МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

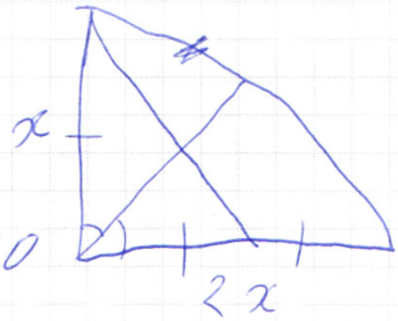
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = b_1 = \frac{c}{q^2}$

$b = b_1 q = \frac{c}{q}$

$c = b_1 q^2$



$b_1 x^2 - 2b_1 q x + b_1 q^2 = 0$

$\cancel{x^2 - 2qx + q^2 = 0}$

$\cancel{x = 2b_1 q^3}$ $\qquad x = b_1 q^3 = c \cdot q$

$\cancel{b_1^3 q^4}$ $\qquad \cancel{b_1}\frac{c}{q^2} \cdot c^2 \cdot q^2 - 2\frac{c}{q} \cdot cq + c = 0$

$c^3 - 2c^2 + c = 0$

$c(c^2 - 2c + 1) = 0$

$c(c-1)^2 = 0$

$c = 0$ или $c - 1 = 0$

$c = 1$

$x = 300 - \frac{k}{3}$

$900 - 3x > x$

$900 > 4x$

$450 > 2x$

$225 > x$

$\cancel{k > x}$

$\cancel{k > 300 - \frac{k}{3}}$

$\cancel{\frac{4}{3}k > 300}$

$\cancel{4k > 900}$

k

$3x + k = 900$

$k = 900 - 3x$

$k < 3x$

$900 - 3x < 3x$

$6x > 900$

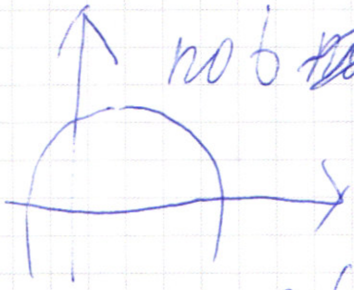
$2x > 300$

$x > 150$

$x \geq 6y$

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \geq 0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$z^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}z\right)^2 = x^2$$



пов

$$\cancel{(6y-x)+(xy+6)}$$

$$z^2+\frac{4\cdot 3}{9}z^2=x^2$$

$$-8\cdot\frac{1}{4}-3+7=\frac{z^2}{1}+\frac{4}{3}z^2=\frac{7}{9}$$

$$2(y^2-2y) \qquad 2(y-2)^2 \qquad \frac{7}{3}z^2=\frac{7}{9}$$

$$\frac{1}{8} \qquad (x^2-12x) \qquad (x-6)^2 \qquad z^2=\frac{1}{3}$$

$$-8\frac{9}{64}+\frac{9}{4}+7=-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+7=-20 \qquad z=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{9}{8}+7=8\frac{1}{8}$$

$$2(y-2)^2+(x-6)^2-20 \qquad \cancel{2\ 20-20}=0$$

$$x_B=-\frac{6}{-16}=\frac{3}{8}$$

$$-8+6+7=5 \qquad \cancel{xy-6y-x+6}$$

$$\cancel{\sqrt{(6y-x)(}}$$

$$\cancel{x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}}$$

$$\sqrt{y(x-6)-(x-6)}=$$

$$DC=\frac{2AC}{3} \qquad =\sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$DC^2=\frac{4AC^2}{9}=$$

$$=\frac{4\cdot 7}{9}$$

$$x^2-12y+36y^2=xy-6y-x+6$$

$$x^2+x+36y^2-6y-6-xy=0$$

$$(x^2-12x)+2(y^2-2y)+20=0$$

$$(x-6)^2+2(y-2)^2=24$$

252 × 36

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

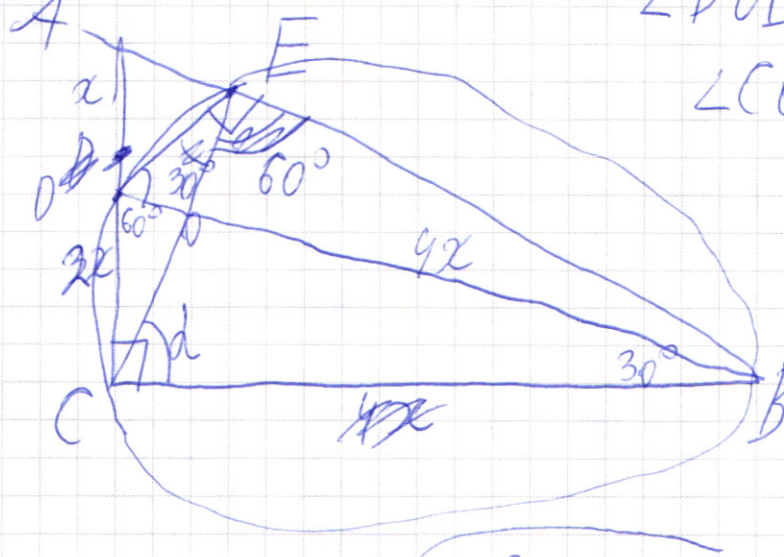
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle DOE = 180 - 30 - d = 150 - d$

$\angle COB = 180 - 150 - d$

$\sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12x^2} = 2\sqrt{3}x$

$x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{8}{3} = 0$

$D = \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{8}{3} =$

$= \frac{4 \cdot 9}{3} = 4 \cdot 3 = 12$

$x = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}}{2} < 0$

$x = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}}{2} =$

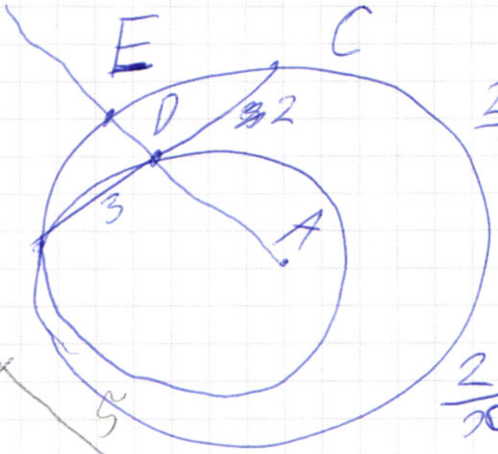
$= \frac{2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

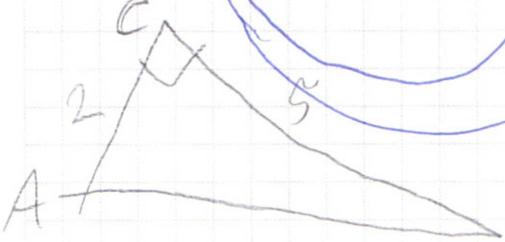
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$x^2 - xy + x + 36y^2 - 6y - 6 = 0$

$x^2 + (1-y)x + 6(6y^2 - y - 1) = 0$

$\frac{22}{3} \cdot 2 = 6$

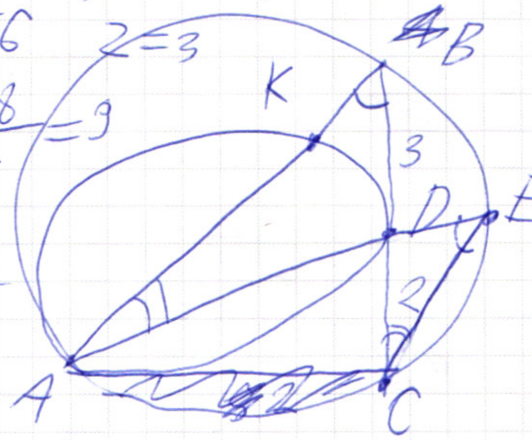
$2 = 3$

$2^2 = \frac{18}{2} = 9$

$x = 2$

$\frac{2}{x} = \frac{3}{2}$

$x = \frac{22}{3}$



$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$ $\quad D = 1 - 2y + y^2$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$DC \cdot BD = AD \cdot DE$

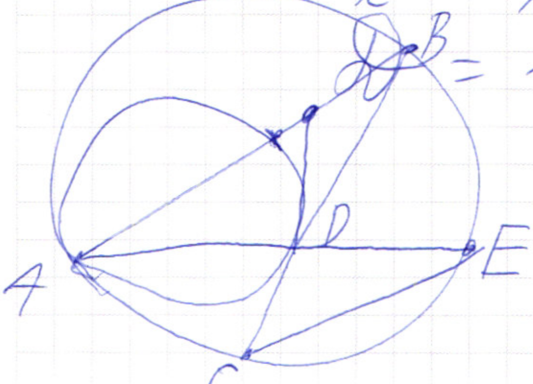
$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE}$

$\cancel{(x-6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6}$

$2x \cdot 3x = 6$

$x^2 = 1$ $\quad x = 1$

$x^2 - 12x + (2y^2 - 4y + 20) = 0$



$D = 144 - \cancel{2y^2 - 16y} - 8y^2 + 16y - 80 =$

$= -8y^2 + 16y + 64 =$

$\cancel{= -8(y^2 - 2y + 8)}$

$= -8y^2 + 16y - 8 + 72$

$= -8(y^2 - 2y + 1) + 72 =$

$= -8(y-1)^2 + 72 =$

$= 8(9 - (y-1)^2) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ y \geq -2 \end{cases}$

$9 - (y-1)^2 \geq 0$

$9 \geq (y-1)^2$

$\begin{cases} y - 1 \leq 3 \\ y - 1 \geq -3 \end{cases} \Rightarrow$

$CD \cdot DB = DE \cdot AD$

$\cancel{CE = ED \cdot AD}$

$\cancel{CE = CD \cdot DB = 6}$

$\cancel{AO \cdot OA = \ldots}$

$(2R - 2r) \cdot 2r = 9$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x-1\geq 0$

$x\geq 0{,}5$

$8x-12x+6=$

$=-4x+6$

$8x+12x+6=$

$=20x-6$

$-8\cdot\frac{1}{4}-3+7=$

$=-2-3+7=2$

$\frac{1}{2}a+b\geq 4$

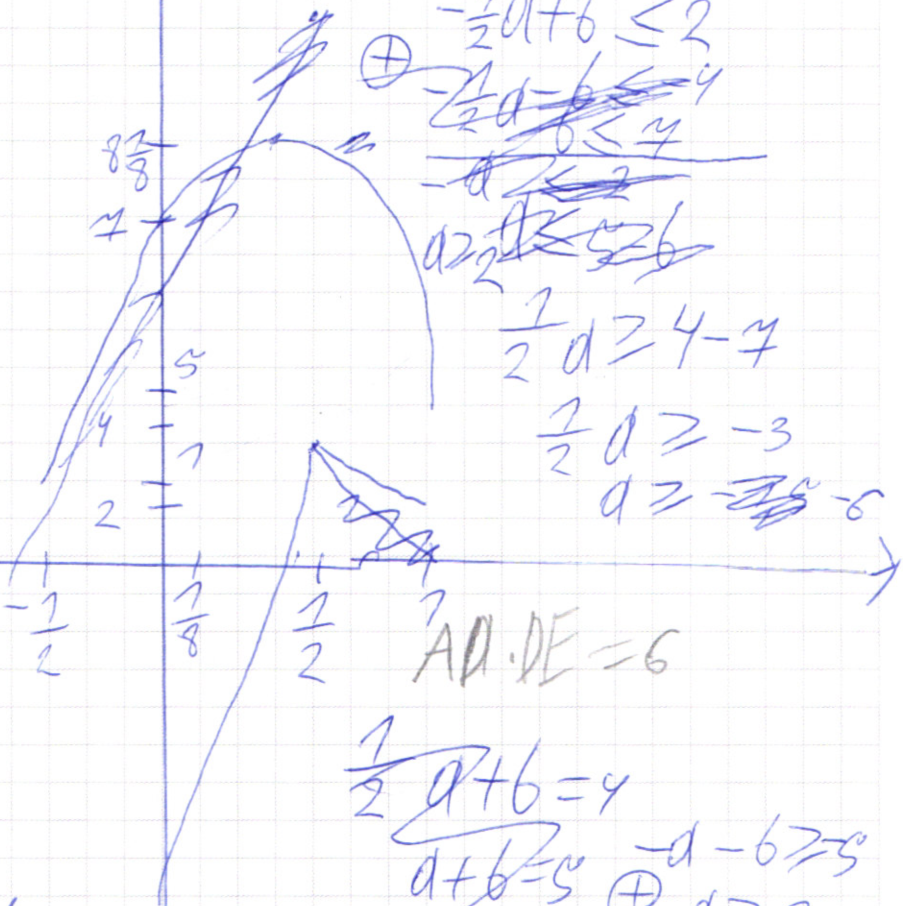
$a+b\leq 5$

$-\frac{1}{2}a+b\leq 2$

$a\geq 4-7$ ... $\frac{1}{2}a\geq 4-7$

$\frac{1}{2}a\geq -3$

$a\geq -6$



$a+b\leq 5$

$-\frac{1}{2}a-b\leq -4$

$\frac{1}{2}a\leq 1$

$a\leq 2$

AD·DE=6

$\frac{1}{2}a+b=4$

$a+b=5$

$\frac{1}{2}a=1$

$a=2$

$b=3$

$-a-b\geq -5$

$a\geq 2$

$-b\geq -3$

$b\leq 3$

~~$a-2b\geq 2-4$~~

$a+2b\geq 8$

$-a-b\geq -5$

$b\geq 3$

$\frac{1}{2}a+b\geq 4$

$-\frac{1}{2}a+b\leq 2$

$\frac{1}{2}a-b\geq 2$

$a\geq 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В - 10

№1

a, b и c — члены геом. прогрессии $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~b_1~~ $a = b_1$

$b = b_1 q$

$c = b_1 q^2 \Rightarrow a = \frac{c}{q^2}$

$b = \frac{c}{q}$

$x = b_1 q^3$ (четвёртый член геом. прогрессии) $\Rightarrow x = cq$

$ax^2 - 2bx + c = 0$ (усл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{c}{q^2}(cq)^2 - 2\frac{c}{q}(cq) + c = 0$

$c^3 - 2c^2 + c = 0$

$c(c^2 - 2c + 1) = 0$

$c(c-1)^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$

Ответ: $c = 0$ или $c = 1$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

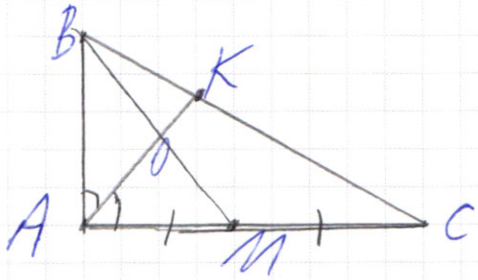
Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

№2

Поймём у какого Δ мед. $\perp$ бисс.:

Построим треугольник ABC с биссектрисой AK и медианой BM: ~~BM~~



O – точка пересечения AK и BM.

Мы хотим что бы все углы их пересечения равнялись $90°$. Для этого достаточно что бы хотя бы 1 из ~~них~~ них равнялся $90°$ (другие будут равны $90°$, как верт. с $90°$ и смеж. с $90°$).

Рассм. $\angle BOA$ и $\angle AOM$:

Мы хотим что бы они были по $90° \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ если ΔABC удовлетв. усл., то $\angle BOA = \angle AOM \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta BOA = \Delta AOM$ ($\angle BAO = \angle OAM$; $\angle BOA = \angle AOM$; AO – общ.) (2 признак) $\Rightarrow BA = AM = \frac{1}{2} AC \Rightarrow$
$\Rightarrow$ у искомых треугольников
одна сторона $- x$
вторая сторона $- 2x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

третья сторона $-k \Rightarrow$

$\Rightarrow P = x + 2x + k = 3x + k$

$3x + k = 900$ (усл.)

$k = 900 - 3x$

Из неравенства Δ:

$3x > k$

$3x > 900 - 3x$

$6x > 900$

$x > 150$

также:

$k + x > 2x$

$k > x$

$900 - 3x > x$

$900 > 4x$

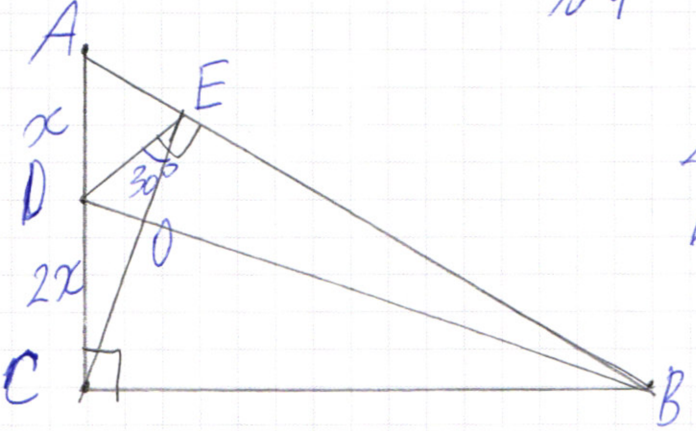
$x < 225$

$k + 2x > x$ — выполняется всегда (x и $k > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 150 \\ x < 225 \end{cases} \Rightarrow$ кол-во $\Delta = 225 - 150 - 1 =$
$= 74$

Ответ: 74

№4



Дано:
$\triangle ABC$ – прям.
$D \in AC$
$E \in AB$
$AD : AC = 1:3$
$DE \perp AB$
$\angle CED = 30°$
а) $tg\angle BAC$ – ?

Пусть $AD = x$, тогда $AC = 3x$, тогда
$DC = AC - AD = 3x - x = 2x$

$\angle DEB + \angle DCB = 90 + 90 = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ около $CDEB$ можно описать окружность $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30°$
(опираются на одну хорду DC)
Рассм. $\triangle CDB$ – прям.:
$CB = \frac{2x}{tg\angle CED} = \frac{2x}{\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)} = 2\sqrt3\, x$
~~$tg\angle BAC$~~ Рассм. $\triangle ABC$ – прям.:
$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt3\, x}{3x} = \frac{2\sqrt3}{3}$

б) $AC = \sqrt7$ $\quad S_{CED}$ – ?
Рассм. $\triangle ADE$ – прям.: Пусть $AE = 2$
$DE = tg\angle BAC \cdot AE = \frac{2\sqrt3}{3} \cdot 2 \cancel{\frac{\sqrt7}{3}} = \cancel{\frac{2\sqrt{21}}{9}}$
по т. Пифагора:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассм. $\triangle CDE$:

по т. косинусов:

$DC^2 = DE^2 + CE^2 - 2\cos\angle DEC \cdot DE \cdot CE$

$\frac{7\cdot 4}{9} = \frac{4\cdot 27}{9} + CE^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{27}}{9}\cdot CE$

$CE^2 - \frac{2\sqrt{7}}{3}CE + \frac{4\cdot 14}{9} = 0$

$9CE^2 - 6\sqrt{7}\,CE + 64 = 0$

$D = 252 -$

$z^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}z\right)^2 = x^2$

$z^2 + \frac{4}{3}z^2 = \frac{7}{9}$

$\frac{4}{3}z^2 = \frac{7}{9}$

$z^2 = \frac{1}{3}$

$z = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$

Рассм. $\triangle CDE$:

по т. косинусов:

$DC^2 = DE^2 + CE^2 - 2\cdot\cos\angle DEC\cdot DE\cdot CE$

$\frac{4\cdot 7}{9} = \frac{4}{9} + CE^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot CE$

$CE^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}CE - \frac{24}{9} = 0$

$CE^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}CE - \frac{8}{3} = 0$

$D = \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{4 \cdot 9}{3} = 12$

$x_1 = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow x_1$ - не подходит

$x_2 = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{6} =$

$= \dfrac{8\sqrt{3}}{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CE = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} DE \cdot EC \cdot \sin\angle DEC =$

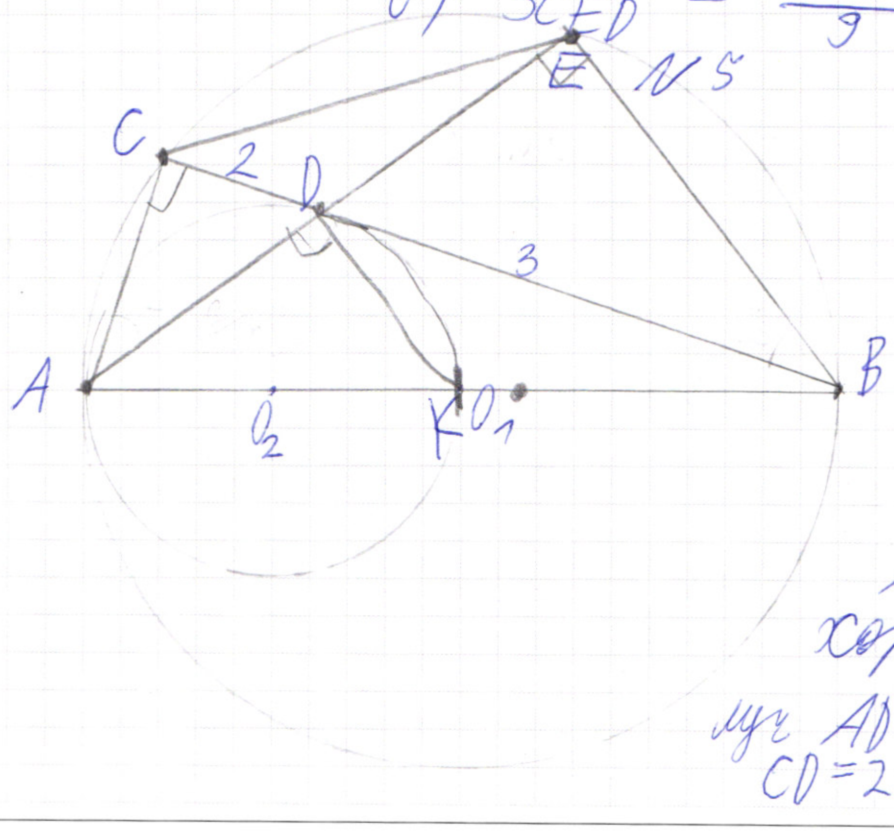
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}5 =$

$= \dfrac{2 \cdot 4\sqrt{3}}{4 \cdot 9} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№ 5



Дано:
бол. окр. - Ω
мен. окр. - ω
Ω кас. ω
внутр. образом
в точке A
AB - диаметр
хорда BC кас. ω в т. D
луч AD пересек. Ω в т. E
$CD = 2$; $BD = 3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найти: r_{Ω}; r_{ω}; S_{BACE}

проведём хорду CE

~~$CD \cdot DB = DE \cdot AD$ (перес. хорды) ⇒~~

~~$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE} \Rightarrow AD = \frac{BD \cdot DC}{DE} =$~~

~~Рассм. △CDE и △ADB:~~

~~$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE}$ ⇒~~

~~$= \frac{3 \cdot 2}{DE} = \frac{6}{DE}$~~

~~$EC^2 = CD \cdot DB$ (сек. и к~~

$DB^2 = (d_{\Omega} - d_{\omega}) \cdot d_{\omega}$

$(d_{\Omega} - d_{\omega}) \cdot d_{\omega} = 9$

проведём DO_2K, где K – 2-ая точка пер. перес. ~~DO_2~~ AB и ω ∈

Рассм. △ADK и △AEB:

△ADK ∼ △AEB (2 признак) (∠A – общ.; $\angle ADO_1 = \angle AEB = 90°$ – опир. на диаметр)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$-8x^2+6x+7$ – парабола

$y_1 = -8x^2+6x+7$

$y_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -8\cdot\frac{1}{4} - 3 + 7 = 2$

$y_1(1) = -8+6+7 = 5$

$ax+b$ – прямая $\quad ax+b \le -8x^2+6x+7$

$x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~a~~ $y_2 = ax+b$ $\quad \begin{cases} y_2\left(-\frac{1}{2}\right) \le y_1\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y_2(1) \le y_1(1) \end{cases}$

необходимое и достаточное условие (следует из гр. прямой и параболы)

$8x-6|2x-1|$ – две прямые огр. обл. x перес. в точке ~~$x=1$~~

$2x-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y_3 = 8x-6|2x-1|$

~~$y_2 \ge y$~~ $y_2\left(\frac{1}{2}\right) \ge y_3\left(\frac{1}{2}\right)$

необходимое и достаточное условие

$y_3\left(\frac{1}{2}\right) = 8\cdot\frac{1}{2} - 0 = 4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8 объединяя усл.:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b \le 2 \quad (I) \\ a+b \le 5 \quad (II) \\ \frac{1}{2}a+b \ge 4 \quad (III) \end{cases}$$

$-\,$(I) $+$ (III)

$$\frac{1}{2}a+b \ge 4$$

$$\frac{1}{2}a \cancel{+b} - b \ge \cancel{2} - 2$$

$$a \ge 2$$

$+$ (II) $-$ (III)

$$a+b \le 5$$

$$-\frac{1}{2}a - b \le 4$$

$$\frac{1}{2}a \le 1$$

$$a \le 2 \Rightarrow \begin{cases} a \ge 2 \\ a \le 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

подставим во ~~(III)~~ (II) и (III)

$$\begin{cases} 2+b \le 5 \\ \frac{1}{2}\cdot 2+b \ge 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \le 3 \\ b \ge 3 \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

Ответ: $a=2$; $b=3$