МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

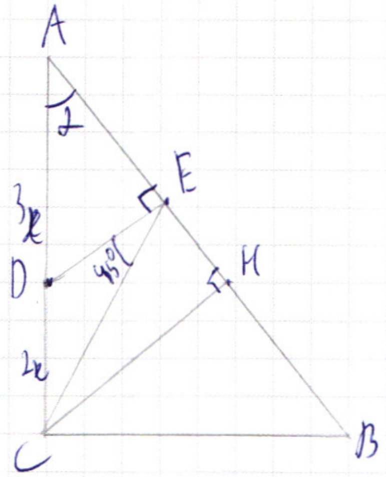
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

а)



№4

Проводим высоту CH в ΔABC

$CH \parallel DE$ т.к. обе $\perp AB$

$\angle CEH = 45^\circ \Rightarrow \Delta CEH$ – р/б $(EH = CH)$

$CH = 10y$

$EH = 10y$

$\frac{AE}{EH} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$

$AE = 15y$

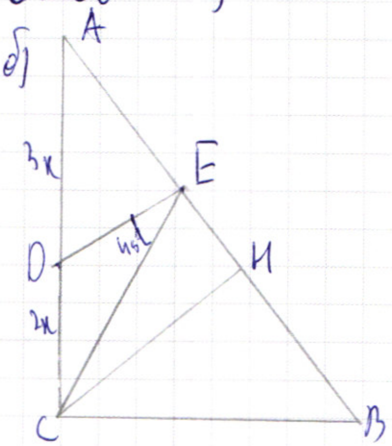
$\frac{DE}{CH} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$DE = 6y$

$tg\,\alpha = \frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$

б)



Из пункта а мы знаем что $CH = 10y$;

$AH = 10y$; $DE = 6y$, $AE = 15y$

$AH = AE + EH = 25y$

$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 100y^2 + 625y^2 = 725y^2$

$29 = 725y^2$

$25y^2 = 1$

$y = \frac{1}{5}$

$S_{AHC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10y \cdot 25y = 5$

$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 6y \cdot 15y = \frac{9}{5}$

$S_{CEH} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 10y \cdot 10y = 2$

$S_{CED} = S_{AHC} - S_{ADE} - S_{CEH} = 5 - \frac{9}{5} - 2 = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{6}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$b = ad$; $c = ad^2$

$ax^2 + 2bx + c = ax^2 + 2adx + ad^2 = 0$

$x^2 + 2dx + d^2 = 0$

$(x+d)^2 = 0$

$x = -d \Rightarrow$ четвёртый член прогрессии $-d$

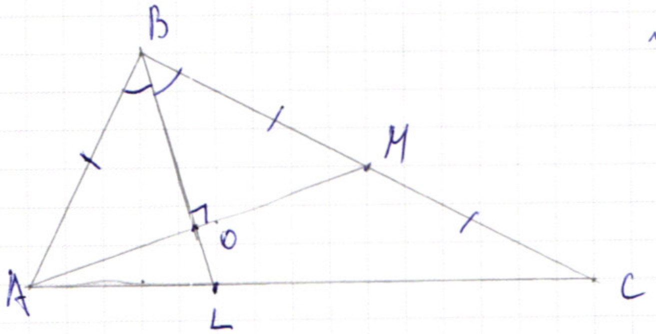
Тогда третий в квадрате равен произведению второго и четвёртого

$(ad^2)^2 = ad \cdot (-d)$

$a^2 d^4 = -ad^2$

$\left[\begin{array}{l} ad^2 = -1 \\ ad^2 = 0 \end{array}\right.$

Ответ: ~~-1/0~~ -1 или 0.



№2

BO – биссектриса и высота $\Rightarrow \triangle ABM$ – р/б $AB = BM$

$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$

Длина AC кратна 3 т.к. $AC = 1200 - 3y$ $AL = x$ $AB = y$

$\begin{cases} 3x + 3y = 1200 \\ 3y > 3x \\ 3y + 3x > 2y \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 400 \\ y > x \\ y < 3x \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (100; 200) \\ y \in (200; 300) \end{cases}$

Из этого следует что всего таких $\triangle$ 99. Ответ: 99

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Если $f(x)=0$, то будет 20 вариантов для y

Если $f(x)=1$, то $x=2$ или 3, а для y будет 18

Если $f(x)=2$, то у x 4 варианта, а для y будет 14

Если $f(x)=3$, то у x 6 вариантов, а для y будет 8

Если $f(x)=4$, то у x 4 варианта, а для y будет 4

Если $f(x)=5$, то у x 1 вариант, а для y будет 3

Если $f(x)=6$, то у x 1 вариант, а для y будет 2

Если $f(x)=8$, то у x 1 вариант, а для y будет 1

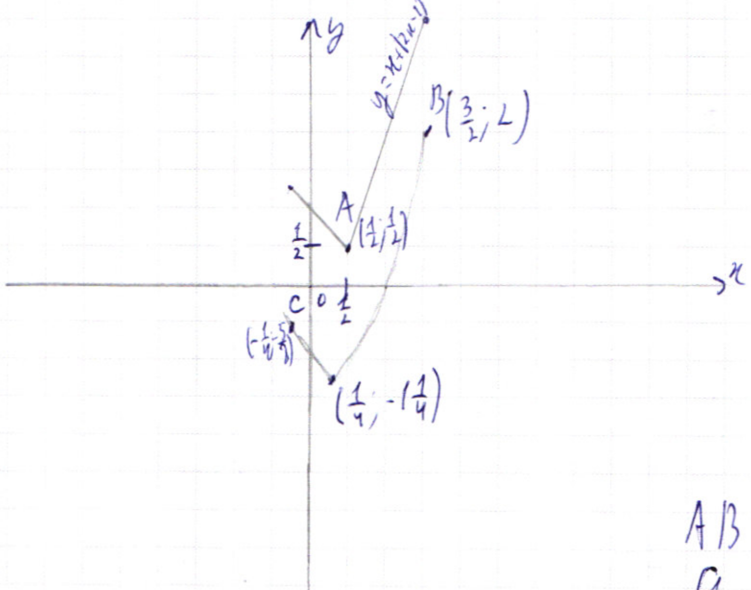
Если $f(x)=9$, то нет вариантов для y.

Всего пар чисел $20\cdot 1 + 2\cdot 18 + 4\cdot 14 + 6\cdot 8 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 =$
$= 182$

Ответ: 182

№6

Строим $x+|2x-1|$ и $2x^2-x-1$ при $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$



$ax+b$ — это прямая и она должна во всех точках от $-\frac{1}{4}$ до $\frac{3}{2}$ быть выше $2x^2-x-1$ и ниже $x+|2x-1|$

Или пересекать их в точках $x=\frac{3}{2}$ или $x=-\frac{1}{4}$

AB: $y=kx+c$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}k+c\\ 2=\frac{3}{2}k+c\end{cases}$$

$k=\frac{3}{2}$; $c=-\frac{1}{4}$

$AB: y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$, и $C\in AB$ т.к. $-\frac{5}{8}=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4} \Rightarrow$ искомая прямая это AB

Ответ: $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ED \cdot AD = BD \cdot DC$ пересечение двух хорд

$AD^2 = 3$

$AD = \sqrt{3}$

$AE = 2\sqrt{3}$

$\angle O_1DA = \angle O_1AD$ т.к. $DO_1 = AO_1 = r$ $\quad \angle O_1DA = \alpha$

~~$\angle O_1DA = \angle BDO$ т.к. дополняют до $90°$~~

$S_{ACEB} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC \cdot \sin(90° + \alpha) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$S_{ACEB} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $4\sqrt{2}$

№7

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) - f(y) = f(x) - f(y) + f(1)$

$f(1) = 0$, т.к $f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) < f(y)$

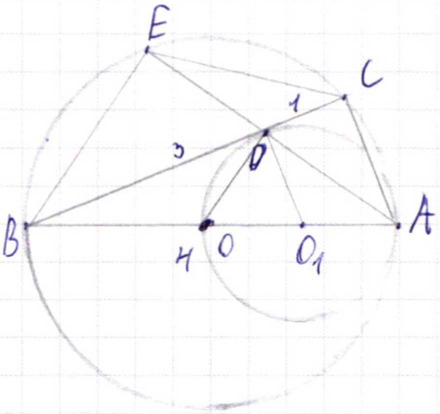
$f(1) = 0$	$f(8) = f(2) + f(4) = 3$	$f(15) = f(3) + f(5) = 3$
$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$	$f(9) = f(3) + f(3) = 2$	$f(16) = f(8) + f(2) = 4$
$f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$	$f(10) = f(2) + f(5) = 3$	$f(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$
$f(4) = f(2) + f(2) = 2$	$f(11) = \left[\frac{11}{2}\right] = 5$	$f(18) = f(9) + f(2) = 3$
$f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$	$f(12) = f(6) + f(2) = 3$	$f(19) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$
$f(6) = f(2) + f(3) = 2$	$f(13) = \left[\frac{13}{2}\right] = 6$	$f(20) = f(10) + f(2) = 4$
$f(7) = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$	$f(14) = f(7) + f(2) = 4$	$f(21) = f(7) + f(3) = 4$

(2) $3x^2-6=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$ — не подходит т.к. $y>2x$, $y=x+1=3$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{6+\sqrt{2}}{6} \\ y=\frac{6+2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1)$, $\left(\frac{6+\sqrt{2}}{6}; \frac{6+2\sqrt{2}}{3}\right)$



№5

$\angle ACB=90°$ т.к. опирается на диаметр

$\angle BDO_1=90°$ т.к. $\angle BDO_1$ угол между касательной и радиусом. $\Rightarrow DO_1 \parallel CA_1$

~~BO~~ $OA=R$

$O_1A=r$

$\frac{O_1A}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{1}{4}$

$\frac{r}{2R}=\frac{1}{4}$

$2R=4r$

$R=2r \Rightarrow$ точки H и O совпадают.

$BO\cdot AB=BD^2$

$R\cdot 2R=9$

$2R^2=9$

$R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\angle BEA=90°$ т.к. опирается на диаметр.

$\angle ODA=90°$ т.к. опирается на диаметр. $\Rightarrow DH \parallel BE$

$\frac{AD}{DE}=\frac{AO}{OB}=1 \Rightarrow AD=DE$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y \geq 2x$, $xy-2x-y+2 \geq 0$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = xy-2x-y+2 \\ y \geq 2x \\ (y-2)(x-1) \geq 0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$

$D = 25x^2-10x+1-16x^2-8x+8 = 9(x-1)^2$

$y = \dfrac{5x-1 \pm 3(x-1)}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} y = 4x-2 \\ y = 1+x \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+(4x-2)^2-4x-4(4x-2)+3=0 \\ 2x^2+(1+x)^2-4x-4(1+x)+3=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0 \\ 2x^2+1+2x+x^2-4x-4-4x+3=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} 18x^2-36x+17=0 & (1) \\ 3x^2-6x=0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $D = 18^2\cdot 4 - 4\cdot 18\cdot 17 = 4\cdot 18$

$x = \dfrac{36 \pm 6\sqrt{2}}{36} = \dfrac{6 \pm \sqrt{2}}{6}$ $\quad x = \dfrac{6-\sqrt{2}}{6}$, не подходит т.к. $y \geq 2x$, а $y = 4x-2$
$4x-2 \geq 2x$ $\quad x \geq 1$

$f(15)=3$

$f(16)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=3$

$f(19)=9$

$f(20)=4$

$f(21)=4$

$4x^2-4xy+y^2=xy-2x-y+2$

$a \quad 2a \quad 3x$

$a+3x>2a$

$y^2=5xy-2x-y+2-4x^2$

$3a>3x$

$-2x^2+5xy-6x-5y+5=0$

$a>x$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$a<3x$

$2x^2-x(5y-6)+5y-5=0$

$4x=400$

$5y-6 \quad -(10y-10)$

$x=100$

$y^2-4y+3+2x^2-4x$

$25y^2-60y+36-8(5y-5)$

$16-12+8x^2+16x$

$25y^2-100y+76$

$x=200$

$1-2x^2+4x\geq 0$

$x\in(100;200)$

$2x^2-4x-1\leq 0$

$a\in(200;300)$

$x(y-2)-(y-2)$

$(y-2)(x-1)$

$16+8=24$

$(y-2x)^2=(y-2)(x-1)$

$x=\frac{4\pm 2\sqrt{6}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

$x\in[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$

$1 \quad -2$

$2 \quad -1$

$1 \quad -\frac{1}{2}$

$(x+1)(2x-1)<ax+b\leq 1-x$

$(x-1)(2x+1)<ax+b\leq 1-x$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\geq 2\\ x\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}y<2\\ y<1\end{cases}\end{array}\right.$

$(y-2)(x-1)$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3+y$

$30 \quad 21$

25

$ab=(y-2x)^2$

$\frac{12+2\sqrt{2}}{3}+2$

$\frac{6+2\sqrt{2}}{3}$

$2(y-2x)^2$

$a^2+2b^2=3$

$(x+y-3)^2+(x-1)^2-2(y-2x)^2$

$a^2-3+2b^2=0$

$(3x-3)(2y-x-3)+(3x-y+1)(y-x-1)$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$

$9x^2-18x+9 \quad 9(x-1)^2$

$y=\frac{5x-1\pm 3(x-1)}{2}$

$8x-4$

$y=4x-2$

$2x+2$

$y=1+x$

$25x^2-10x+1-16x^2-8x+8$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$an = b$

$an^2 = c$

$x^2 + 2nx + n^2 = 0$

$1 \quad -2$

$2 \quad -1$

$(x+n)^2 = 0$

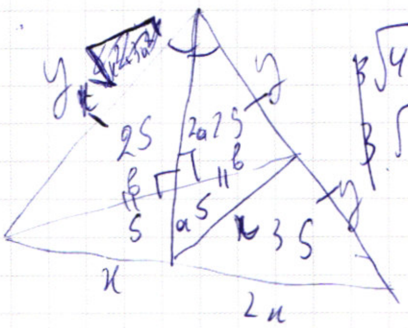
$-n \quad a \quad an \quad an^2 \quad -n$

$1 \mid -\frac{1}{2}$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) + f(2y) - f(2y)$

$f(2) - f(2y) =$

$f(x/y) = f(x) + 1 - f(2y)$



$\sqrt{4a^2+b^2}$

$\sqrt{b^2+a^2}$

11

1200

$36a^2 + 9b^2 + b^2 + a^2 + 6\sqrt{(4a^2+b^2)(b^2+a^2)} =$

$(x-1)(2x-1) = 1440000$

$\sqrt{4a^2+b^2} + \sqrt{b^2+a^2} = 400$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$\cdot(-n)$

$f(x) + 1 < f(2y) -$

$= f(2) + f(y)$

$- an^2 = a^2n^4$

$an^2 = -1 \quad x = a_1^{d_1} \cdot a_2^{d_2}$

$-\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{2}$

$x + y = 400$

$2(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 4x + 4 - 3 = 0$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$19 \quad y^2 - x^2 = 3a^2 \quad r = \frac{3\sqrt{1}}{4}$

$9 \quad 3y > 3x \quad y > x$

$90 - 2 = 2\beta$

$x \in (100, 200)$

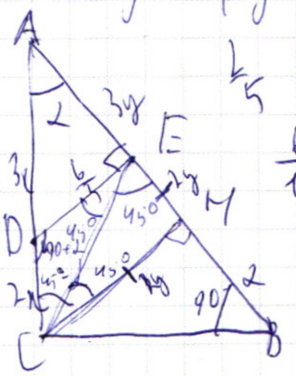
$f(x) < f(y)$

$3x + y > 2y$

$3x > y$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

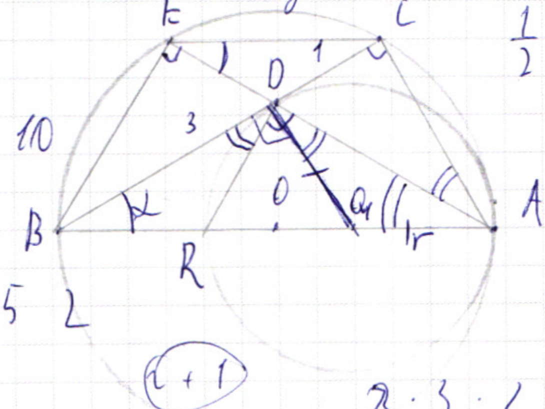
$(2R - 2r) 2R = 9$



$\frac{2}{5}$

$\frac{6}{15} = \frac{3}{5}$

$\left[\frac{p}{2}\right]$



$\frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot 9$

$\frac{ED}{AD} = \frac{DR}{RA} =$

$= \frac{2R - 2r}{2R} =$

$x + 20$

$= \frac{R}{r} - 1$

$5 \quad 2$

$f(1) + f(2) - f(2)$

$2 + 1$

$f(1) = 0$

$1 - 1$

0

$2 - 21$

$3 \cdot 3 \cdot 2 =$

$r = 2R$

$\frac{1}{4} = \frac{r}{2R}$

$f(2) = 1$

$f(5) = 2$

$f(8) = 3$

$7 \cdot 3$

$2 + 2 + 3$

$2R = 2r$

$f(3) = 1$

$f(6) = 2$

$f(9) = 2$

$3 + 1 = 4$

3

$f(11) = 5$

$f(12) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = 2 \cdot 4$

$f(4) = 2$

$f(7) = 3$

$f(10) = 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a+b=c$

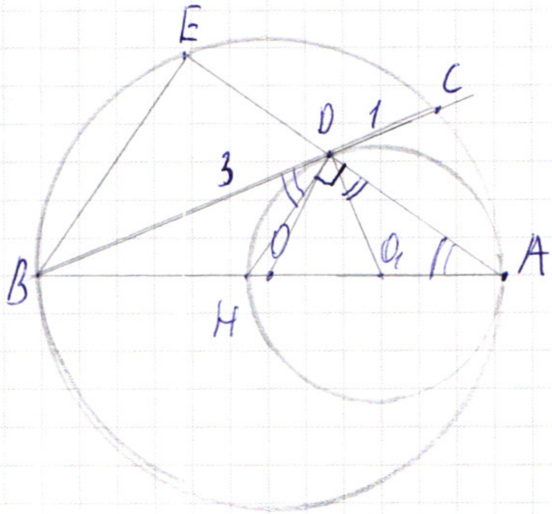
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$20+36+56+48+16+3+2+1$ 6

22

$3a$ x 70

$2a$ a x 106

$3a+x=1200$ 162

$3a>x$ $a+x>2a$ 182

$\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ $3a>x$ $x>a$

$3x-1$ $1-x$ $a=400$

$\frac{9}{2}-1$ $\frac{7}{2}$ $a=200$

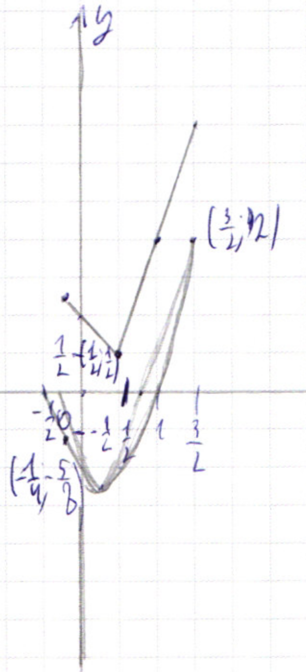
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1$

$\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1$ $-1\frac{1}{4}$



$y=kx+b$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}k+b$ $\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+b$

$2=\frac{3}{2}k+b$ $\frac{3}{2}=k$

$b=-\frac{1}{4}$

2 $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$

$\frac{3}{8}$ $\frac{5}{5}$

$b=-2\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{1}$

$y=\frac{3}{2}x+\cancel{2}-\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)