МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии. УВ

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан. УВ

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$. УВ

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED. УВ

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$. УВ

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$. УВ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① ~~Сначала разберем тривиальный случай, когда какой-то член геом. прогр. = 0 => все члены = 0 (однако корень $a \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x + 0 = 0$) => третий член = 0 (кроме возможно первого). В усл. не сказано, что прогрессия непостоянная и что все члены ненулевые, поэтому разбираю этот случай~~

=> пусть $\frac{b}{a} = k$ => $\frac{c}{b} = k$ (т.к. это геом. прогрессия)

=> $b = a \cdot k$, $c = b \cdot k = a \cdot k^2$

=> $ax^2 + 2bx + c = ax^2 + 2akx + ak^2 = 0$ $\quad | \div a$

=> $x^2 + 2kx + k^2 = 0$

=> $(x+k)^2 = 0$

=> $x = -k$ – единств. корень

=> 4ый член $= -k$

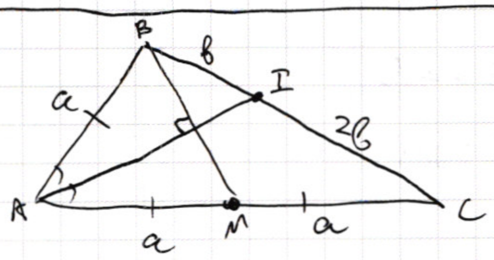
=> $c \cdot k = -k$

=> $c = -1$

Ответ: -1

---

②



$\exists \triangle ABC$, BM – медиана, AI – бисс-са, $BM \perp AI$ => в $\triangle BAM$ бисс-са совпад. с высотой => он р/б

=> $AB = AM = MC = a$

По св-ву бисс-сы $\frac{BI}{AB} = \frac{IC}{AC}$ =>

$BI = b$ => $IC = 2b$

Тогда $P = 1200$ => $3a + 3b = 1200$ => $a + b = 400$

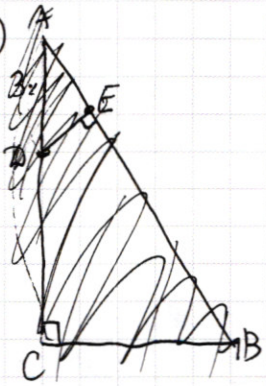
Также должно выполн. нер-во $\triangle$-ка

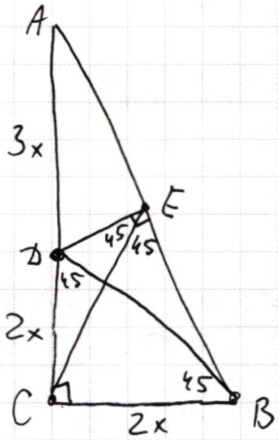
$$\Rightarrow \begin{cases} 3a > 3b \\ 2a + 3b > a \\ 3b + a > 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ 3b > a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 400 \\ a, b \in \mathbb{N} \\ a > b \\ 3b > a \end{cases}$$

$3b > a$ => $3b > 400 - b$ => $4b > 400$ => $b > 100$ => $b \geq 101$

$a > b$ => $a > 400 - a$ => $a > 200$ => $a \geq 201$

4





$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AD = 3x;\ AC = 5x$

$\Rightarrow DC = 2x$

DEBC - вписанный, тк

$\angle DCB + \angle DEB = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC = 45^\circ$

$\angle CEB = 90^\circ - \angle DEC = 45^\circ$

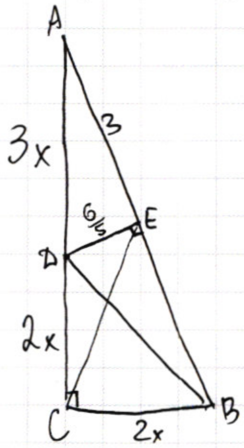
$\angle CEB \underset{\text{впис.}}{=} \angle CDB = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle DCB$ - р/б $\Rightarrow CB = CD = 2x$

$tg(\angle BAC) = \frac{CB}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

а) Ответ: $tg(\angle BAC) = \frac{2}{5}$

б) $AC = \sqrt{29}$. $AC = 5x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$



$\Rightarrow AD = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

$CD = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

по т. Пифагора: $AC^2 + CB^2 = AB^2$

$\Rightarrow AB^2 = 29x^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{29}\,x$

тк CDEB - впис., запишем ст. точки A отн-но окр-ти C, D, E, B

$\Rightarrow \underbrace{AD}_{3x} \cdot \underbrace{AC}_{\sqrt{29}} = \underbrace{AE}_{AE} \cdot \underbrace{AB}_{\sqrt{29}\,x}$

$\Rightarrow 3 = AE$

$\underbrace{tg\angle BAC}_{\frac{2}{5}} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{DE}{3} = \frac{2}{5} \Rightarrow DE = \frac{6}{5}$

$\Rightarrow S_{ADE} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{\frac{6}{5}\cdot 3}{2} = \frac{9}{5}$

тк $\triangle AED$ и $\triangle DEC$ имеют общую высоту из (·)E на общее основание (прямая AC) $\Rightarrow \frac{S_{AED}}{S_{EDC}} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow S_{EDC} = S_{AED} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\cancel{9}^{3}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Ответ: 1,2 (или $\frac{6}{5}$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② Продолжение

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=400 \\ a,b\in\mathbb{N} \\ a\geq 201 \\ b\geq 101 \end{cases}$

$b\geq 101 \Rightarrow a = 400-b \Rightarrow a \leq 299$

$a\geq 201 \Rightarrow b \leq 400-201 = 199 \Rightarrow b\leq 199$

a - сторона Δ-ка $\Rightarrow a\in\mathbb{N}$, $b=400-a \Rightarrow b\in\mathbb{N}$

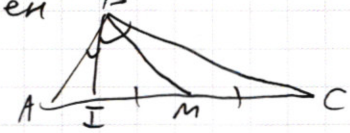
Тогда варианты пар a и b:

a	201	202	203	...	299
b	199	198	197	...	101

Другие варианты не подходят по ограничению.

$\Rightarrow$ 99 Δ-ов

(Мы рассмотрели бисс-су и медиану из разных вершин, но случай из одной верш. невозможен



BI - бисс-са

BM - медиана

$\angle ABC = 2\alpha$

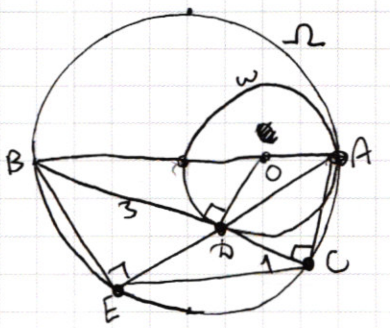
$\angle ABI = \angle IBC = \alpha$

$\angle IBM = 90^\circ \Rightarrow \alpha > 90^\circ$

$\Rightarrow \angle ABC > 180^\circ$?!)

Ответ: 99 Δ-ов.

(5)



Заметим, что $\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$, тк опираются на диаметр AB

$\Rightarrow$ рассмотрим $\triangle ACB$. $BC = 3+1=4$

Пусть R, r - радиусы Ω, ω соотв.

$\Rightarrow AB = 2R$

~~катет пифагора (△ACB) $AC^2+BC^2=AB^2 \Rightarrow AC^2+8$~~

Т O - центр ω, $\Rightarrow O \in AB$ (тк окр-ти касаются, а AB - диаметр Ω

$\Rightarrow OD \perp BC$ (касательн. ⊥ радиусу); $OD = r$

$BO = \underset{AB}{2R} - \underset{OA}{r}$ $\Rightarrow$ по т. Пифагора для $\triangle BDO$:

$BD^2+DO^2=BO^2 \Rightarrow 9+r^2=(2R-r)^2$

$\Rightarrow 9+\cancel{r^2} = 4R^2+\cancel{r^2}-2Rr \Rightarrow 9=4R^2-2Rr$

$OD \perp BC$; $AC \perp BC \Rightarrow OD \parallel AC \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{BD}{DC}=\frac{BO}{OA}$

$\Rightarrow \frac{3}{1}=\frac{2R-r}{r} \Rightarrow 2R-r=3r \Rightarrow R=2r$

тк $9=4R^2-2Rr \Rightarrow 9=4\cdot4r^2-2\cdot2r^2=12r^2$

$\Rightarrow 3=4r^2 \Rightarrow r=\frac{\sqrt3}{2}$

$\Rightarrow R=\sqrt3$

$\triangle BDO \sim \triangle BCA$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{OD}{AC} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{\sqrt3}{2AC}$

~~$\Rightarrow AC$~~ $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt3}{AC} \Rightarrow AC=\frac{2\sqrt3}{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt3\cdot4}{3\cdot\cancel{2}}=$

$=\frac{4\sqrt3}{3}$. По т. пифаг. для $\triangle CAD$: $AC^2+CD^2=AD^2 \Rightarrow \frac{4}{3}+1=AD^2$

$\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{21}}{3}$. $\triangle BDE \sim \triangle ADC$ по 2 углам ($\angle EBD=\angle DAC$ по вписанности)

$\Rightarrow \frac{BD}{AD}=\frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{3\cdot3}{\sqrt{21}}=\frac{DE}{1} \Rightarrow DE=\frac{9}{\sqrt{21}}$

по т. Пифагора для $\triangle BED$ $DE^2+BE^2=9 \Rightarrow \frac{9\cdot9}{21}+BE^2=9$

$\Rightarrow BE=\sqrt{9-\frac{27}{7}}=3\sqrt{1-\frac37}=3\sqrt{\frac47}=\frac{6}{\sqrt7}=\frac{6\sqrt7}{7}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5) Продолжение

$$\Rightarrow S_{BED} = \frac{BE \cdot ED}{2} = \frac{\frac{6}{\sqrt{7}} \cdot \frac{9}{\sqrt{21}}}{2} = \frac{27}{7\sqrt{3}}$$

тк $\triangle BED$ и $\triangle DEC$ имеют общ. основание и общ. вершину

$$\Rightarrow \frac{S_{BED}}{S_{EDC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{1} \Rightarrow S_{BED} = 3 S_{EDC}$$

$$\Rightarrow S_{EDC} = \frac{9}{7\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{ABEC} = S_{ABC} + S_{BED} + S_{CED} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{27\sqrt{3}}{21} + \frac{9\sqrt{3}}{21} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}(28+27+9)}{21} = \frac{64\sqrt{3}}{21}$$

Ответ: радиус$_\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$

радиус $\Omega = \sqrt{3}$

$S_{ABEC} = \frac{64}{21}\sqrt{3}$

---

(7) $f(1) = 0$ тк $f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = f(a) - f(a) = 0$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$f(a_1 a_2 \ldots a_k) = f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1}) + f(k) = f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-2}) + f(a_{k-1}) + f(a_k) = \ldots$$

$$= f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_k)$$

③ $y - 2x = (y-2) - 2(x-1)$

$\sqrt{xy - 2x - y + 2} = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3$

Сделаем замену: $y-2 = b$, $x-1 = a$

$\Rightarrow \begin{cases} b - 2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$

$ab \geq 0$; $b - 2a \geq 0 \Rightarrow b \geq 2a$

$b^2 + 4a^2 - 4ab = ab$

$\Rightarrow b^2 + 4a^2 = 5ab$

$\Rightarrow 2a^2 = 5ab - 2a^2 - b^2$

$\Rightarrow 2a^2 = 5ab - 3$

$2a^2 - 5ab + 3 = 0$

$\Rightarrow a = \dfrac{5b \pm \sqrt{25b^2 - 24}}{4}$

$a = \sqrt{\dfrac{3 - b^2}{2}}$

$\Rightarrow b^2 + 4a^2 = b^2 + 6 - 2b^2 = 6 - b^2$

$\Rightarrow 6 - b^2 = 5ab$

$\Rightarrow b^2 + 5ab - 6 = 0$

$b = \dfrac{-5a \pm \sqrt{25a^2 + 24}}{2}$

---

⑥ $2x^2 - x - 1 \leq ax + b \Rightarrow 2x^2 - (a+1)x - (b+1) \leq 0$

это парабола ветвями вверх $\Rightarrow$ max достигается на каком-то конце отрезка ограничения

$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}$: $\dfrac{2}{16} + \dfrac{(a+1)}{4} - b - 1 \leq 0 \quad | \cdot 8$

$\Rightarrow 1 + 2a + 2 - 8b - 8 \leq 0$

$\Rightarrow 2a - 8b \leq 5$

$\boxed{ax + b \leq x + |2x - 1|}$ $\quad$ <u>1сл</u> $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow ax + b \leq 3x - 1$

(7) Продолжение

Хотим кол-во пар (x,y):

$f(x) - f(y) < 0$; $1 \le x, y \le 21$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = f(2) + f(2) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = f(3) + f(4) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = f(2) + f(7) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(2) + f(8) = 4$

$f(17) = 8$

$f(18) = f(2) + f(9) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = f(2) + f(10) = 4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

f(x)	f(1)	f(2), f(3)	f(4), f(5), f(6), f(9)	f(7), f(8), f(10), f(12), f(15), f(18)
значение	0	1	2	3

f(14), f(16), f(20), f(21)	f(11)	f(13)	f(17)	f(19)
4	5	6	8	9

Всего пар $(x;y) = 21 \cdot 21 = 441$

Из них $f(x) - f(y) = 0$ если $x = y$, т.е. таких пар

$1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 1 + 1 + 1 + 1 =$

$x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=2$; $x=3$, $y=3$; $f(x)=2$, $f(y)=2$ ...

$= 1 + \underbrace{4 + 16}_{20} + 36 + \underbrace{16 + 4}_{20} = 77$

$\Rightarrow$ пар где $x \ne y$: $441 - 77 = 364$

Все они разбив. на пары:

$x = a, y = b \longleftrightarrow x = b, y = a$

У кажд. такой пары ровно один вариант, где $f(x) - f(y) < 0$ (в другом вар-те будет противоположное число)

$\Rightarrow$ Ответом будет $\frac{364}{2} = 182$

Ответ: 182

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$

$((y-2)+(x-1))^2=(y-2)^2+(x-1)^2+2\cdot(y-2)(x-1)$

$2(y-2)-\cancel{2}$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$a^2+2b^2=3$

$a\geq 2b$

$a^2\leq 3$

$b^2\leq 1{,}5$

$a^2=3-2b^2$

$a^2+4b^2=5ab$

$6-b^2=5ab$

$\begin{cases} 2x^2-x-1\leq ax+b \\ ax+b\leq x+|2x-1| \end{cases}$

$x=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{2}{16}+\frac{1}{4}-1\leq b-\frac{a}{4}\leq -\frac{1}{4}+\left|-1\frac{1}{2}\right|$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1\leq b-\frac{a}{4}\leq 1\frac{1}{4}$

$f(21)=f(3)+f(7)=$

$f(20)=f(2)+f(2)+f(5)$

$f(abc)=f(ab)+f(c)=f(a)+f(b)+f(c)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$2x^2-x-1\leq 3x-1\quad, x\geq 0$

$2x^2-4x-1\leq 0$

$4\pm\sqrt{16+8}$

$x=1\Rightarrow y=-3$

$\frac{4\pm\sqrt{24}}{4}=2\pm\sqrt{}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 Продолжение

либо $a = 3$, $b \leq -1$ (тогда эти прямые $\parallel$, но $ax+b$ лежит ниже)

либо $ax+b \cap 3x-1$ в точке, где $x \notin [0; \frac{3}{2}]$

$\Rightarrow ax+b = 3x-1$

$(a-3)x = -(b+1)$

$\Rightarrow x = \frac{b+1}{3-a}$ $\qquad \frac{b+1}{3-a} \notin [0; \frac{3}{2}]$

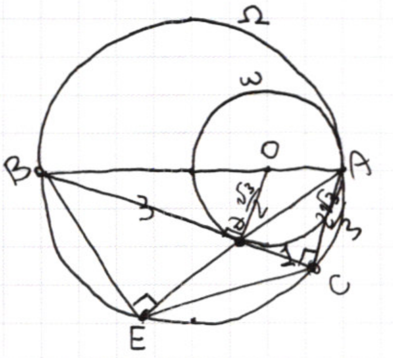
1) $a = 3$, $b \leq -1$

$2a - 8b \leq 5 \Rightarrow 6 - 8b \leq 5$

$\Rightarrow 1 - 8b \leq 0$ – неверно тк $b > 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{b+1}{3-a} < 0 \Rightarrow \frac{(b+1)(3-a)}{(3-a)^2} < 0 \Rightarrow (b+1)(3-a) < 0 \\ \frac{b+1}{3-a} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2b+2}{9-3a} > 1 \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{2R-r}{r}=3$

$2R=4r$

$R=2r$

$r^2+9=(R+r)^2$

$\cancel{r^2}+9=4r^2+\cancel{r^2}+4r^2$

$r^2=\frac{9}{8}$

$r=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{AC}=\frac{3}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{AC}=\frac{3}{2}$

$\frac{AC}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$

$AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AD^2=1+\frac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{9}3}=\frac{7}{3}$

$AD=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

$(4a-5b)^2=\cancel{25b^2}-24$

$16a^2-40ab+24=0$

$4a^2-10ab+6=0$

$2a^2$

$\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

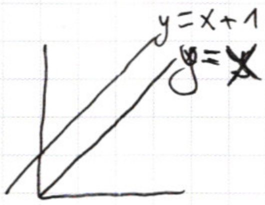
$2x^2 - x - 1 \le ax + b$

$2x^2 - (a+1)x - (b+1) \le 0$

$ax + b \le 3x - 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3 \\ b \ne -1 \end{cases} \\ ax + b = 3x - 1 \quad \text{не подходит в участок огранич.} \end{array}\right.$$

$(a-3)x =$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \cdot k = b \qquad b \cdot k = c \qquad c = a \cdot k^2$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$\cancel{a}x^2 + 2\cancel{a}kx + \cancel{a}k^2 = 0$

$x^2 + 2kx + k^2 = 0$

$(x+k)^2 = 0$

$x = -k$

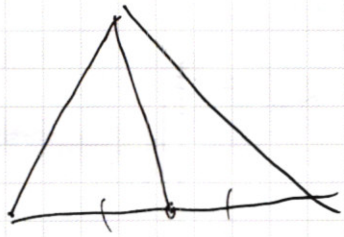
$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a \cdot k^3 = -k \end{array}\right.$

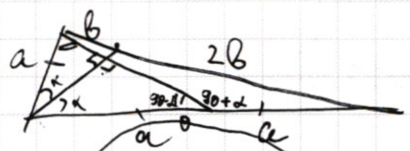
$a \cdot k^2 = -1$

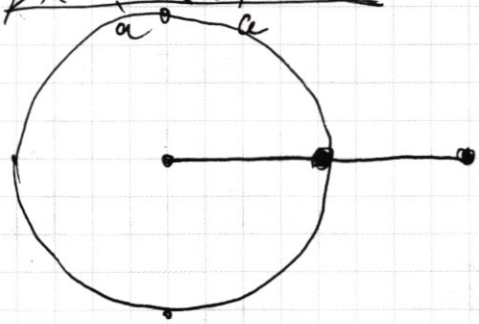
$\cancel{a \cdot k^3 = -k^2}$

$ax^2 + 2ax + a = 0 \qquad x^2 + 2x + 1 = 0$

$P = 1200$







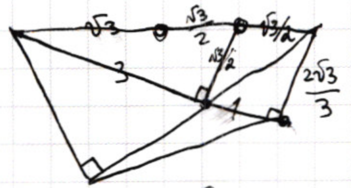
$3a + 3b = 1200$

$a + b = 400$

$\boxed{a > b}$

$3a > 3b$

$\boxed{3b > a}$



$\begin{cases} a + b = 400 \\ a > b \Rightarrow a \geq 201 \\ 3b > a \end{cases}$

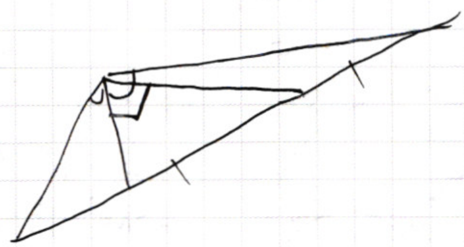
$a = 400 - b$

$3b > 400 - b$

$4b > 400$

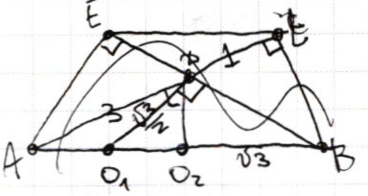
$b > 100$

$b \geq 101$



$\frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{3}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{3} = x$



$AD = \sqrt{\frac{12}{9} + 1}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Rightarrow y \geq 2x$$

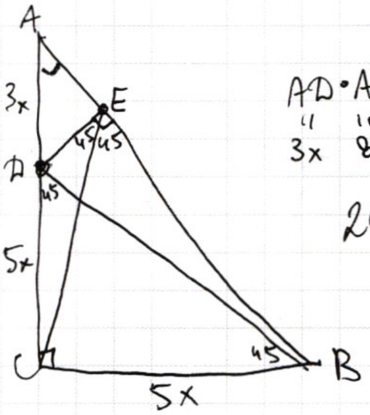
$xy-2x-y+2 \geq 0$

$2x^2-4x+y^2-4y+3=0$

$D=16-8(y-1)(y-3)$

$2+4+5$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

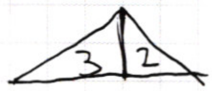


$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

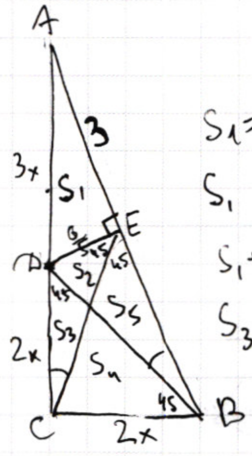
$\underset{3x}{AD} \cdot \underset{8x}{AC}$

$24x^2 = AE \cdot AB$

$\frac{\sin}{\cos}$



$AB^2=$



$25x^2+4x^2=$ ~~...~~ AB^2

$\frac{DE}{AE}=\frac{2}{5}$

$S_1=1,8$

$AB=\sqrt{29}\,x$

S_1 - знаем

$DE=\frac{6}{5}$

$S_1+S_2+S_5$ - знаем

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

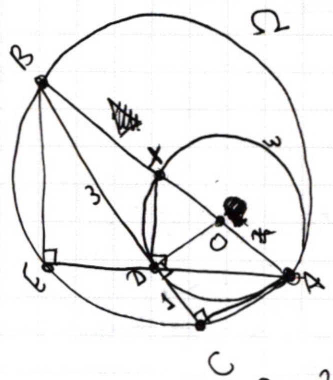
S_3+S_4 - знаем

$3x \cdot 5x = AE \cdot \sqrt{29}\,x$

$3\cancel{x} \cdot \cancel{\sqrt{29}} = AE \cdot \cancel{\sqrt{29}}\,\cancel{x}$

$AC=\sqrt{29} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{29}}{5}$

$AE=3$



$AB^2=16+AC^2$

$AD^2=AC^2+1$

$\Rightarrow AB^2=15+AD^2$

$\triangle BED \sim \triangle ACD$

$\frac{ED}{CD}=\frac{BD}{AD}$

$ED=\frac{3}{AD} \Rightarrow AD \cdot ED = 3$

$(AD+DE)^2+BE^2=AB^2$

$AD^2+\underbrace{2AD \cdot DE}_{6}+\underbrace{DE^2+BE^2}_{9}=AB^2$

$r^2+9=(2R-r)^2 \qquad \frac{2R-r}{r}=3$

~~ADA~~.

$9=4R^2-4Rr \qquad R=4r$

$ED^2+BE^2=9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y \geq 2x$

$xy+2 \geq 2x+y$

$xy+2 \geq 4x$

$y^2+4x^2-5xy = -2x-y+2$

$2x^2-5xy+4x+4y-3=-2x-y+2$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$y(5-5x)=5-6x-2x^2$

$y=\dfrac{5-6x-2x^2}{5-5x}$

$xy-2x-y+2=$

$=y(x-1)-2(x-1)$

$\sqrt{(y-2)(x-1)}=y-2x$

$y=\dfrac{5-6x-2x^2}{5(1-x)}=\dfrac{2x^2+6x-5}{5x-5}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=2+4-4-8+3$

$x=1,\ y=2$

$$\left(\frac{2x^2+6x-5}{5x-5}-2x\right)^2=\frac{2x^3+6x^2-5x}{5x-5}-2x-\frac{2x^2+6x-5}{5x-5}+2$$

$x=1 \Rightarrow 2+y^2-4-4y+3=0$

$y^2-4y+1=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\underline{f(1)=0}$ тк $f(1\cdot b)=f(1)+f(b)$

$f(2)=1$

$f(3)=$

$2x(x-2)+y(y-4)+3$

$y-2x=(y-2)-(2x-2)$

$x^2-x+3-3x+y^2-4y=0$

$(y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)}$

$\quad\ddot{a}\qquad\ddot{b}$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2+4b^2=5ab$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~$(y-2)-2(x-1)$~~

$2(x^2-2x+1) = 2x^2-4x+2 = 2(x-1)^2$

$y^2-4y+4=(y-2)^2$

$2x^2+y^2-4x-4y+6-3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$x=2$
$y=1$

$x-1=a$
$y-2=b$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2+4a^2=5ab \\ b^2+2a^2=3 \end{cases}$$

$5ab-4a^2=3-2a$

$b-2a=\sqrt{ab}$
$2a^2+b^2=3$

$2a^2+3=5ab = 5a\sqrt{3-2a^2}$

$b^2=3-2a^2$

$\sqrt{a}=n$

$\sqrt{b}=m$

$6-b^2=5ab$

$m^2-2n^2=mn$

$b^2+5ab-6=0$

$b=\frac{-5a\pm\sqrt{25a^2+24}}{2}$

$2n^4+m^4=3$

~~$b=3-2a^2$~~

~~$9+4a^4+4a^2-12a^2$~~

$\times\ 21$
21
21
42
$n41$

$b^2+2a^2=3$

$b=3-2a^2$

$b=\sqrt{3-2a^2}$

$b^2=$

$2+1-3$

$b=\sqrt{ab}+2a$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$b-2a=\sqrt{ab}$
$2a^2+b^2=3$

$ab+6a^2+4a\sqrt{ab}=3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)