,\widehat{BAC}$ - ?

$3c + b = 900$

$c = \frac{900-b}{3} = 300 - \frac{b}{3}$

$\frac{b}{3} \in \mathbb{Z}$

$\triangle DAE \sim \triangle ABC$ (по острому углу)

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC}$

$\Downarrow$

Пусть $AD = x$, тогда $AC = 3x$

$\frac{x}{AB} = \frac{DE}{CB} = \frac{AE}{3x} \Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{CB}{AC} = \frac{AD}{AB} = tg\,BAC$

$tg\,BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{DE}{AE}$

$180 - 90 - \alpha - 30 = 60 - \alpha \qquad 90 - 60 + \alpha = 30 + \alpha$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$AD \cdot AC = AB \cdot AE$

$180 - 60 - 30 - \alpha = 90 - \alpha$

$\triangle CHA \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CH} = \frac{AE}{AH} \qquad \frac{DE}{AE} = \frac{CH}{AH}$

$AC^2 = AH \cdot AB \qquad 9x^2 = AH \cdot AB$

$CH^2 = AH \cdot (AB - AH) = AH \cdot AB - AH^2$

$\sin 60^\circ = \frac{CH}{CE} \Rightarrow CH = \frac{\sqrt3}{2} \cdot 4y = 2y$

$\cancel{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}}$

$AH = \frac{AC^2}{AB}$

$\frac{AE \cdot AB}{AC^2} = \frac{AD}{AC}$

$ctg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$

- $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{1}{3}$
- Пусть $AE = y$, тогда $AH = 3y \Rightarrow EH = 2y$ $\quad AE \cdot AB = AD \cdot AC$

~~на против угла в 30° леж. катет, рав. половине гип.~~

$tg 60^\circ = \frac{CH}{EH} = \sqrt3 \qquad CH = 2\sqrt3 y$

$(2\sqrt3 y)^2 = 3y \cdot HB \Rightarrow HB = \frac{4 \cdot 3 \cdot y^2}{3y} = 4y$

$ctg(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAC}) = 4y : 2\sqrt3 y = \cancel{\frac{4 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt3 y} = \frac{\sqrt3}{6} = tg\,\widehat{BAC}}$

$\frac{4y \cdot 2}{\sqrt3 y} = \frac{2\sqrt3}{3} = tg\,\widehat{BAC}$

$\frac{\sqrt3}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$AC=\sqrt{7} \Rightarrow AD=\frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow DC=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$tg\,\widehat{BAC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{DE}{AE}=\frac{DE}{y} \Rightarrow DE=\frac{2\sqrt{3}y}{3}$

$\exists\ \widehat{BAC}=\alpha$

$\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{1-\sin^2\alpha}}\ \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$

$\cancel{8\sqrt{3}\ 8\sqrt{3}}\quad 8\sqrt{3}\cos\alpha=3-3\cos^2\alpha$

$3\cos^2\alpha+8\sqrt{3}\cos\alpha-3=0$

$\cancel{327}\quad \cos\alpha=\frac{-8\sqrt{3}\pm\sqrt{64\cdot3+4\cdot3\cdot3}}{6}=-8\sqrt{3}\pm$

$12 \cdot 3 = 36$; $64\cdot3=192$; $192+36=228$; $228 : 3 = 76$; $228-21=18$

$\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}y}{3}\right)^2+(4y)^2-2\cdot\frac{8\sqrt{3}y}{3}\cdot4y\cdot\cos30$

$\frac{4\cdot7}{3}=\frac{64\cdot\cancel{3}\cdot y^2}{\cancel{9}_3}+16y^2-\frac{\cancel{2}\cdot\overset{32}{\cancel{8}}\sqrt{3}y^2\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}$

$32\cdot3=96$

$28=64y^2+48y^2-96y^2$

$64+48=112$; $112-96=16$

$y^2=\frac{28}{16}=\frac{7}{4}$

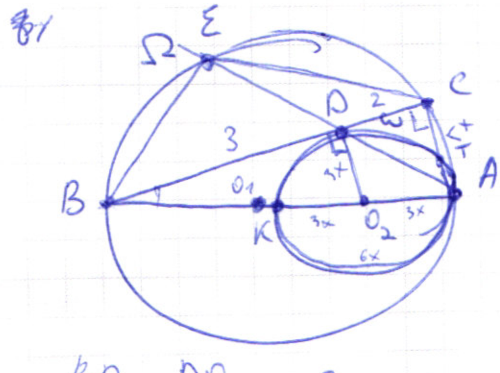
$y=\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\quad DE=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\cancel{2}}}{3}=\frac{4\cdot\sqrt{21}}{3}$

$CE=\frac{4\sqrt{7}}{\cancel{2}}=2\sqrt{7}$

$S_{CED}=\frac{1}{2}\cdot DE\cdot CE\cdot\sin30=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{4\sqrt{21}}{3}\cdot2\sqrt{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\cdot7\cdot\sqrt{3}}{3}=$

$=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

№5

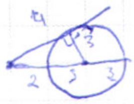


$R_\Omega-?$ $\quad S_{BACE}-?$

$R_\omega-?$

$CD=2,\ BD=3$

$BC=5$



$16=2\cdot8=16$ - верно

$BD^2=BK\cdot BA$

$CD^2=CT\cdot CA$

$4=CT\cdot5x \Rightarrow CT=\frac{4}{5x}$

$9=BK\cdot5\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow BK=\frac{9}{5\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{BD}{BC}=\frac{DO_2}{AC}=\frac{3}{5}$

по т. Пиф.: $BA=\sqrt{25+25x^2}=5\sqrt{x^2+1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

~~a, b~~ Пусть q – знам. геом. прогр.

$a,\ b=a\cdot q,\ \underline{c=a\cdot q^2},\ d=q=a\cdot q^3$

$ax^2-2bx+c=0$

$x=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{aq\pm\sqrt{a^2\cdot q^2-a^2q^2}}{a}=q$

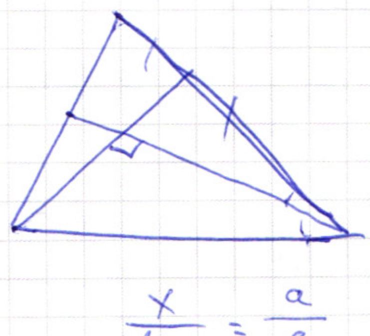
$ax^2-2bx+c=(x-q)^2=x^2-2qx+q^2$

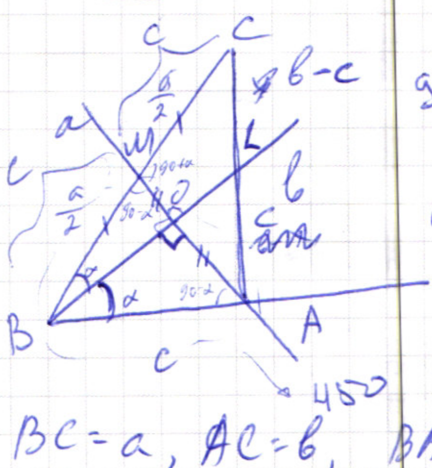
$\begin{cases}a=1\\-2b=-2q\\c=q^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=q\\c=q^2\end{cases}$ $\begin{cases}a\cdot q^3=q\\a=1\end{cases} \Leftrightarrow q^2=1$ $\boxed{q=\pm1}$

$1,\ 1,\ 1,\ 1$ $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$, $\underline{x=1}$

$1,\ -1,\ 1,\ -1$ $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$, $\underline{x=-1}$

№2





$90^\circ=\beta$

$a,b,c\in\mathbb{Z}$

$180-90+\alpha=$
$=90+\alpha$

$\frac{x}{b-x}=\frac{a}{c}$

0) Пусть $BC=a,\ AC=b,\ BA=c$

~~1) AQ – мед. и высота => △BLA – р/б =>~~
~~=> BA = LA = c~~

2) ~~BL - бис. => (по св-ву бис.) $\frac{CL}{LA} = \frac{BC}{BA}$ <=>~~

~~<=> $\frac{b-c}{c} = \frac{a}{c}$ -> $b-c=a$~~

~~Из нер-ва треуг.: $b-c<a$~~

4 2

$\triangle BMA$ - р/б => $\begin{cases} BM=BA=c \\ BM=\frac{a}{2} \end{cases}$ => $\frac{a}{2}=c$ <=> $\underline{a=2c}$

$\begin{cases} b=3c \\ a=2c \end{cases}$

~~3c < 2c+c~~

Нер-во треуг. $b < a+c = 3c$, а тогда, если все стороны целые, то $\left[\begin{array}{l} b=c \\ b=2c \end{array}\right.$

Проверим оба случая! $\left[\begin{array}{l} 4c=900 \\ 5c=900 \end{array}\right.$ на целочисл. сторон $\left[\begin{array}{l} c=225 \\ c=180 \end{array}\right.$

$-\frac{900}{5}\,\frac{|5}{180}$, $\frac{-5}{40}$, $-\frac{900}{8}\,\frac{|4}{2\text{-}5}$, $\frac{-8}{10}$, $\frac{-8}{20}$

~~Ответ:~~

$\begin{cases} a=450 \\ c=225 \\ b=225 \end{cases}$ $\begin{cases} a=360 \\ c=180 \\ b=360 \end{cases}$

Ответ: 2 треуг.

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)-18=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$\sqrt{y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(y-1)(x-6)} \le \frac{y-1+x-6}{2} = \frac{x+y-7}{2}$

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (Коши)

$x-6y \le \frac{x+y-7}{2}$

$ac+bd \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$\frac{5+3}{2}=4$ $3<\sqrt{15}<4$

$2x-12y \le x+y-7$

$(x-6)(x-6)+2(y-1)(y-1) \le$

$x-13y \le -7$

$\le$ ~~$x^2-12x+36+2y^2-4y$~~

$-13x(y-1)$

$34y^2-13xy+13x+14y-26=0$

$\frac{(x-6)^2+2(y-1)^2}{2} \ge \sqrt{(x-6)^2\cdot 2(y-1)^2} =$

$x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$

$= |x-6|\cdot|y-1|\cdot\sqrt{2} \le 9$

$2x^2+38y^2-13xy-11x+2y+14=0$

$$\begin{cases} x\ge 6y \\ x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 6y \\ x^2-13xy+36y^2+x+6y-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)