МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан. 99!

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$. ±

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ $\frac{x}{y}\neq p$ $2x^2-x-1\le 3x-1$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$ $2x^2-4x\le c$

$8x\le 2$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)}$ $f(13)=6$ $f(10)$ $y-2x\ge 0$ $x,y\le 21$

$f(2)=1$ $f(3)=1$ $f(4)=5$ $f(17)=8$

$f(5)=2$ $f(7)=3$ $2x^2-x-1\le ax+b\le 3x-1$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(1)$ $f(2)=$ $f(4)=2$ $2x^2-x\le ax+(b-1)\le 3x$

$4x^2-5xy+y^2+2x+y-2=0$ $2x-2\le a+\frac{b-1}{x}\le 3$

$f(4)=4$ $f(6)=6$ $f($ $f(6)=3$ $f(9)=2$ $f($

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$ $2x-2\le -1\le a+\frac{b-1}{x}\le 3$

$(y^2-4y+4)+2(x^2-2x+1)-3=0$ $b=1$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$ $2x^2-x-1\le ax+b$ $a\in[-1;3]$

$4x^2-5xy+y^2+2x+y+3=0$

$(2x-y+1)^2=4x^2+y^2-4xy-2y$

$(2x-y)^2+2x+y-xy+3=0$

$2x^2-x-1\le 1-x$

$2x^2-2\le 0$

$x^2\le 1$

$f(ab)$

график!

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$4x^2-5xy+y^2+2x+y-2=0$

$4x^2+x(2-5y)+(y^2+y-2)=0$

$D=25y^2-20y+4-16y^2-16y+32=9y^2-36y+36=9(y-4)^2$

$\sqrt{D}=3y-12$

$x=\frac{5y-2\pm(3y-12)}{8}$ $x_1=\frac{8y-14}{8}=y-\frac{7}{4}$ $x_2=\frac{2y+10}{8}=\frac{y+5}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\left[\begin{array}{l} x = y - \frac{7}{4} \\ x = \frac{y+5}{4} \end{array}\right.$$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$* \cancel{D} = D = 16 - \cancel{16y}\ 32y$

$4x = y + 5$

$y = 4x - 5$

$y \geq 2x$

$x \geq 3{,}5$

$x = y - \frac{7}{4}$

$2\left(y - \frac{7}{4}\right)^2 + y$

$2x \leq 4x - 5$

$5 \leq 2x$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = 4y - 7 \\ 4x = y + 5 \end{array}\right.$$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \quad | \cdot 8$

$16x^2 + 8y^2 - 32x - 32y + 24 = 0$

$(4y-7)^2 + 8y^2 - 8(4y-7) - 32y + 24 = 0$

$4x = 4y - 7$

$16y^2 - 56y + 49 + 8y^2 - 32y + 56 - 32y + 24 = 0$

$y \geq 2x$

$24y^2 - 120y + 129 = 0$

$32 \cdot 43 = 1290 + 86 =$
$= 1376$

$2y \geq 4x$

$8y^2 - 40y + 43 = 0$

$\cancel{2y} \geq \cancel{4}y - 7$

$\cancel{D} = D = 1600 - \cancel{8 \cdot 43} \cancel{32 \cdot 43}\ 1376 = 424$

$2y \leq 7$

$\sqrt{D} = \sqrt{424} = 2\sqrt{106}$

224

$y \leq \frac{7}{2}$

$y = \frac{40 \pm 2\sqrt{106}}{16}$

$* (y+5)^2 + 8y^2 - 8(y+5) - 32y + 24 = 0$

$4y = \frac{40 \pm 2\sqrt{106}}{4} = 4x + 7$

$4y = \frac{40 - 2\sqrt{106}}{4} = 4x + 7$

$y^2 + 10y + 25 + 8y^2 - 8y - 40 - 32y + 24 = 0$

$4x = \frac{12 \pm 2\sqrt{106}}{4}$

$4x = \frac{12 - 2\sqrt{106}}{4}$

$9y^2 - 30y + 9 = 0$

$x = \frac{12 \pm 2\sqrt{106}}{4 \cdot 4}$

$x = \frac{12 - 2\sqrt{106}}{16}$

$3y^2 - 10y + 3 = 0$

$(3y-1)(y-3) = 0$

$\frac{40 - 2\sqrt{106}}{16} = 2{,}5 - 2\sqrt{106} < 3{,}5$

$y = 3 \quad 4x = 8 \quad \boxed{x = 2}$

$y = \frac{1}{3} \quad 4x = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$

$\frac{40 + 2\sqrt{106}}{16} = 2{,}5 + \frac{2\sqrt{106}}{16} > 3{,}5$

$x = \frac{5}{3}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{2\sqrt{10{,}6}}{16} > 1$

$y = \frac{40 - 2\sqrt{106}}{16}$

$3 > 2 \cdot 2$

$\frac{2\sqrt{106}}{16} > \frac{2\sqrt{20}}{16} > 1$

$\cancel{8x} = 4y =$

Ответ: $x = \frac{40 - 2\sqrt{106}}{16}$

$y = \frac{12 - 2\sqrt{106}}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

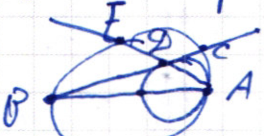
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $p = 1200$ $a, b, c \in \mathbb{N}$



$1200 - 3a < 600$

$a > 200$

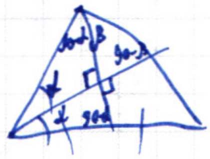
$2a < 60$

$a < 300$

$2a < 60$

$a <$

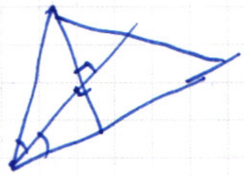
120

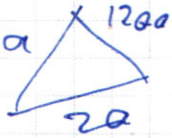


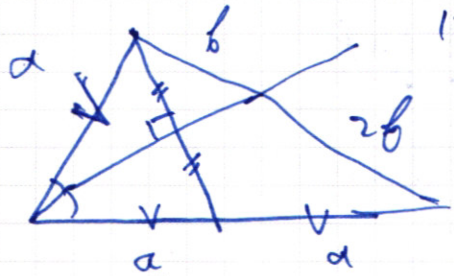
$200 < a < 300$

$400 < b < 600$

$300 < c < 600$







$a \neq c$

$c = b$?

$a = 201, 202 \ldots,$

$f(1) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ $f(x) = f(x) + f(1)$

399 Δ-угольников

1: a $a_1 \neq a_2$!

$a = 1, 2, 3 \ldots 399$

$f(\frac{1}{x}) < 0$

2: 1 11: 5

3: 1 12: 3 21: 4

4: 2 13: 6

5: 2 14: 4

6: 2 15: 3

7: 3 16: 4

8: 3 17: 8

9: 2 18: 3

10: 3 19: 3

20: 4

$a + 2a > 600$ 99?

$a > 200$ $f(\frac{x}{y}) < f(x)$

$f(y) < f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(\frac{1}{y}) + f(x)$

$a = 201, 202 \ldots$ 199

$200 + k$

$400 + 2k$

$600 - 3k$

201: 201, 402, 597 $200 + k_1$, $400 + 2k$, $1200 - 3k$

299, 598, 303

....

239, 478, 483

240, 480, 480

241, 48

Ответ: 99

$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\sin(\alpha + 2\alpha) = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$2\sqrt{2}\,r = 3$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

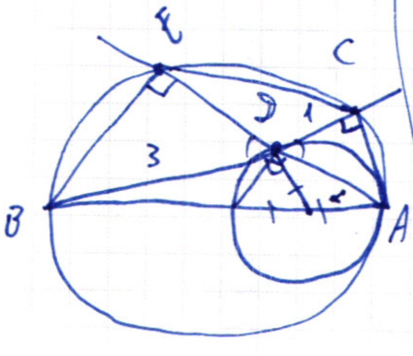
$\sin\alpha\cos\beta$

$9 + r^2 = (R - r)^2$

$9 + r^2 = 9r^2$

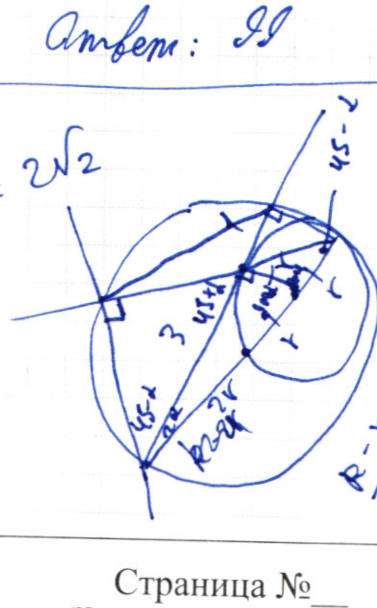
$9 = 8r^2$

$r = 2\sqrt{2}$



$\frac{BD}{ED} = \frac{AD}{CD}$ $AD \cdot ED = 3$

C 4.



$R - r = 3r$

$R = 4r$

$\frac{R - r}{r} = \frac{3}{1}$

☑ черновик ☐ чистовик

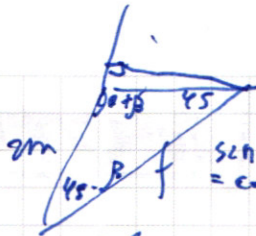
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2+4+4+5=15$

$a,\ qa,\ q^2a$ $\qquad \frac{x}{\sin 45^\circ}=\frac{f}{\cos\beta}$



$ax^2+2qax+q^2a=0$

$\sin(90+\beta)=\cos\beta$

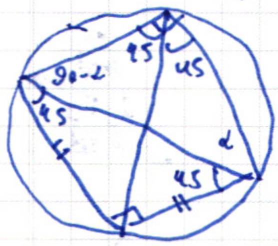
$S=x^2\cdot\sin(90+\beta)$

$x^2+2qx+q^2=0$ $\quad \frac{2x}{\sqrt2}=\frac{\sqrt{29}}{5}$ $\quad tg=\frac{2}{5}$

$(x+q)^2=0$

Ответ: $q^2a=-1$ $\quad \cos=\frac{2}{\sqrt{29}}$

$1+tg^2=\frac{29}{25}$ $\quad \frac{1}{\cos^2}=\frac{25}{29}$ $\quad \cos\beta=\frac{5}{\sqrt{29}}$

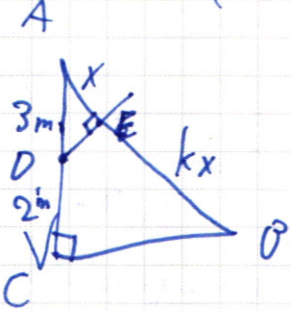


$x=-q$ $\quad -q=q^3\cdot a$

4, 5 или 6.

$-1=q^2a$

СЧ!



$S=$

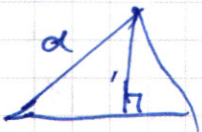
$tg\,\beta=\frac{2}{5}$

$\frac{AB}{5m}=\frac{3m}{AE}$ $\qquad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

$\frac{(1+k)x}{5m}=\frac{3m}{x}$ $\qquad AD\cdot AC=AB\cdot AE$

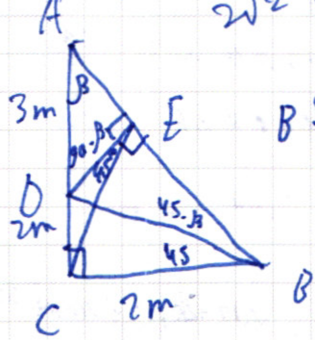
$S=2m.$

$(1+k)x^2=8m^2$

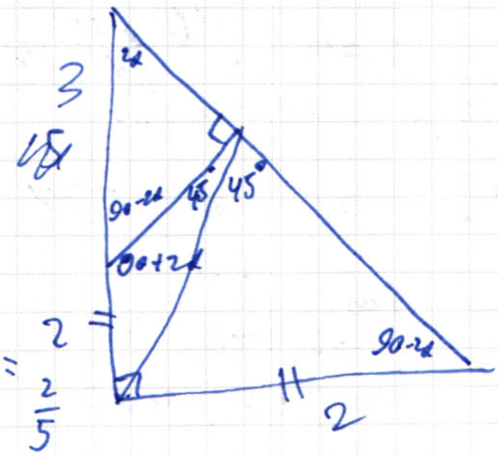


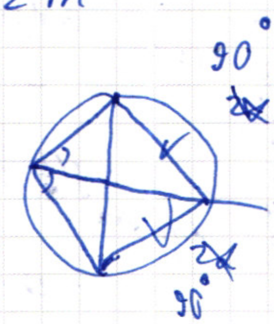
$2\sqrt2\,m$

$x\sqrt{1+k}=2\sqrt2\,m$



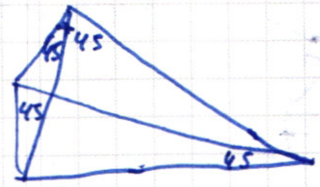
$BD=2\sqrt2\,m$





стороны равны т.к. углы (дуги) равны

$tg\,BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$



$AC=\sqrt{29}$ $\Rightarrow BC=\frac{2}{5}\sqrt{29}$

$S=\frac12 AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}=\frac{29}{5}=5{,}8$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть q – множитель прогрессии, тогда: $b = qa$
a – первый член

$c = q^2 a$

$x = q^3 a$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2qax + q^2 a = 0$

$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0$

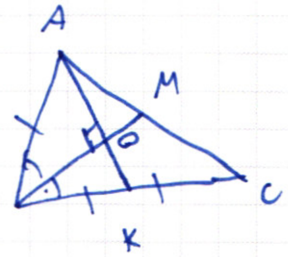
$\begin{cases} x = -q \\ x = q^3 a \end{cases}$

$q^3 a = -q$

$q^2 a = -1 = c$

Ответ: $c = -1$

2.



AK – мед

BM – бисс

$AK \perp BM$

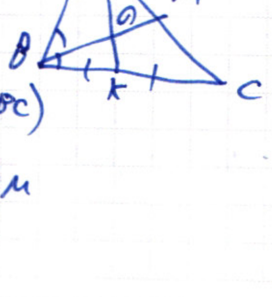
$O = AK \cap BM$

Рассм. $\triangle BAK$:

$\left.\begin{array}{l} BO \text{ – бисс (усл)} \\ BO \text{ – выс (усл)} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = BK = \frac{1}{2} BC$

Таким образом получаем, что ~~для равенства~~ + ~~$2AB = BC$~~ – ! для выполнения свойства, описанного в условии необходимо, чтобы одна сторона треугольника была в 2 раза больше другой.

Теперь докажем, что это условие является достаточным:



AK – мед

BM – бисс

$2AB = BC$

$(AB = BK = \frac{1}{2} BC)$

$O = AK \cap BM$

$\triangle ABK$ – р/б (усл) $\Rightarrow$ BO – высота +

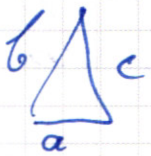
BO – бисс (усл)

$(BO \perp AK) \Rightarrow BM \perp AK$

BO – отрезок прямой BM

2. Таким образом мы доказали, что для выполнения св-ва из условия необходимо и достаточно того, чтобы одна сторона 3-угольника была в 2 раза длиннее другой. Теперь посчитаем ~~коне~~ количество таких треугольников, записав неравенство треугольника:

a, b, c – стороны Δ



$a = m$

$b = 2a = 2m$

$c = 1200 - a - b = 1200 - 3m$

$a + b > c$

$3m > 1200 - 3m$

$6m > 1200$

$m > 200$

$a + c > b$

$1200 - 3m + m > 2m$

$1200 > 4m$

$m < 300$

$a < b + c$

$m < 2m + 1200 - 3m$

$2m < 600$

$m < 300$

$\Downarrow$

$200 < m < 300$

$(m \in (200; 300))$

Натуральных чисел в промежутке $(200; 300)$ 99. Следовательно всего 99 треугольников.

Докажем, что мы не могли посчитать какой-нибудь 3-угольник дважды: (равные 3-угольники с разными m)

$200 < a < 300$

$400 < b < 600$

$1200 - 900 < c < 1200 - 800$

$\Downarrow$

$300 < c < 600$ доказано

$a = m$

$b = 2m$

$c = 1200 - 3m$

$200 < m < 300$

Таким образом ~~можно сказать~~, что a всегда меньше b и c, а если треугольники равны, то у них равны меньшие стороны (стороны a), но a всегда принимает разные значения (каждое по 1 разу). Следовательно никакой треугольник не посчитан ~~Δ~~ дважды, значит всего их 99.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Rightarrow$

ОДЗ:
$\begin{cases} y-2x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2x \\ xy-2x-y+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-2) \geq 0 \end{cases}$

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$(y-2x)^2 = xy-2x-y+2$

$4x^2-4xy+y^2 = xy-2x-y+2$

$4x^2 \cancel{+2x} -5xy+2x+y^2+y-2=0$

$4x^2+x(2-5y)+(y^2+y-2)=0$

$D = b^2-4ac = 25y^2-20y+4-16y^2-16y+32 = 9y^2-36y+36$

$\sqrt{D} = 3|y-4|$

$x_1 = \dfrac{5y-2+3|y-4|}{8}$ $\quad x_2 = \dfrac{5y-2-3|y-4|}{8}$

$y \geq 4$:

$x_1 = \dfrac{8y-14}{8} = \dfrac{4y-7}{4}$

$x_2 = \dfrac{2y+10}{8} = \dfrac{y+5}{4}$

$y < 4$:

$x_1 = \dfrac{\cancel{8y}\,2y+10}{8} = \dfrac{y+5}{4}$

$x_2 = \dfrac{8y-14}{8} = \dfrac{4y-7}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y+5}{4} \\ x = \dfrac{4y-7}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = y+5 \\ 4x = 4y-7 \end{array}\right.$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \quad |\cdot 8$

$16x^2+8y^2-32x-32y+24=0$

1) $4x=y+5$: $\qquad x=\dfrac{y+5}{4}$

$y^2+10y+25+8y^2-8y-40-32y+24=0$

$9y^2-30y+9=0 \qquad y_1=3 \quad x_1=2$

$3y^2-10y+3=0 \qquad y_2=\frac{1}{3} \quad x_2=\frac{4}{3}$

$(y-3)(3y-1)=0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

3. ОДЗ: $y_1 < 2x_1$, $y_2 < 2x_2$ $\Rightarrow$ * пары корней не подходят

2) $4x = 4y - 7$:

$$16x^2+8y^2-32x-32y+24=0$$

$$16y^2-56y+49+8y^2-32y+56-32y+24=0$$

$$24y^2-120y+129=0$$

$$8y^2-40y+43=0$$

$$D = 1600-1376 = 224 = 16\cdot 14$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{224} = 2\sqrt{56} = 4\sqrt{14}$$

$$y = \frac{40\pm 4\sqrt{14}}{16} = \frac{10\pm\sqrt{14}}{4}$$

$$4y = 4x+7 = 10\pm\sqrt{14}$$

$$4x = 3\pm\sqrt{14}$$

$$x = \frac{3\pm\sqrt{14}}{4}$$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{14}}{4}$ $y_1 = \frac{10+\sqrt{14}}{4}$

$2x_1 = \frac{6+2\sqrt{14}}{4}$ $\cancel{\lor}$

$\cancel{6}+\cancel{2}\sqrt{14}$ $\cancel{\lor}$ $\cancel{10}+\sqrt{14}$

$\sqrt{14} < 4$ $(\sqrt{16}=4)$

$\Downarrow$

$2x_1 \le y_1$ * ОДЗ выполняется

$x_2 = \frac{3-\sqrt{14}}{4} < 0$

$y_2 = \frac{10-\sqrt{14}}{4} > 0$

$\Downarrow$

$2x_2 = \frac{6-2\sqrt{14}}{4}$ $2x_2 \le y_2$

$6-2\sqrt{14}$ ОДЗ выполн.

$$\begin{cases} x_1 - 1 = \frac{\sqrt{14}-1}{4} \ge 0 \\ y_1 - 2 = \frac{2+\sqrt{14}}{4} \ge 0 \end{cases}$$

ОДЗ выполняется

$\Downarrow$

$(x_1-1)(y_1-2) \ge 0$

$\Downarrow$

пара корней подходит

$x_2 - 1 = \frac{-1-\sqrt{14}}{4} \le 0$ $(\sqrt{14} > \sqrt{4} = 2)$

$y_2 - 2 = \frac{2-\sqrt{14}}{4} \le 0$

$\Downarrow$

$(x_2-1)(y_2-2) \ge 0$ $\Rightarrow$ пара корней подходит

Ответ:

$x_1 = \frac{3+\sqrt{14}}{4}$ $y_1 = \frac{10+\sqrt{14}}{4}$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{14}}{4}$ $y_2 = \frac{10-\sqrt{14}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. 4. $D \in AC$, $E \in AB$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$DE \perp AB$

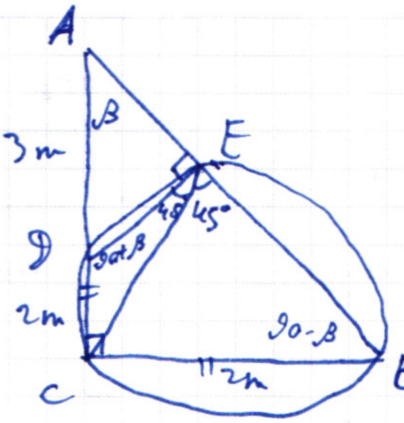
$\angle C = 90^\circ$

(AB - диам)

$AC = \sqrt{29}$

$\angle CED = 45^\circ$

1) найти $tg \angle BAC$



$DEB = 90^\circ \Rightarrow CEB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

($DE \perp AB$)

$\angle DCB = 90^\circ \Rightarrow$ ~~tg~~ $BEDC$ - впис. 4-уг.

($\angle DCB + \angle DEB = 180^\circ$)

$\angle DEC = \angle CEB \Rightarrow$

~~CD~~ $\breve{CD} = \breve{BC} \Rightarrow BC = CD$

(~~равные~~ хорды ~~на~~ ~~равных дугах~~ ~~опсекают~~ равные дуги.)

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AC = 5m$, $AD = 3m \Rightarrow CD = 2m$

$BC = CD = 2m \Rightarrow tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$

2) Пусть $\angle BAC = \beta$

$\angle ABC = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle CDE = 180^\circ - (90 - \beta) = 90^\circ + \beta$

$tg\beta = \frac{2}{5} \Rightarrow 1 + tg^2\beta = \frac{29}{25} \Rightarrow \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$1 + tg^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\sin(90 + \beta) = \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\sin(45 - \beta) =$

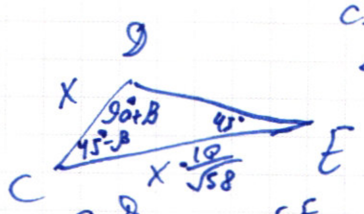
$= \sin 45^\circ \cos\beta - \sin\beta\cos 45^\circ =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{29}}$

Рассм $\triangle CDE$:

$CD = x$

$\angle DCE = 180 - \angle DE = 45^\circ - \beta$



$\frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{CE}{\sin(90+\beta)}$

$CE = CD \cdot \frac{\cos\beta}{\sin 45^\circ} = x \cdot \frac{\frac{5}{\sqrt{29}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = x \cdot \frac{10}{\sqrt{58}}$

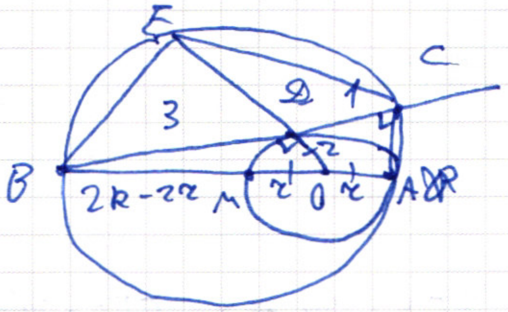
$S_{CDE} = \frac{CD \cdot DE \cdot \sin\angle C}{?} =$

$= x \cdot x \cdot \frac{10}{\sqrt{58}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{29}} = \frac{15}{29} \cdot x^2$

$x = CD = \frac{2}{5} AC = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29}$

$S_{CDE} = \frac{3 \cdot 5}{29} \cdot \frac{2^2}{5^2} \cdot 29 = 2{,}4$

5.



Т.к. AB - диаметр Ω, а $B = \Omega \cap \omega$, то AB содерж. диаметр ω (MA) по т. об окр. с общ. касательной. (касающихся друг друга)

AB - диаметр Ω

$M = \omega \cap AB$

$BD = 3$

$CD = 1$

$\angle BCA = 90^\circ$ (BA - диаметр)

r - радиус ω

R - радиус Ω

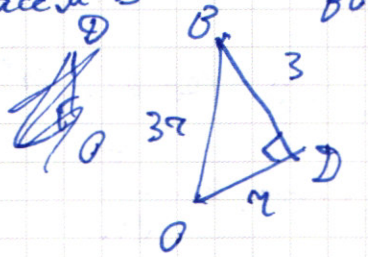
O - центр ω, $O \in AM$, $MO = OA = OD = r$

т.к. ~~BD рас~~ BC - ~~кас~~ кас ω, то $OD \perp BD$

$BM = AB - AM = 2R - 2r$

$\Rightarrow OD \parallel AC \Rightarrow$ ($OD \perp BC$, $AC \perp BC$)

~~расс~~ рассм $\triangle BOD$: $BO = 2R - r = 3r$



по т. Фалеса

$$\frac{OB}{AO} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{1} = \frac{2R-r}{r}$$

$\Downarrow$

$3r = 2R - r$

$2r = R$

$BO^2 = OD^2 + BD^2$

$9r^2 = r^2 + 9$

$8r^2 = 9$

$$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = 2r = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} 3 \cdot r = \frac{9}{4\sqrt{2}}$

$S_{\triangle ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle BOD} \Rightarrow$ (подобна т.к. $OD \parallel AC$)

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{4^2}{3^2} \cdot \frac{9}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Т.к. $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$, $f(ab) = f(a) + f(b)$, то:

$f(1) =$ Запишем все $f(i)$ от 2 до 21:

$f(2)$

$f(3)$

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 3, 5, 3, 6, 4, 3, 4, 8, 3, 9, 4, 4.

$f(3\cdot 1) = f(3) + f(1) \Rightarrow f(1) = f(3) - f(3) = 0$

$0 = f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

Тогда нужно для каждого $f(x)$ найти все y, такие, что $f(y) > f(x) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) + f(x) < 0$ *)

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f\left(\frac{x}{y}\right)$

*: отсортируем f_i:

~~1 по 1~~

2 по 1

4 по 2

6 по 3

4 по 4

1 по 5

1 по 6

~~1 по~~ 7

1 по 8

1 по 9

Ответ: ~~2(20-2)+ 4(20-4) + ... + (20-1) =~~

$= 2\cdot(20-2) + 4\cdot(20-6) + 6\cdot(20-12) +$

$+ 4\cdot(20-16) + 3 + 2 + 1 =$

$= 36 + \underbrace{\overbrace{56 + 48}^{84} + 8 + 6}_{70} = 156.$

~~С. Тарасуев~~