МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

$\cancel{2x^2-2}$ $2\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\right)=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-2\left(\frac{1}{16}+\frac{8}{16}\right)=$

$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

p p p p p p p p p p

$f(1)=\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor=0$

$f(2)=\left\lfloor\frac{2}{2}\right\rfloor=1$

$f(3)=1$

$f(5)=2$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f(1\cdot y)=f(1)+f(y)$

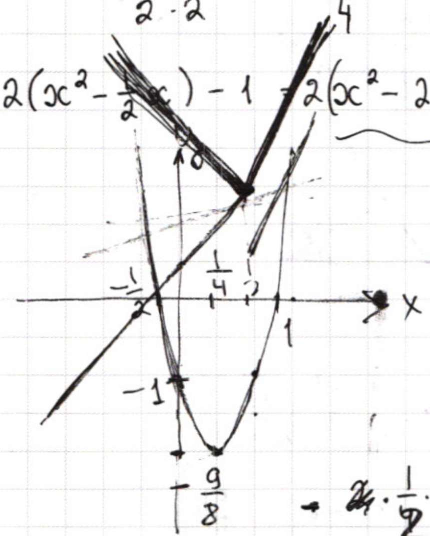
$1-3=-2$

$f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}=\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

$2\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)-1=2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)-1=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}-\frac{8}{8}=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

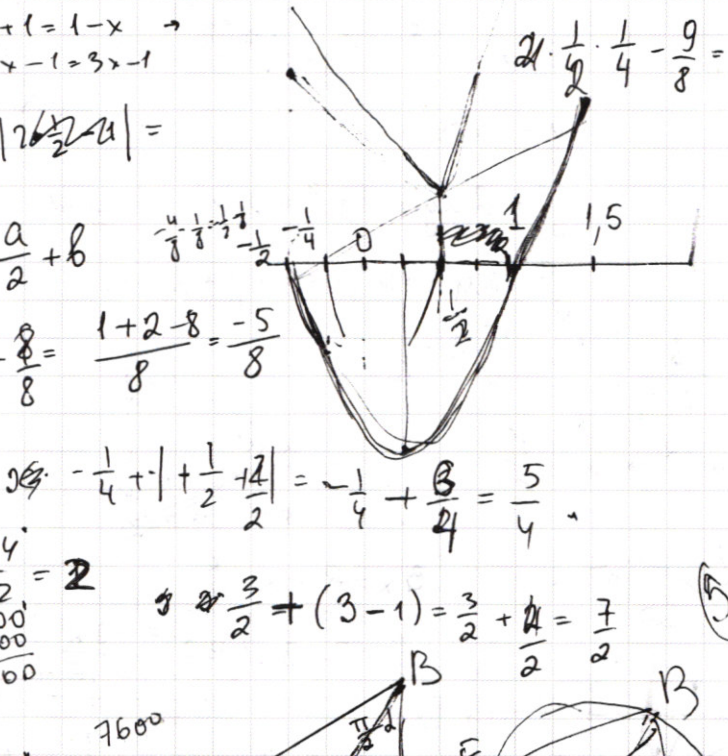


$x-2x+1=1-x$

$x+2x-1=3x-1$

$\frac{1}{2}+\left|2\cdot\frac{1}{2}-1\right|=$

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{9}{8}=\frac{1-9}{8}=\frac{-8}{8}=-1$



$-\frac{1}{2}\leq\frac{a}{2}+b$

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{8}{8}=\frac{1+2-8}{8}=\frac{-5}{8}$

$2\frac{9}{4\cdot 4}-\frac{3}{2}-1=\frac{9-3\cdot 4-8}{8}$

$-\frac{1}{4}+\left|1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}=\frac{5}{4}$

$49-25=24$

$5x-2\cdot 5\cdot 5x+25$

$2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-1=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{4}{2}=2$

$\frac{3}{2}+(3-1)=\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=\frac{7}{2}$

$10000-7600=2400$

$a+b \vee ab$

$3\cdot 8$

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=$

7600

$24=6\cdot 4$

$81-32=59-2$
$=51-2=$
$=50-1=49$

$x=1\pm$

n	2^n	$2n$
~~1~~	~~2~~	~~2~~
2	4	4
3	8	6
4	16	8

$2.5.9$

$2n \vee 2^n$

$y=\frac{100\pm\sqrt{10000-4\cdot 25\cdot 76}}{25\cdot 2}=\frac{100\pm 10\cdot\sqrt{24}}{5\cdot 5\cdot 2}=\frac{10\pm\sqrt{24}}{5}=\frac{10\pm 2\sqrt{6}}{5}$

20 36 56 48

$\frac{10000}{25\cdot 25}=\frac{100\cdot 100}{25\cdot 25}=4\cdot 4$

$\frac{10000}{2500}$

$21-3=20-2=18$

$=4\pm\sqrt{24}$

$(5y)^2-5y\cdot 2\cdot 10+100-100+76$

$25y^2-2\cdot 5\cdot 10y+100$

2 3 ... 21

1 2 ... 20

25

96

$6\cdot 8=12\cdot 4=48$

$100-76=30-6=24$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

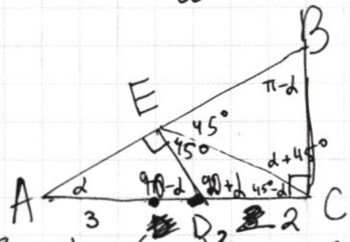
$a;\ b=aq;\ c=\underbrace{aq^2}$

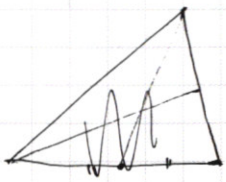
$x=\dfrac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\dfrac{-aq\pm\sqrt{a^2q^2-a^2q^2}}{a}=\dfrac{-aq}{a}=-q$

$a_4=aq^3=-q$

$aq^2=x\to\quad x\cdot q=-q\quad x=(-1)$

$tg\,\alpha=?$





$2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2$

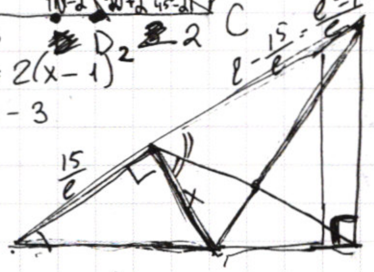
$y^2-4y+4+3-3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$

$y-2x\geq 0$

$y^2-2xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-xy+4x^2+2x+y+2=0$



$\dfrac{x}{3}=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+25}}\qquad \dfrac{x^2}{9}=\dfrac{h^2}{h^2+25}$

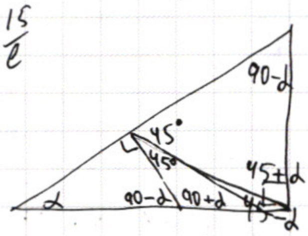
$x^2h^2+25x^2=9h^2$

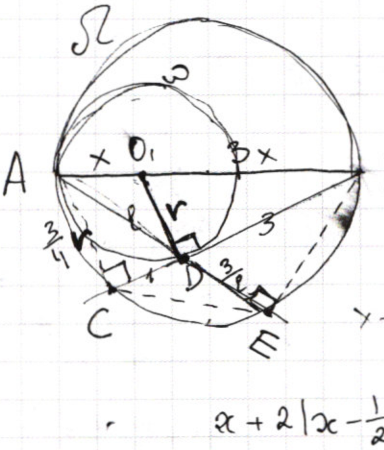
$25x^2=(9-x^2)h^2$

$h^2=\dfrac{25x^2}{(9-x^2)}$

$\dfrac{3}{kl}=\dfrac{l}{5}\qquad kl=\dfrac{15}{l^2}l=\dfrac{15}{l}$

$15=kl^2\to k=\dfrac{15}{l^2}$





$4x=R\to x=\dfrac{R}{4}$

$\boxed{r^2+9=\left(\dfrac{3R}{4}\right)^2=\dfrac{9R^2}{16}}$

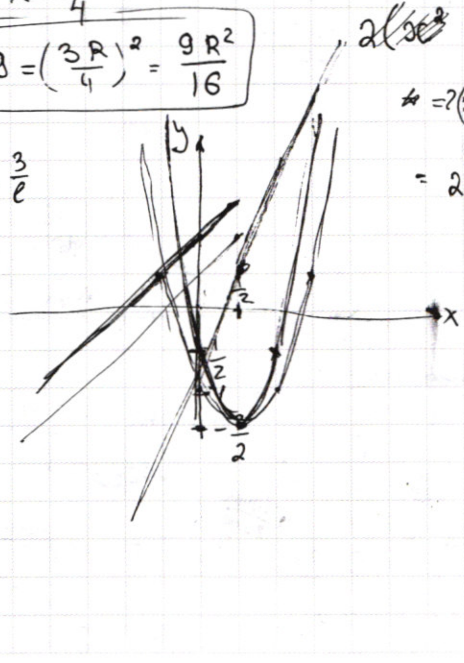
$1\cdot 3=l\cdot\dfrac{3}{l}$

$x-\frac{1}{2}<0$

$2\left(x^2-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=$

$=2\left(x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{8}{4}\right)=$

$=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$



$x+2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$

$x<\dfrac{1}{2}\quad x-2x+1=-x+1$

$x+2x-1=3x-1$

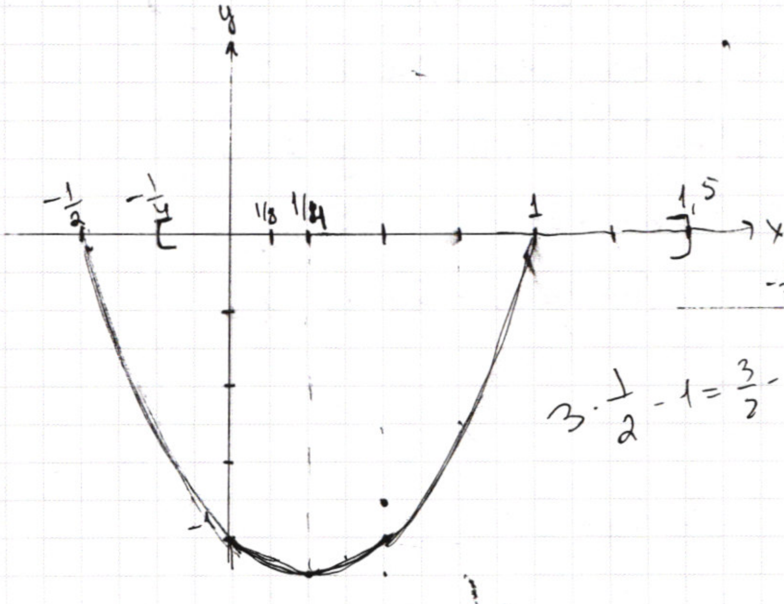
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

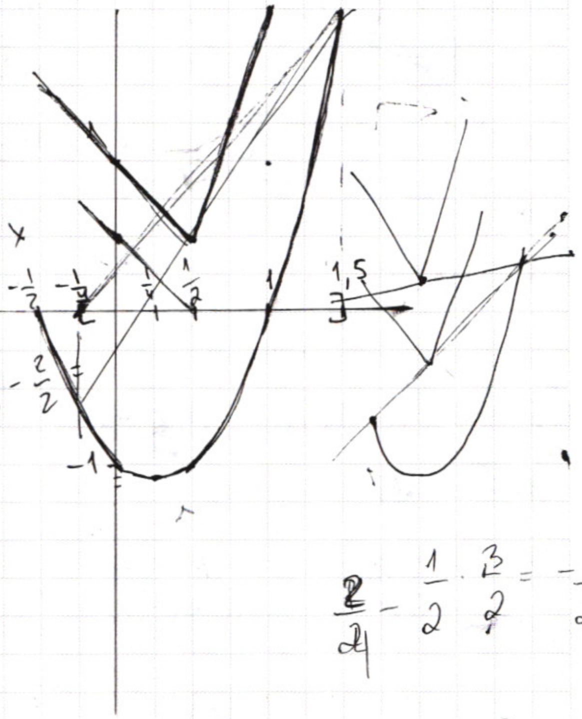
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

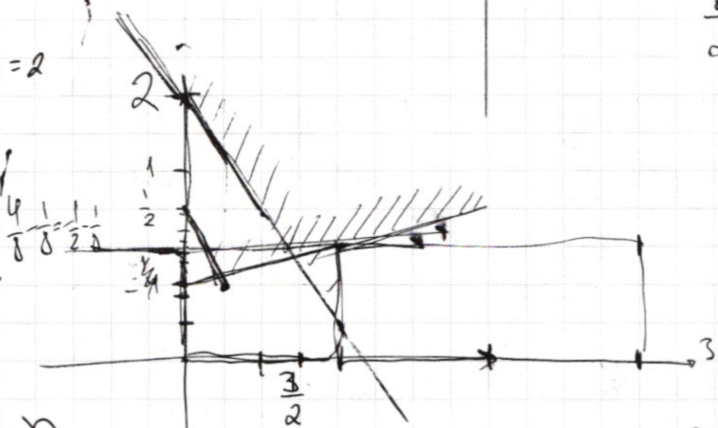




$3\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{3}{2}-\frac{2}{2}$

$\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

$2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=\frac{4}{2}=2$



$2x-1<0$

$2x<1$

$x<\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

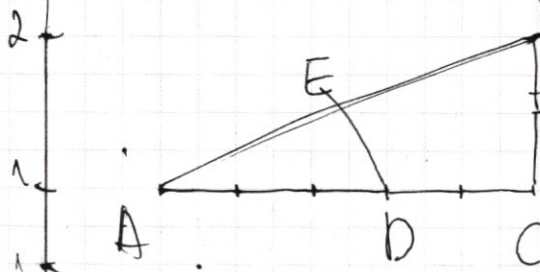
$\frac{2}{2}-\frac{3}{2}$

$\frac{4}{8}$

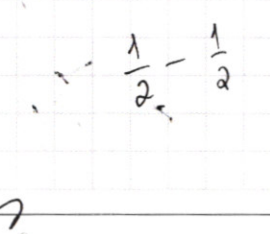
$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}-\frac{8}{8}=\frac{-5}{8}$

$2\cdot\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{4}{2}$

$2-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}$



$-\frac{5}{8}+\frac{3}{4}=-\frac{5}{8}+\frac{6}{8}=\frac{1}{8}$



$\frac{BC}{ED}$

$\frac{1}{2}$

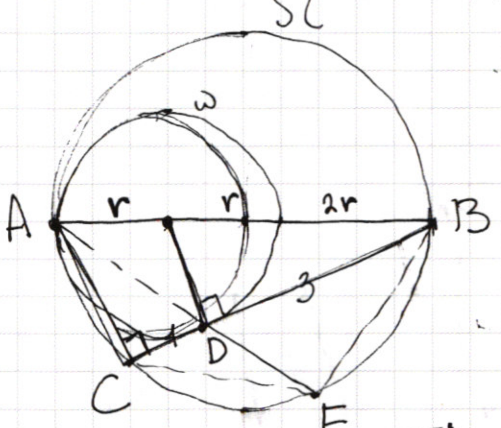
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

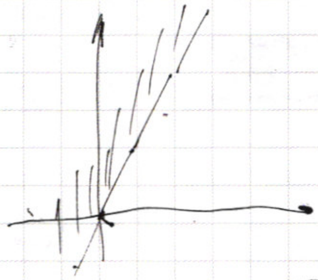
(Нумеровать только чистовики)

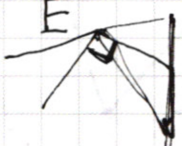


$R = 2r$

$y - 2x > 0$

$y > 2x$





$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 + y - 5xy + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$4x^2 + y^2 + 2x + y - 5xy - 2 = 0$

$2x^2 + 6x + 5y - 5xy - 5 = 0$

$4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$2x^2 + (6 - 5y)x + 5(y - 1) = 0$

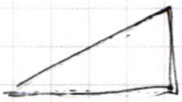
$(x+a)(x+b)($

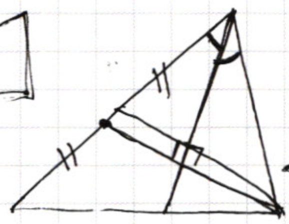
$(2x^2 - 4x + 2) + y^2 - 4y + 2 - 1 = 0$

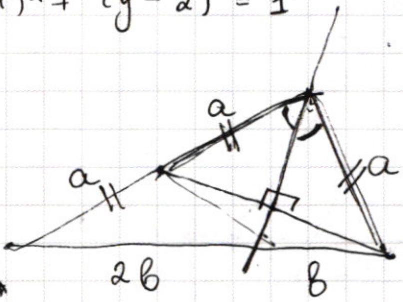
$x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$







$\mathbb{Z}$ необяз

$3a + 3b = 1200$

$\sqrt{y - 2x} = \sqrt{xy - 2x + y + 2}$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$2a + a \geq 3b$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0 \\ 4x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 6 = 0 \end{cases}$$

$b \in ($

$3a + 3b = 1200$

$4a$

$b \in (\frac{a}{3};$

$2a$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a - перв. чл. геом. прогрессии (по усл.), $\exists q$ - её множитель ($q \neq 0$),

тогда: $b = aq$ (т.к. второй чл.)

$c = aq^2$ (т.к. третий чл.)

Из усл. a_4 (четв. чл. геом. пр-ии) - корень $ax^2 + 2bx + c = 0$,

т.е. $a_4 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} =$

$= \frac{-aq \pm \sqrt{a^2q^2 - a\cdot(aq^2)}}{a} = \frac{-aq \pm \sqrt{a^2q^2 - a^2q^2}}{a} = \frac{-aq}{a} = -q$

↳ т.е. корень ровно один, это и есть a_4;

$$\begin{cases} a_4 = aq^3 \\ a_4 = -q \\ a_3 = c = aq^2 \text{ (искомое)} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} aq^3 = (-q) \\ aq^2 \cdot q = (-q) \\ cq = (-q) \end{array}$$

Т.к. $q \neq 0$ (иначе не получится геом. пр-ия), то ~~q~~ q можно сократить

$\Rightarrow c = (-1)$

Ответ: $c = (-1)$.

№7

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$ (по усл.)

$\Rightarrow f(1\cdot x) = f(1) + f(x)$

$f(x) = f(1) + f(x)$

$f(1) = f(x) - f(x) = 0$;

$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$

$\hookrightarrow f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

2) Тогда: $f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Т.к. нужно, чтобы $f(x/y) < 0$, то $f(x) - f(y) < 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow f(x) < f(y)$.

3) p-простое $\rightarrow f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ - округл. вниз (по условию)

$\Rightarrow f(p) < p$, т.к. для чётного p (только 2) $f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = [1] = 1$,

для нечётного $p = 2n+1$: $f(2n+1) =$

$= \left[\frac{2n+1}{2}\right] = \left[n + \frac{1}{2}\right] = n$, $n \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $n < 2n+1 = p$, т.е. $f(p) < p$.

4) * не простые числа в $[1; 21]$:

$\rightarrow \{4; 6; 8; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21\}$ и их разлож. на прост. множ-ли:

$\{2^2; 2\cdot3; 2^3; 2\cdot5; 2^4\cdot3; 2\cdot7; 3\cdot5; 2^4; 2\cdot3^2; 2^2\cdot5; 3\cdot7\}$

4.1) $f(2^n) = \underbrace{f(2) + \ldots + f(2)}_{n \text{ раз}} = n \cdot f(2) = n$

Т.е. $f(4) = 2 \cdot f(2) = 2 \cdot 1 = 2 < 4$

А. т.к. $\forall n > 1, n \in \mathbb{N}$ $2^n > n$,

то $2^n > n = f(2^n)$

4.2) Из простых мн. здесь встречаются ещё 3, 5, 7;

$f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$; $f(5) = \frac{5-1}{2} = 2$; $f(7) = \frac{7-1}{2} = 3$

Т.е. $f(ab) = f(a) + f(b) < a + b \rightarrow < ab$, если $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b > 1$
$\hookrightarrow$ подходит.

$\hookrightarrow \forall$ используемых аргументов f: $f(x) < x$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.е. $\forall x \in [1; 21] \quad f(x) < x$;

5) Предположим, что f – возрастающая функция.

Из (3) видно, что для p: $f(p) = f(2n+1) = n = \frac{p-1}{2}$,

$\frac{p}{2} - \frac{1}{2}$ – возрастающая;

$f(2) = 1$; $f(3) = 1$; $f(5) = 2$; $f(7) = 3$

Т.о. f – не возр. ф.

(~~...~~ $*$ для не простых:

x	разложение	$f(x)$
4	$2^2 = 2 \cdot 2$	2
6	$2 \cdot 3$	$1+1=2$
8	2^3	3
10	$2 \cdot 5$	$1+2=3$
12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	$2+1=3$
14	$2 \cdot 7$	$1+3=4$
15	$3 \cdot 5$	$1+2=3$
16	2^4	4
18	$2 \cdot 3 \cdot 3$	$1+1+1=3$
20	$2 \cdot 2 \cdot 5$	$1+1+2=4$
21	$3 \cdot 7$	$1+3=4$
9	$3 \cdot 3$	$1+1=2$

простые:

x	$f(x)$
1	0
2	1
3	1
5	2
7	3
11	5
13	6
17	8
19	9

6) (2): нужны x, y: $f(x) < f(y)$

Из таблиц видно, что

$\forall x \in [1; 21] \quad f(x) \in [0; 9]$, $f(x) \in \mathbb{Z}$

6.1) $f(x) = 0 \to x = 1$,

$\to f(y) > 0 \to y \in [2; 21] \to 20$ вар.

$1 \cdot 20 = 20$

6.2) $f(x) = 1 \to x = \{2; 3\} \to 2$ вар.

$f(y) > 1 \to y \in [4; 21] \to 18$ вар.

$2 \times 18 = 36$

6.3) $f(x) = 2 \to x - 4$ вар

$f(y) > 2 \to y \to 21 - 7 = 14$ вар

$4 \cdot 14 = 56$

6.4) $f(x) = 3 \to x \to 6$ вар.

$f(y) > 3 \to y - 8$ вар.

$6 \cdot 8 = 48$

6.5) $f(x)=4 \to x - 4$ вар
$f(y)>4 \to 4$ вар. $\Big\}\ 4\times 4=16$

~~f(x)=~~ 6.6) $f(x)=5 \to 1$ вар; $f(y)>5 \to 3$ вар $\}\ 1\times 3=3$

$f(x)=6 \to 1$ вар; $f(y)>6 \to 2$ вар $\}\ 1\times 2=2$

$f(x)=7 \to \varnothing$ вар

$f(x)=8 \to 1$ вар; $f(y)>8 \to 1$ вар $\}\ 1\times 1=1$

Если $f(x)=9=\max\limits_{x\in[1;21]} f$, то $\forall y\in[1;21]$ $f(y)\le f(x)$ — не подходит

Итого всего вариантов:

$20+36+56+48+16+3+2+1=$

$=20+40+56+50=166$

Ответ: 116 вариантов.

№6

$\underbrace{2x^2-x-1}_{\text{парабола}} \le \underbrace{ax+b}_{\text{прямая}} \le \underbrace{x+|2x-1|}_{\text{кусочно-линейная функция}}$

1) $2x^2-x-1=2(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16})-1=2(x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}-1=$
$=2(x-1/4)^2-9/8$

$x+|2x-1|$: $x\le 1/2 \to x-2x+1=(-x)+1$

$x>1/2 \to x+2x-1=3x-1$

$x=1/2 \to x+\varnothing=1/2$

вершина $=(\frac{1}{4};-\frac{9}{8})$

Сделаем чертёж в пропорции длина 1клетки $=1/4$

(Корни параболы: $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}=\{-\frac{1}{2};1\}$)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

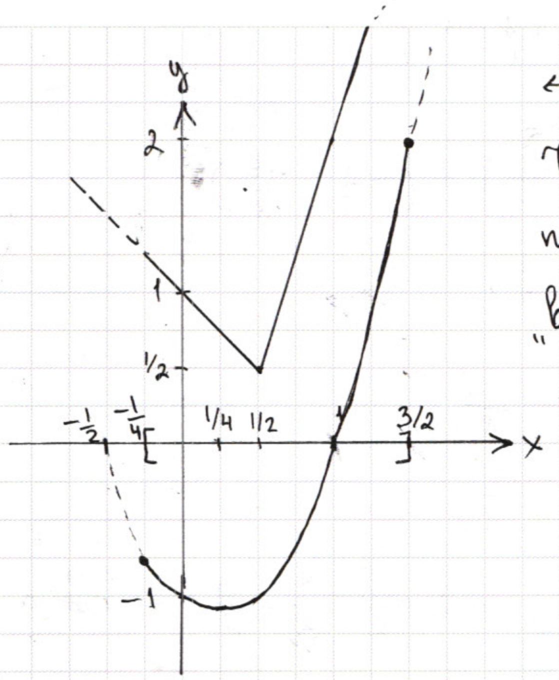
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



← * на $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

Чтобы выполнялось нерав-во из усл., прямая $ax+b$ должна проходить „выше" параболы на $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ и „ниже" модуля.

~~* крайний случ. с параболой:~~ $\cancel{ax+b \ni (-\frac{1}{4}; g(-\frac{1}{4})), (\frac{3}{2}; g(\frac{3}{2}))}$, ~~где~~ $\cancel{g(x) = 2x^2 - x - 1}$

$$\cancel{\rightarrow \begin{cases} a(-\frac{1}{4}) + b = 2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8} \\ a(\frac{3}{2}) + b = 2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}}$$

$$\cancel{\frac{3}{2}a + b = -\frac{5}{8}}$$

$$\cancel{\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b = -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{2}a + b = 2 \end{cases}}$$

$$\cancel{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)a = 2 + \frac{5}{8}}$$

$$\cancel{\frac{7}{4}a = \frac{21}{8} \Rightarrow a = \frac{4}{7}\cdot\frac{21}{8} = \frac{3}{2};}$$

$$\cancel{\hookrightarrow \frac{9}{2} + b = 2 \Rightarrow b = \frac{4}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2};}$$

~~т.е. * значение $ax+b$ в $(\frac{1}{2})$:~~

$$\cancel{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = \frac{3}{4} - \frac{10}{4} = -\frac{7}{4} < 0 < \frac{1}{2} = \min(f(x)),\quad f(x) = x + |2x-1|}$$

Крайние точки: параболы:

$(-\frac{1}{4}; g(-\frac{1}{4})) = (-\frac{1}{4}; 2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1) = (-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$;

$(\frac{3}{2}; g(-\frac{1}{4})) = (\frac{3}{2}; 2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1) = (\frac{3}{2}; 2)$

Модуля: $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

0 Если прямая (обозначим $h(x)$) „ниже" min f, то она „ниже" $f(x)$ $\forall x$
↳ т.е. эта прямая подходит.

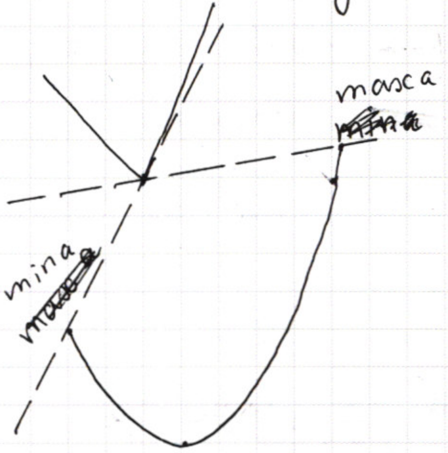
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) Рассмотрим крайние случаи по повороту прямой $h(x)$, т.е. по a:

наименьший угол наклона – когда h проходит через „угол" f и точку $\left(\frac{3}{2}; g\left(\frac{3}{2}\right)\right)$;

наибольший – через $\left(-\frac{1}{4}; g\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$ и „угол" f

(схематично, для наглядности:)



2.1) : $\left(-\frac{1}{4}; g\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4}; \frac{-5}{8}\right)$

и $\left(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b = \frac{-5}{8} \\ \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)a = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \rightarrow a = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{2} = \min a$$

$$\cancel{b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{4}}$$

2.2) $\left(\frac{3}{2}; g\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

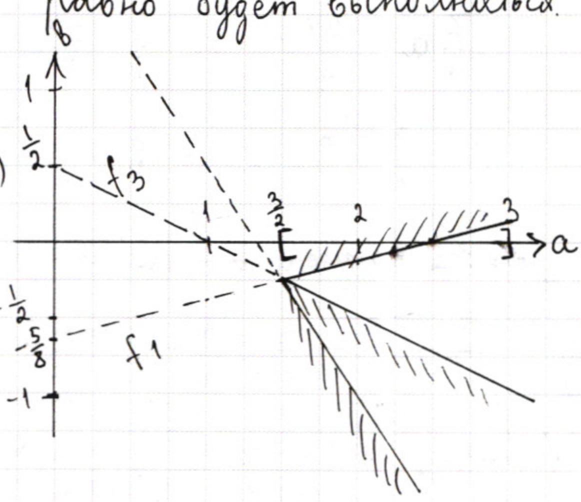
$$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b = 2 \\ \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \left(\frac{3}{2} - 1\right)a = 2 - \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 3^{*} = \max a$$

* коэф. совпадает с max коэф. при f, → может быть, на $(+1/2; +\infty)$ h и f будут совпадать, но „≤" всё равно будет выполняться.

3) Выразим b через a:

$$\forall a \in \left[\frac{3}{2}; 3\right]: \begin{cases} h\left(-\frac{1}{4}\right) \geq \frac{-5}{8} \\ h\left(\frac{3}{2}\right) \geq 2 \\ h\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b \geq \frac{-5}{8} \\ \frac{3}{2}a + b \geq 2 \\ \frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} b \geq \frac{-5}{8} + \frac{1}{4}a = f_1(a) \\ b \geq 2 - \frac{3}{2}a = f_2(a) \\ b \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a = f_3(a) \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим (из чертежа), что f_1, f_2, f_3 перес-ются в одной точке: $f_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-5}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

$$f_2\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{8-9}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$f_3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{4}$$

2 Прямые пер-ся в $\leq$ 1 точке, значит, больше пересечений нет

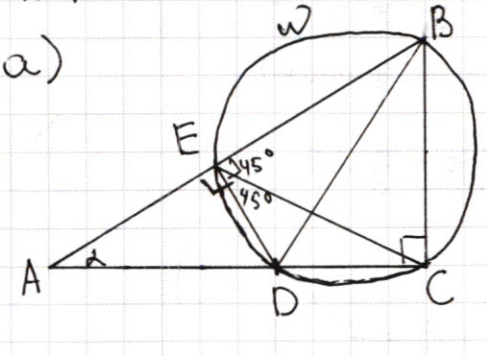
+ это единственная точка, удовлетворяющая системе

Т.е. ед. подходящее $b = -1/4$. (при $a = \frac{3}{2}$).

Ответ: подойдёт только $(a;b) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

№ 4

а)



1) $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90°$;

$\angle CED = 45°$ (по усл)

$\hookrightarrow \angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 90° - 45° = 45°$;

$\exists\ \angle CAB = \alpha$

$\Rightarrow \angle ADE = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $\rightarrow \angle EDC = \frac{\pi}{2} + \alpha$;

$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

2) $\sphericalangle EBCD$: $\angle DEB = \angle BCD = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle EDC + \angle EBC = 2\pi - (\angle DEB + \angle BCD) =$
$= 2\pi - \pi = \pi$.

Т.е. EBCD можно описать окружностью ω, при этом DB – её диаметр.

Тогда $\left.\begin{array}{l}\angle DBC = \angle DEC \\ \angle BDC = \angle BEC\end{array}\right\}$ опираются на одни дуги ($\smile DC$ и $\smile BC$ соотв-но).

Тогда: $\triangle DBC$: прямоуг ($\angle C = \pi/2$) и р/б
(т.к. $\angle CDB = \angle CEB = \angle DEC$) → острые углы по $45°$

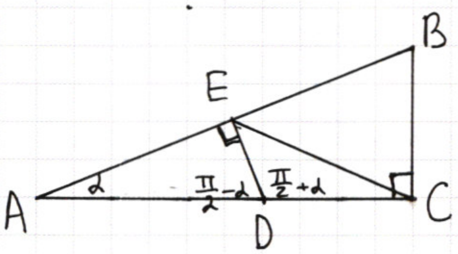
↳ $DC = CB$.

3) $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ (по усл)

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{DC}{AC} = \frac{AC - DA}{AC} = 1 - \frac{AD}{AC} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \\ \frac{DC}{AC} = \frac{CB}{AC} \end{cases}$$

$$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$$

б)



1) $AC = \sqrt{29}$ (по усл)

$\Rightarrow \frac{DC}{\cancel{A}} = \frac{2}{5} AC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

~~2) $\triangle AED$ - прямоуг~~

~~$\Rightarrow tg \angle BAC = tg \angle EAD = \frac{DE}{AE}$~~

~~↳ $DE = tg(\angle EAD) \cdot AE = \frac{2}{5} AE$;~~

~~По Теореме~~ 2) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{AE} \rightarrow DE = AE \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5} AE;$$

По Теореме Пифагора для $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + \frac{4}{25} AC^2 = \frac{29}{25} AC^2 \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{29}}{5} AC$$

или: $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DE = BC \cdot \frac{AD}{AB}$;

$$DE = \left(\frac{2}{5} AC\right) \cdot \left(\frac{3}{5} AC\right) \cdot \frac{5}{\sqrt{29} AC} = \frac{2 \cdot 3}{5\sqrt{29}} \cdot AC = \frac{6}{5 \cdot \sqrt{29}} \cdot \sqrt{29} = \frac{6}{5}$$

3) $\angle BAC = \alpha \rightarrow \angle ADE = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (острый в прямоуг. треуг.)

$\angle EDC = \frac{\pi}{2} + \alpha$ (смежный к $\angle ADE$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~sin~~ $\sphericalangle \sin(\angle EDC) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} = \cos\alpha = \cos\angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{29}}{5}AC} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

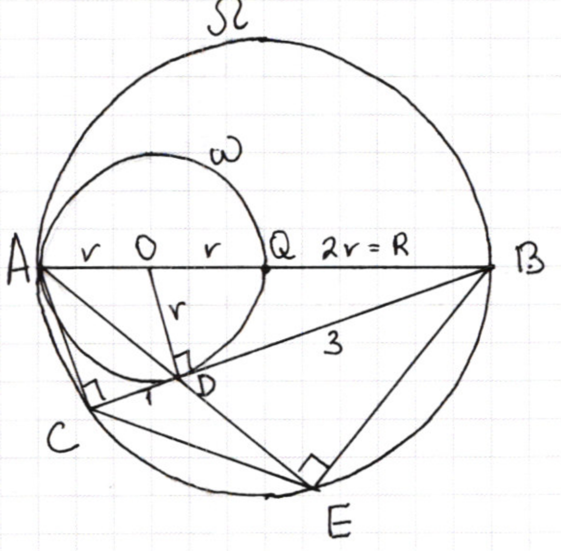
4) $S(\triangle CED) = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot DC\cdot \sin(\angle EDC) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{6\cdot 2}{2\cdot 5} = \frac{6}{5}$

Ответ: а) $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{5}$;

б) $S(\triangle CED) = \frac{6}{5}$.

№5



1) $OD \perp CB$, где O – центр ω,
т.к. BD – касательная (по усл.)

$\angle ACB = \pi/2$, т.к. $C \in \Omega$, AB – диаметр

↳ $\triangle ACB \sim \triangle ODB$ (по двум углам)

$\Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{CB}{DB} = \frac{CD+DB}{DB} = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3}$

$\frac{AO}{OB} = \frac{AB-OB}{OB} = \frac{AB}{OB} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$;

$AO = r$ – радиус ~~меньшей~~ ω
$AB = 2R$ – диаметр Ω.

$\frac{AB}{AO} = \frac{AB}{OB}\cdot\frac{OB}{AO} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{1} = \frac{4}{1} \Rightarrow$

$AB = 4AO$
$2R = 4r$
$\boxed{R = 2r}$!

Т.е. $\omega \cap AB = \{A; Q\}$, где Q – центр Ω.

2) $OD = r$; ~~$\triangle AODB$:~~ ~~~~

Теорема Пифагора для $\triangle ODB$: $OB^2 = OD^2 + DB^2$

$(3r)^2 = r^2 + 3^2$

$9r^2 = r^2 + 9$

$8r^2 = 9 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4};$

$\Rightarrow R = 2r = \frac{3\sqrt{2}}{2};$

3) Из подобия $\triangle ACB$ и $\triangle ODB$:

$\frac{AC}{OD} = \frac{CB}{DB} \rightarrow AC = \frac{CB}{DB} OD = \frac{4}{3} r$

По теореме Пифагора для $\triangle ACD$:

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = \frac{16}{9} r^2 + 1 = \frac{16}{9} \cdot \frac{9}{8} + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3};$

$AD \cdot DE = CD \cdot DB$ (по теореме о пересечении хорд)

$\Rightarrow DE = \frac{CD \cdot DB}{AD} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = AD \quad \Rightarrow AE = AD + DE = 2\sqrt{3}$

4) Теорема cos для $\triangle ADB$:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos\alpha$ ($\cos\alpha < 1$, т.к. угол тупой)

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2\,AD \cdot BD} = \frac{3 + 9 - (4r)^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3} = \frac{3 + 9 - 4R^2}{6\sqrt{3}} =$

$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(12 - 4 \cdot \frac{9 \cdot 2}{4}\right) = \frac{12 - 9 \cdot 2}{6\sqrt{3}} = \frac{12-18}{6\sqrt{3}} = \frac{2-3}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\hookrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{2/3}$

5) $S(BACE) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin\angle(BC; AE) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{2}.$

Ответ: радиус $\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$;

радиус $\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

$S(BACE) = 4\sqrt{2}$.

$4a < 1200 < 6a$

$2a < 600 < 3a$

$\Rightarrow \begin{cases} a < 300 \\ 200 < a \end{cases}$ $a \in (200; 300) \leftrightarrow a \in [201; 299]$

↳ 99 вариантов a, для каждого $\exists b$, что треугольник будет подходить условию.

Ответ: 99 треугольников.

~~№3~~

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$ (ОДЗ: $y \geq 2x$)

$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$

$2x^2 + (6-5y)x + 5(y-1) = 0$

$x = \frac{5y - 6 \pm \sqrt{36 - 2\cdot 6\cdot 5y + 25y^2 - 4\cdot 2\cdot 5(y-1)}}{2\cdot 2} =$

$= \frac{1}{4}\left(5y - 6 \pm \sqrt{36 - 60y + 25y^2 - 40y + 40}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(5y - 6 \pm \sqrt{76 - 100y + 25y^2}\right) = \frac{1}{4}\left(5y - 6 \pm \sqrt{(5y-10)^2 - 24}\right)$

2) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0 \\ 4x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 6 = 0 \end{cases}$

$y^2 + 5xy - 10x - 9y + 8 = 0$ $y^2 + (5x-9)y + (8 - 10x) = 0$

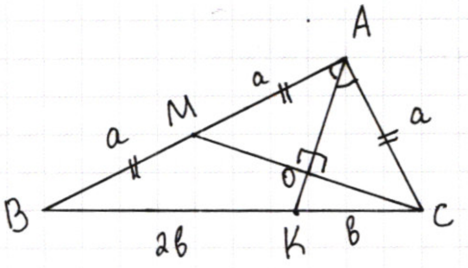
$y = \frac{9 - 5x \pm \sqrt{81 - 90x + 25x^2 - 32 + 40x}}{2} =$

$= \frac{1}{2}\left(9 - 5x \pm \sqrt{25x^2 - 50x + 49}\right) = \frac{1}{2}\left(9 - 5x \pm \sqrt{(5x-5)^2 + 24}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2



∃ △ABC — подходит условию,

т.е. AK⊥CM, CM — медиана, AK — бис-са

(бис-са не может быть ⊥ медиане, проведённой из той же вершины, т.к. тогда угол в этой вершине ≥ 2 · угол между бис-ой и мед-ой $= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ (т.к. оба луча внутри угла) ↪ противоречие)

1) ∃ $CM \cap AK = O$.

→ △MAO = △CAO (по общей к ней стороне AO и двум прилежащим углам)

⇒ $AC = AM = MB = a$; $a \in \mathbb{N}$;

По свойству бис-сы: $\frac{AC}{AB} = \frac{CK}{BK} = \frac{1}{2}$

⇒ $BK = 2b$, $KC = b$, $b \in \mathbb{R}$, но $3b \in \mathbb{N}$ (по усл).

По нер-ву треугольника:

$$\begin{cases} BA + AC > BC \\ AB + BC > AC \\ AC + CB > AB \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 3a > 3b & \Rightarrow a > b \\ 2a + 3b > a & \rightarrow \text{всегда так, т.к. } a > 0 \rightarrow 2a > a \\ a + 3b > 2a & \rightarrow 3b > \frac{a}{3} \end{cases}$$

Т.е. $3b \in (a; 3a)$

⇒ p — периметр: $p \in (4a; 6a)$

2) $p = 3a + 3b = 1200$, $a \in \mathbb{Z}$

$\underset{\mathbb{Z}}{a} + b = \underset{\mathbb{Z}}{400} \Rightarrow b \in \mathbb{Z}$