

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

- 1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
- 5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c

$$b = a \cdot k$$

$$c = ak^2; \quad c = ?$$

$$f(x) = ax^2 - 2bx + c = 0$$

ak^3 - корни $f(x)$.

$$a^3 k^6 - 2a^2 k^4 + ak^2 = 0$$

$$ak^2(a^2 k^4 - 2ak^2 + 1) = 0$$

$$a \neq 0, k \neq 0 \Rightarrow a^2 k^4 - 2ak^2 + 1 = 0$$

$$ak^2 = t.$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

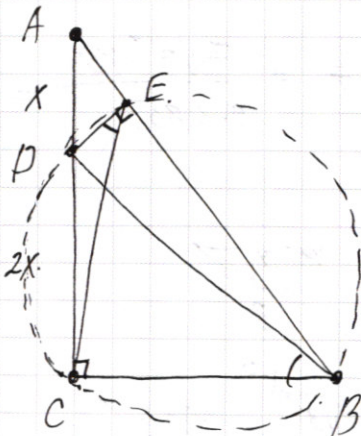
$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

$$ak^2 = 1$$

$$c = ak^2 = 1$$

Ответ: 1.

№4.



Дано:

$$\triangle ABC, DE \perp AC: AD:AC = 1:3.$$

$$DE \perp AB; \quad \angle CED = 30^\circ; \quad AC = \sqrt{7}.$$

a) $\operatorname{tg} \angle BAC = ?$

b) $S_{\triangle CEP} = ?$

Решение:

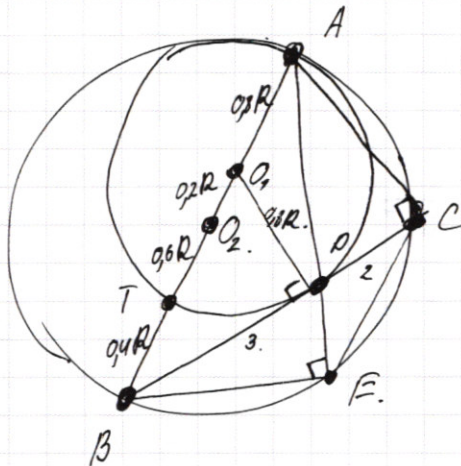
- 1) $\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ \Rightarrow \angle DEB + \angle DCB = 180^\circ \Rightarrow CDEB$ - вписанная
- 2) $\angle DEC = \angle CBD = 30^\circ$, т.к. опираются на одну дугу.
- 3) $\operatorname{tg} \angle CBD = \operatorname{tg} 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{CB} \Rightarrow CB = 2\sqrt{3}x$.
- а) 4) $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 5) $AC = \sqrt{7} = 3x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$.
- 6) $AB^2 = AC^2 + CB^2$; $AB^2 = 7 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{3} = 35$; $AB = \sqrt{35}$.
- 7) $\cos \angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot \sqrt{35}} = \frac{49}{3\sqrt{35}}$.
- 8) $EB = AB - AE = \sqrt{35} - \frac{49}{3\sqrt{35}} = \frac{3 \cdot 35 - 49}{3\sqrt{35}} = \frac{56}{3\sqrt{35}}$.
- 9) $\sin \angle EBC = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
- 10) $S_{\triangle CEB} = CB \cdot EB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle EBC = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{3} \cdot \frac{56}{3\sqrt{35}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} =$
 $= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot 56}{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} = \frac{56\sqrt{3}}{45}$.
- 11) $\sin \angle BAC = \frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow DE = \frac{CB \cdot AD}{AB} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{35}} =$
 $= \frac{14\sqrt{3}}{9\sqrt{35}}$.
- 12) $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{9\sqrt{35}} \cdot \frac{14\sqrt{3}}{9\sqrt{35}} = \frac{7 \cdot \sqrt{3} \cdot 49}{9 \cdot 3 \cdot 35} =$
 $= \frac{49\sqrt{3}}{9 \cdot 3 \cdot 5}$.
- 13) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.
- б) 14) $S_{COE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle CEB} = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{49\sqrt{3}}{9 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{49\sqrt{3}}{9 \cdot 3 \cdot 5} =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= \frac{305\sqrt{3} - 168\sqrt{3} - 49\sqrt{3}}{3 \cdot 9.5} = \frac{98\sqrt{3}}{135}$$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{98\sqrt{3}}{135}$.

№5.



Дано: ~~два~~ $\text{окр. } \omega(O_1; r)$
 $\text{окр. } \Omega(O_2; R)$.

$$\Omega \cap \omega = A.$$

$$AO_2 \cap \Omega = B.$$

$$C \in \Omega: BC \cap \omega = D.$$

$$AD \cap \Omega = E.$$

$$CD = 2; BD = 3.$$

Найти: $R, r, S_{\text{FACE}} - ?$

Решение:

1) $\angle BDO_1 = 90^\circ$, т.к. BC - касательная

$\angle BCO_1 = 90^\circ$, т.к. $\angle BCO_1$ опирается на диаметр.

2) $\triangle BCO_1D \sim \triangle BAC$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{AB} = \frac{O_1D}{AC}$.

$$\frac{3}{5} = \frac{2R - r}{2R}; \quad 6R = 10R - 5r; \quad 4R = 5r$$

$$r = \frac{4}{5}R = 0.8R.$$

3) $AC = \frac{BC \cdot O_1D}{BD} = \frac{5 \cdot 0.8R}{3} = \frac{4}{3}R.$

$$4) \text{ deg } \omega B = \angle D = \angle B = \angle A$$

(сечение точки B для
малой окружности)

$$g = 0,4R \cdot 2R; \quad g = 0,8R^2; \quad R = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{20}} = \frac{15}{2\sqrt{5}}$$

$$r = 0,8R = 0,8 \cdot \frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot 0,4}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$5) S_{BACE} = d_1 d_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle ADC.$$

$$6) AD^2 = AC^2 + CD^2$$

$$AD^2 = \frac{16}{9} \cdot \frac{225}{20} + 4; \quad AD^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + 4$$

$$AD^2 = 20 + 4 = 24$$

$$AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$7) \sin \angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{4 \cdot 15}{3 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

$$8) \text{ deg } \omega D = AD \cdot DE = CD \cdot DB$$

$$2\sqrt{6} \cdot DE = 2 \cdot 3$$

$$DE = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

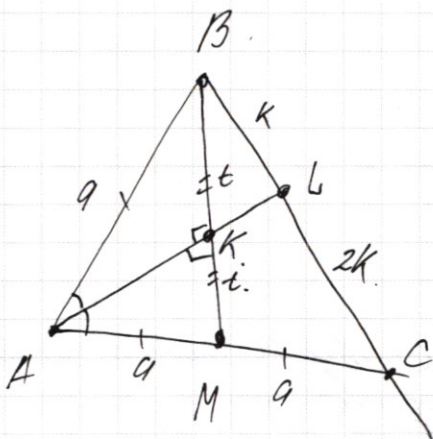
$$9) S_{ACEB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{30}} \cdot (2+3) \cdot \left(2\sqrt{6} + \frac{3}{\sqrt{6}} \right) = \frac{5 \cdot 5}{2\sqrt{30}} \cdot \left(\frac{12+3}{\sqrt{6}} \right) =$$

$$= \frac{5 \cdot 5 \cdot 15}{2 \cdot \sqrt{30} \cdot 6} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 15}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{4\sqrt{5}} = \frac{125}{4\sqrt{5}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{15}{2\sqrt{5}}; \quad \frac{6}{\sqrt{5}}; \quad \frac{125}{4\sqrt{5}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.



Дано:
 $\triangle ABC$
 ~~$AB = 9$~~
 ~~$BC = 2K$~~
 ~~$AC = 9$~~
 ~~$AB + BC + AC = 900$~~
 $AB + BC + AC = 900$
 $M \in AC: AM = MC$
 $L \in BC: \angle BAK = \angle LAC$
 $BM \perp AB$
 Найти: кол-во таких \triangle .

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ABM$:

$$\begin{array}{l} \angle BAK = \angle KAM \\ \angle AKB = \angle AKM = 90^\circ \end{array} \left| \Rightarrow \triangle ABM - \text{равнобедренный} (AB = AM), \right.$$

~~$BK = KM$~~

2) BL — биссектриса $\angle B$ для $\triangle ABC$:

$$BL \cdot AC = AB \cdot LC.$$

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{2 \cdot 9} = \frac{1}{2}.$$

3) $AB + BC + AC = 900$; $9 + 9K = 900$.

$$9K + 9 = 900$$

4) $\triangle ABC$ существует, если осуществляются нер-во:

$$\begin{cases} AB < BC + AC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} a < 2a + 3k \\ 2a < a + 3k \\ 3k < 3a \\ a + k = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 300 - k \\ \cancel{a = 300 - k} \\ (*) a + 3k > 0 \\ a < 3k. \Leftrightarrow \\ k < a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{k = 300 - a} \\ \cancel{a < 300 - 3a} \end{cases} \begin{cases} a = 300 - k \\ 300 - k < 3k. \Leftrightarrow \\ 300 - k > k. \end{cases}$$

$a, k > 0 \Rightarrow (*)$ всегда выполняется

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 300 - k \\ 4k > 300 \\ 2k < 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 300 - k \\ k > 75 \\ k < 150. \end{cases}$$

$$k \in [76; 149]$$

для каждого k существует только одно значение $a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{кол-во треугольников: } 149 - 76 + 1 = 74$$

Ответ: 74.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c
 a, b, c
 a, ak, ak^2, ak^3
||
x.

$$a \cdot a^2 \cdot k^6 - 2 \cdot ak \cdot ak^3 + ak^2 = 0.$$

$$a^3 k^6 - 2a^2 k^4 + ak^2 = 0$$

$$ak^2(a^2 k^4 - 2ak^2 + 1) = 0$$

$$a^2 k^4 - 2ak^2 + 1 = 0.$$

$$ak^2 = t.$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

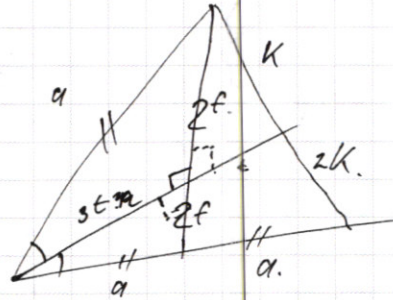
$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0.$$

$$t = \frac{2}{2} = 1.$$

$$a^2 k^2 = 1.$$

Ответ: 1.

№2.



$$\frac{a}{a} \cdot \frac{p}{t} \cdot \frac{k}{3k} = 1.$$

$$p = 3t.$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= p^2 + t^2 \\ k^2 &= t^2 + t^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a^2 &= 9t^2 + t^2 \\ k^2 &= 2t^2 + t^2 \end{aligned}$$

$$a^2 - k^2 = 8t^2.$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

$$(x^2 - 26x + 36) + 2y^2 - 4y - 16 = 0.$$

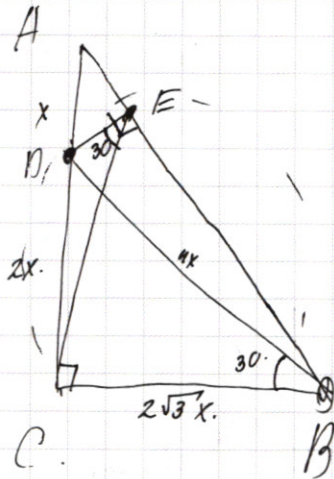
$$(x - 6y)^2 = -2y^2 + 4y + 16 = xy - 6y - x + 6.$$

4200

$$(y^2 - 2y + 1) - 3y^2 + 6y + 15 =$$

$$y(x - 6) - (x - 6) = (x - 6)(y - 1).$$

$$x^2 + 6y^2 = 4(x-6y)$$



$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

~~message~~

$$\tan \angle BAC =$$

$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{2x}{r}$$

$$r = 4x$$

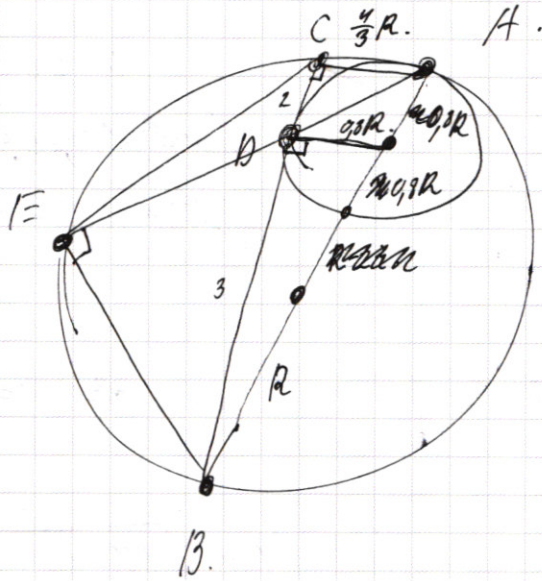
$$16x^2 - 4x^2 = 12x^2 = 2\sqrt{3}x$$

$$\tan \angle BAC =$$

$$\tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{t}$$

$$t = 2\sqrt{3}x$$

NS.



$$R_1(\Omega), R_2(\omega) - ?$$

$$S_{\triangle ACE} - ?$$

$$CD = 2$$

$$BD = 3$$

$$\frac{3}{5} = \frac{0,8R}{AC}$$

$$AC = \frac{4R}{3}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{R+R-2r+r}{2R}$$

$$6R = 5(2R - r)$$

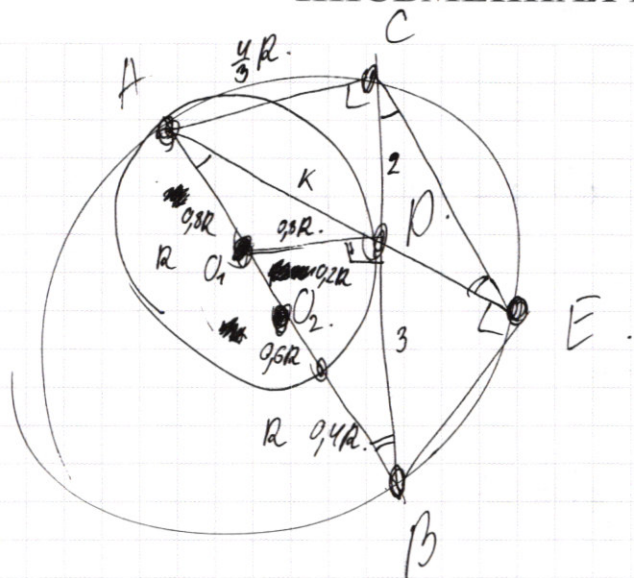
$$6R = 10R - 5r$$

$$5r = 4R; \quad R - r = 0,8R$$

33

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 3 \\ \hline 105 \\ - 49 \\ \hline 56 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AB}{CE} = \frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DE}$$

$$4 + \frac{16}{9} \cdot \frac{225}{52} = K^2$$

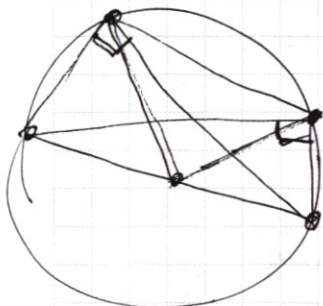
$$4 + \frac{4 \cdot 225}{9 \cdot 13} = K^2$$

$$6R = 10R - 5r$$

$$5r = 4R$$

$$r = \frac{4}{5}R$$

$$r = 0,8R$$



$$\frac{3}{5} = \frac{R+R-r}{2R}$$

$$\frac{1,2R}{0,8R} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\frac{3}{5} = \frac{0,8R}{t}$$

$$\frac{15 \cdot 0,4 \cdot 10}{10} = \frac{15 \cdot 4}{5 \cdot 2} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$25 = \frac{16}{9}R^2 + \frac{4R}{7} \cdot 21^2$$

$$25 = \frac{16R^2 + 36R^2}{9}$$

$$9 \cdot 25 = 52R^2$$

$$R = \frac{15}{\sqrt{52}} = \frac{15}{2\sqrt{13}}$$

$$0,6 = \frac{0,8R}{t}$$

$$t = \frac{0,8R}{0,6} = \frac{4}{3}R$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 96 \\ + 16 \\ \hline 52R \\ - 52R \quad 2 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\frac{25 \cdot 0,8 \cdot 10}{10} = \frac{25 \cdot 8}{10} = 5 \cdot 4 = 20$$

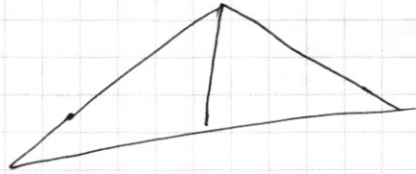
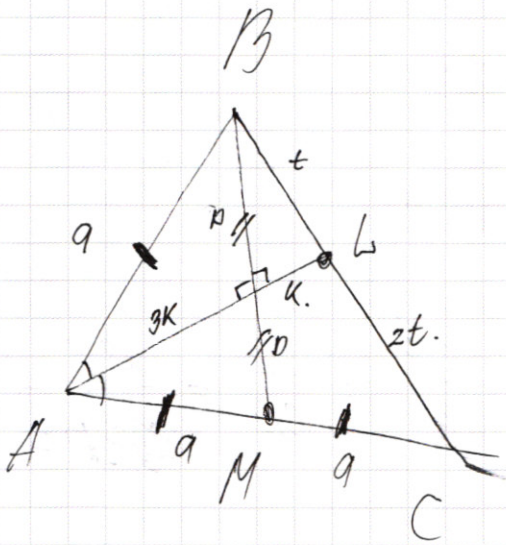
$$52R^2 = 25 \cdot 9$$

$$R = \frac{5 \cdot 3}{\sqrt{52}}$$

$$25 = \frac{16}{9}R^2 + \frac{4R}{9} \cdot 21^2$$

$$25 = \frac{16R^2 + 36R^2}{9}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ + 15 \\ \hline 225 \end{array}$$



$$3a + 3t = 900.$$

$$a + t = 300.$$

$$p^2 = a^2 - 9k^2 = t^2 - k^2.$$

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$(x^2 - 12x + 36) + 2y^2 - 4y - 16 = 0.$$

$$(x-6)^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0.$$

$$xy - 6y - x + 6 + 2y^2 - 4y - 16 = 0.$$

~~$$xy - 6y - x + 2y^2$$~~

$$2y^2 + xy - 10y - x - 10 = 0.$$

~~$$y(2y + x + t) - (2y$$~~

~~...~~

$$\begin{array}{r} - \\ 315 \\ \hline 168 \end{array}$$

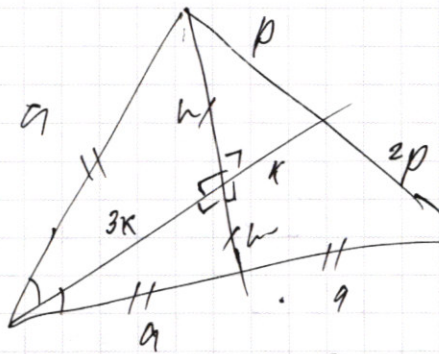
$$\begin{array}{r} x \\ 188 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 315 \\ - 168 \\ \hline 147 \\ - 98 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \\ 95 \\ \hline 3 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.



$$n((a; p)) - ?$$

$$\begin{cases} a+p=300 \\ 2a < a+3p \\ a < 2a+3p \\ 3p < 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+p=300 \\ p < a \\ a < 3p \end{cases}$$

$$a = 300 - p$$

$$a < 3p$$

$$\begin{cases} p < 300 - p \\ 300 - p < 3p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p < 300 \\ 4p > 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p > 75 \\ p < 150 \end{cases}$$

$$p \in [76; 149]$$

$$\begin{array}{r} 149 \\ - 76 \\ \hline 73 \end{array}$$

$$[1; 9]$$

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$(x^2 - 12x + 36) + 2y^2 - 4y - 16 = 0$$

$$xy - 6y - x + 6 + 2y^2 - 4y - 16 = 0$$

$$2y^2 + xy - 10y - x - 10 = 0$$

~~x - 6y =~~

$$\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$(x - 6y)^2 = (x - 6)(y - 1)$$

$$(x - 6)^2 = -2y^2 + 4y + 16$$

$$b^2 - 4ac =$$

$$= 16 + 4 \cdot 16 \cdot 2$$

$$16 + 4 \cdot 16 \cdot 2 =$$

$$= 16 + 128 =$$

$$= 144 = 12^2$$

$$y = \frac{-4 - 12}{-4}$$

$$(x - 6y)^2 = (x - 6)(y - 1)$$

$$(x - 6) = y^2 - 2y + 1$$

$$\sqrt{(x - 6y)^2} = (x - 6)(y - 1)$$

$$(x - 6)^2 = -2(y - 4)(y + 2)$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$(x - 6y)^2 = (x - 6)(y - 1)$$

$$(x - 6)^2 = -(2y^2 - 4y + 20)$$

$$(x - 6)^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0$$

$$(x - 6)^2 = -2y^2 + 4y + 16$$

$$(x - 6)^2 = -(2y^2 - 4y - 16)$$

f(x)

$$D = b^2 - 4ac = 16 + 4 \cdot 16 \cdot 2 =$$

$$= 16 + 128 = 144 = 12^2$$

$$y_1 = \frac{4 + 12}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$y_2 = \frac{4 - 12}{4} = -2$$

$$\begin{matrix} 16 \\ + 128 \\ \hline 144 \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$$

$\frac{18}{xy}$

$$18 \cdot 2 \cdot 2 = 36 \cdot 2 = 72.$$

$$x(y-1) - 6(y-1)$$

$$D = 144$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ - 72 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$(x-6)(y-1).$$

$$2(y^2-2y+1) + x^2-12x+18.$$

$$2(y-1)^2 + (x^2-12x+36) - 18 = 0.$$

$$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1).$$

$$2(y-1)^2 + (x-6) = 18.$$

$$(x-6y)^2 = tp.$$

$$2p^2 + t = 18.$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)