МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

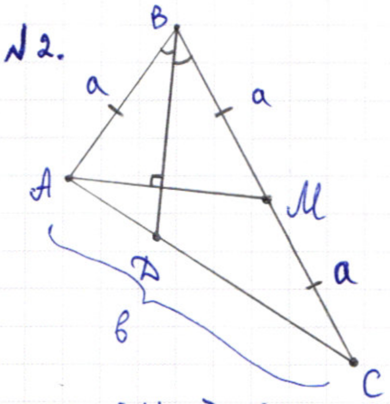
№1. Пусть $a=a$; $b=aq$; $c=aq^2$

Рассмотрим уравнение $ax^2-2bx+c=0$: $D=4b^2-4ac=4a^2q^2-4\cdot a\cdot aq^2=0 \Rightarrow$ корень один и он равен $\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}=\frac{aq}{a}=q$, также известно, что этот корень - следующий член геом. прогрессии $\Rightarrow q=aq^3 \Rightarrow 1=aq^2$

Это и есть c - третий член геом. прогрессии

Ответ: 1.

№2.



BD - биссектриса

AM - медиана.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором под условие подходят бис. и медиана из разных вершин. В $\triangle ABM$ биссектриса является высотой $\Rightarrow$ $AB=BM$. $\Rightarrow$ В тр-ке ABC одна сторона должна быть больше другой в два раза. Докажем, что это достаточное условие. Если $AB=\frac{BC}{2}$, то $\triangle ABM$ равнобедренный $\Rightarrow$ в нем бис. - это высота $\Rightarrow$ медиана и биссектриса в $\triangle ABC$ образуют угол 90°.

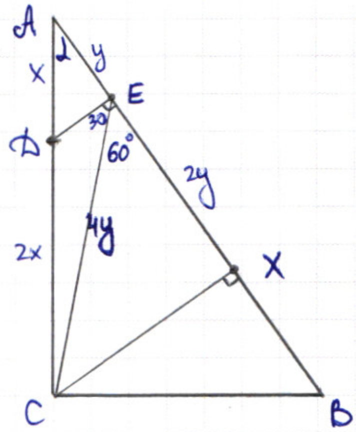
по неравенству тр-ка: $b<3a$; $b>a$;

$P=3a+b=900 \Rightarrow b=900-3a$

$a<900-3a<3a \Rightarrow 4a<900<6a \Rightarrow a<225$ и $a>150 \Rightarrow$ подходящих чисел $225-151=74$. Для каждого a есть пример, так как угол между AB и BC мы можем задать сами, для каждой стороны a выполняется неравенство треугольника.

Если эти медиана и биссектриса из одной вершины, то угол при этой вершине $\geq 180^\circ$, т.к. медиана и бис. находится внутри тр-ка и углы по разные стороны от бис. до сторон равны, а один из них ~~равен~~ больше ~~???~~ 90°. - противоречие.

Ответ: 74.

№4. 

Опустим перпендикуляр CX на AB.

$AD = x \Rightarrow CD = 2x$; $AE = y \Rightarrow EX = 2y$, т.к. $DE \parallel CX$ и $\triangle AED \sim \triangle AXC$ с коэффициентом $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$.

$\angle CED = 30^\circ \Rightarrow \angle CEX = 60^\circ$.

$tg\,60 = \frac{CX}{2y} = \sqrt{3} \Rightarrow CX = 2y\sqrt{3}$

$tg\,\alpha = \frac{CX}{3y} = \frac{2y\sqrt{3}}{3y} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Найдем S_{CED}: $EC = 2EX = 4y$ (т.к. прямоуг тр-к с углом 30° $\triangle CEX$)

$3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

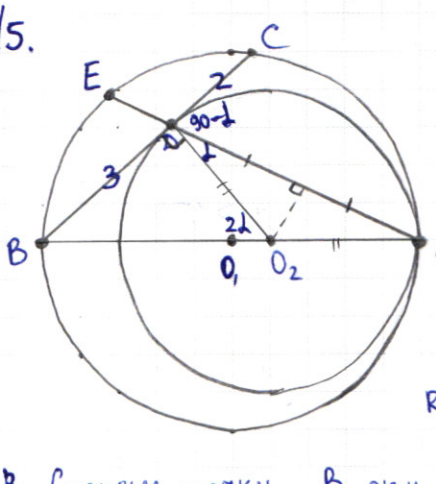
$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4(1-\sin^2\alpha) = 3\sin^2\alpha \Rightarrow 7\sin^2\alpha = 4 \Rightarrow$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{DE}{x} = \frac{DE \cdot 3}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \frac{2}{3}$

$tg\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{3y} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} DE \cdot CE \cdot \sin 30 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $S_{CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

№5. 

$90^\circ = \angle O_2DB = \angle ACB$, т.к. опираются на диаметры окружностей / ~~???~~ угол между касательной и радиусом. $\Rightarrow \triangle DO_2B \sim \triangle ABC$:

$\frac{3}{5} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{2}{5} \Rightarrow r = \frac{4R}{5}$

R - радиус большой окр; r - маленькой

$\frac{B}{5}$ Степень точки B отн. маленькой окр. $3^2 = (2R-2r) \cdot 2R = 4R \cdot \frac{R}{5} \Rightarrow$

$9 = \frac{4}{5}R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow R = \frac{3}{2}\sqrt{5} \Rightarrow r = \frac{4 \cdot 3\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = 1{,}2\sqrt{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(2\alpha) = \frac{r}{2R-r}$

для $\triangle O_2AD$: $r^2 + r^2 - \cancel{AD}\ 2r^2\cos(180-2\alpha) = AD^2$

$AD^2 = r^2(2 + 2\cos(2\alpha)) = r^2\left(2 + 2\frac{r}{2R-r}\right) = 2r^2\left(1 + \frac{1{,}2\sqrt5}{3\sqrt5 - 1{,}2\sqrt5}\right) = \frac{2r^2\cdot 5}{3} = \frac{10}{3}r^2$

$AD = \sqrt{\frac{10}{3}}\, r = \sqrt{\frac{10}{3}\cdot\frac{6^2 5}{5^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6^2}{3}} = \underline{6\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$AD \cdot ED = BD \cdot DC = 6 \Rightarrow ED = \frac{6}{6\sqrt{\frac{2}{3}}} = \underline{\sqrt{\frac{3}{2}}}$

$\cos\alpha = \frac{AD}{2O_2D} = \frac{6\sqrt{\frac{2}{3}}}{2\cdot 1{,}2\sqrt5} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} = \sin(90-\alpha)$

$\sin(90-\alpha) = \sin(90+\alpha)$

$S_{BACE} = S_{BAD} + S_{ADC} + S_{CED} + S_{BDE} = \frac{1}{2}\sin(90-\alpha)(BD\cdot AD + AD\cdot CD + CD\cdot ED + DE\cdot BD) = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{15}}\left(18\sqrt{\frac{2}{3}} + 12\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{15}}\left(30\sqrt{\frac{2}{3}} + 5\sqrt{\frac{3}{2}}\right) =$

$= \frac{75}{2}\sqrt{\frac{4}{45}} + \frac{25}{4}\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}\sqrt{4\cdot 5} + \frac{5}{4}\sqrt5 = 5\sqrt5 + \frac{5}{4}\sqrt5 = 6{,}25\sqrt5$

Ответ: $r = \frac{6}{5}\sqrt5$; $R = \frac{3}{2}\sqrt5$; $S = 6{,}25\sqrt5$

№7.

$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(4)=2$
$f(5)=2$
$f(6)=2$
$f(7)=3$
$f(8)=3$
$f(9)=2$
$f(10)=3$
$f(11)=5$
$f(12)=3$
$f(13)=6$
$f(14)=4$
$f(15)=3$
$f(16)=4$
$f(17)=8$
$f(18)=3$
$f(19)=9$
$f(20)=4$
$f(21)=4$
$f(22)=6$

Для всех простых считаем исходя из $f(p) = [p/2]$

Для составных исходя из $f(ab) = f(a) + f(b)$, зная их разложение на множители.

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(x) - f(y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(y) = -f(\frac{1}{y})$ для всех y (допустимых)

Значит $f(x/y) = f(x) - f(y) < 0$

Посчитаем сколько a подходит под условие: $2 \le a \le 22$

$f(a)=1$: 2
$f(a)=2$: 4
$f(a)=3$: 6
$f(a)=4$: 4
$f(a)=5$: 1
$f(a)=6$: 2
$f(a)=8$: 1
$f(a)=9$: 1

Теперь посчитаем сколько можно найти пар из этих $f(a)$ так, чтобы $f(a_2) > f(a_1)$

$2\cdot 19 + 4\cdot 15 + 6\cdot 9 + 4\cdot 5 + 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 =$

$= 80 + 92 + 5 = 172 + 5 = 177.$

(Мы смотрели на кол-во вариантов $f(a_1) = 1$ и кол-во пар к нему, $f(a_1) = 2$ и пары к нему ....)

Ответ: 177.

№3. Сделаем замену $t = x - 6 + y - 1$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &2(x-6y)^2 = 2(x-6)(y-1) \\ &(x-6)^2 + (y-1)^2 = 18 - (y-1)^2 \end{aligned}$$

$t^2 = 2(x-6y)^2 + 18 - (y-1)^2$

$(x - 6 + y - 1)^2 = 2(x^2 + 36y^2 - 12y) + 18 - (y^2 - 2y + 1)$

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 49 - 2xy \cancel{+14y} - 14x = \cancel{2}x^2 + 70y^2 - \overset{10}{\cancel{24}}y + 17 - \cancel{y^2} + 2y$

$49 - 2xy - 14x = x^2 + 70y^2 - 10y + 2y + 17$

$32 - 2xy - 14x = x^2 + 70y^2 - 8y$

$x^2 + x(14 + 2y) + (70y^2 - 8y - 32) = 0$

$D = 196 + 4y^2 + 56y - \ ..$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

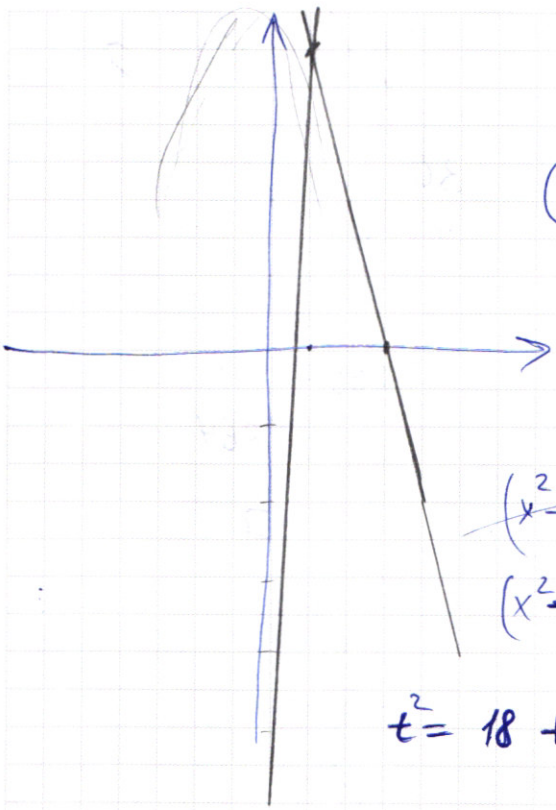
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$(x-6)(y+1) = (x-6y)^2$

$(x-6)\sqrt{2}(y+1) = t$

$t^2 =$

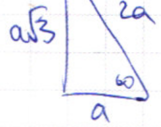
$a = x-6$

$b = y+1$

$\cancel{(x^2-12x+36)+2y^2}$

$(x^2-12x+36) + 2(y^2-2y+1) = 18 \Rightarrow$

$t^2 = 18 + 2(x-6)\sqrt{2}(y+1) = (x-6y)^2 \cdot 2\sqrt{2} + 18$



$\cancel{x+y \leq 2}$

$a+6-6(b-1) = \sqrt{ab} = a-6b+12$

$a^2+2b^2 = 18$

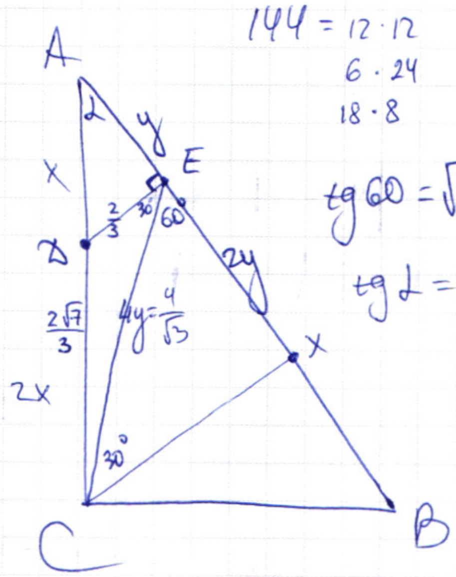
$144 = 12 \cdot 12$

$6 \cdot 24$

$18 \cdot 8$

$ab = a^2 + 36b^2 + 144 - 12ab + 24a - 144b$

$0 = 9a^2 + \underbrace{52b^2 - 13ab}_{13b(4b-a)} + 24a - 144b$



$\operatorname{tg} 60 = \sqrt{3} = \frac{cx}{2y}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{cx}{3y} = \frac{2y\sqrt{3}}{3y}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{4}{3}$

$3\sin^2\alpha = 4(1-\sin^2\alpha)$

$7\sin^2\alpha = 4$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{DE \cdot 3}{\sqrt{7}}$

$DE = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{12} \cdot \frac{42}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{7}$ $\quad \frac{2}{3\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3y}$ $\quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x-6 + y-1 = t$

$\cancel{x-6}$
$x+y-7=t$
$y = 7+t-x$

1) $x>6 \quad y>1$

$x \geq 6y > 6$

$t^2 = \underbrace{(x-6)^2+(y-1)^2}_{18} + \underbrace{2(x-6)(y-1)}_{2(x-6y)^2}$

$t^2-(x-6y)^2 = 18+(x-6y)^2$

$(x+y-7-x+6y)(x+y-7+x-6y) = 18+(x-6y)^2$

$\cancel{x+7y}\ (7y-7)(2x-5y-7) = 18+(x-6y)^2$

$26xy-14x-\cancel{35y^2}+35y-49y+49 = 18+x^2+71y^2 \cancel{-12xy}$

$26xy-14x-14y+49 = 18+x^2+71y^2$

$x^2+x(14-26y)+(71y^2+14y-49)=0$

$196+676y^2-728y-284y^2-56y+196=$

$392y^2-784y+196\cdot 2$

$2(196y^2-392y+196) \Rightarrow$

$\sqrt{D} = \sqrt{2}\,|14y-14|$

$x = \dfrac{26y-14 \pm\sqrt{2}\,|14y-14|}{2} =$

$13y-7 \pm 7\sqrt{2}(y-1)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$

$f(x) = -f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f(x/y) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) = f(x)$

$\cancel{f}(x)-f(y) < 0 = \cancel{f(x)}+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2)=1 \quad f(5)=2 \quad f(11)=5 \quad f(17)=8$

$f(3)=1 \quad f(7)=3 \quad f(13)=6 \quad f(19)=9$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ +52 \\ \hline 676 \end{array}$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 14 \\ \hline 104 \\ +30 \\ \hline 404 \end{array}$

$13\cdot 14\cdot 2$

$260+104$

364

728

$\begin{array}{r} 676 \\ -284 \\ \hline 392 \end{array}$

$\begin{array}{r} 728 \\ +56 \\ \hline 784 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad b \quad c$

$a \quad aq \quad aq^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

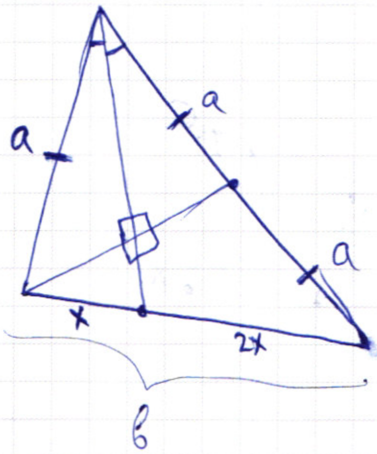
$D = 4b^2 - 4ac$

$aq^3 = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{a^2q^2 - a^2q^2}}{2a}$

$\frac{b}{2a} = \frac{aq}{2a} = \frac{q}{2} = aq^3$

$\frac{1}{2} = aq^2$

№1



$3a > b \qquad b > a$

~~$a + b > 2a$~~ ~~$2a + b > a$~~

$a < b < 3a$

$P = 3a + b = 900$

$a < 900 - 3a < 3a$

$4a < 900 < 6a$

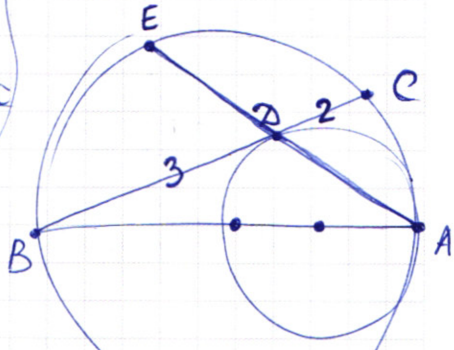
$a < 225 \qquad a > 150$

$224 - 150 = 74$ тр-ка

$21 - 7x - 8y = 35y^2 - 13xy$

$35y^2 - 13xy + 8y + 7x - 21 = 0$

$5(ED + DA)$



$\frac{3}{2}\sqrt{5} \qquad \frac{2,5}{1,5\sqrt{5}} = \frac{5}{3\sqrt{5}}$

$\frac{6}{5}\sqrt{5}$

$1,5\sqrt{5}$

$1,2\sqrt{5}$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x + y - 7 = t$

$x \geq 6y$

$t^2 = 18 - (y-1)^2 + 2(x-6y)^2$

$\cancel{x^2} + y^2 + 49 + 2xy - 14x - 14y = 18 - \cancel{y^2} - 1 + 2y + \cancel{2}x^2 + 72y^2 - 24xy$

~~$(x + 2y + \quad)(x + y - \quad) = 0$~~

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 = (x-6)(y-1) = (x-6y)^2$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$\cancel{y^2} + \cancel{2xy} + 49 - 14x - 14y = 17 + 2y + 70y^2 - 26xy$

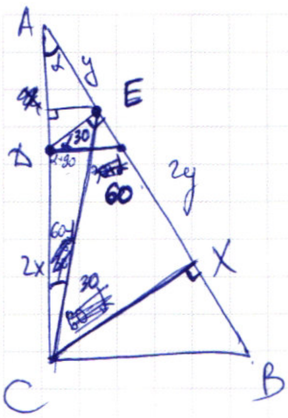
$42 - 14x - 16y = 8y + 70y^2 - 26xy$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$tg\alpha = \frac{BC}{3x} = \frac{DE}{AE} = \frac{EX}{AX}$

$\frac{X}{AB} = \frac{AE}{3X} \Rightarrow AE \cdot AB = 3x^2$

$\sin\alpha = \frac{(\frac{AB}{3} - AE)\cdot 3}{BC} = \frac{AB - 3AE}{\sin\alpha \cdot AB}$

$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \quad BC = \sin\alpha \cdot AB$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{3AE}{AB}$

$tg\alpha = \frac{CX}{3y} \quad tg(30+\alpha) = \frac{CX}{2y}$

$tg\alpha \cdot \frac{3}{2} = tg(30+\alpha)$

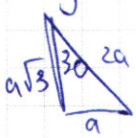
$\sin \alpha+\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$\cos \alpha+\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

$tg(\alpha+30) = \frac{tg\alpha + tg30}{1 - tg\alpha \cdot tg30} = \frac{3}{2} tg\alpha$

$tg\,30 = \frac{1}{\sqrt3}$



$\frac{1}{\sqrt3}$

$\frac{tg\alpha + \frac{1}{\sqrt3}}{1 - \frac{tg\alpha}{\sqrt3}} = \frac{3}{2} tg\alpha$

$tg\alpha + \frac{1}{\sqrt3} = \frac{3}{2} tg\alpha - \frac{\sqrt3\, tg^2\alpha}{2\sqrt3}$

$\frac{\sqrt3\, tg^2\alpha}{2} - \frac{tg\alpha}{2} + \frac{2}{\sqrt3} = 0$

$3tg^2\alpha - \sqrt3\, tg\alpha + 2 = 0$

$D = 3 -$

$2R = 3\sqrt5$

$9 + \frac{36 \cdot 5}{25} = 9 + \frac{36}{5} = 16,2$

$3a + 2a + 2b + 3b = 5(a+b)$

если $x \leq 0,5$

$8x - 12x + 6 = -4x + 6$

если $x > 0,5$

$8x + 12x - 6 = 20x - 6$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8} = x_0$

$-\frac{8 \cdot 9}{8^2} + \frac{6 \cdot 3}{8} + 7$

$-\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7$

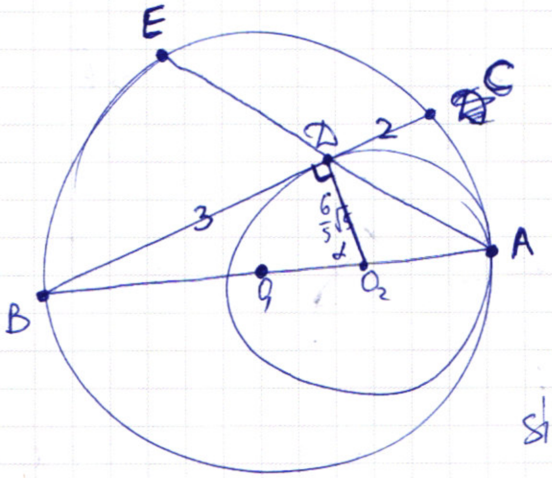
$\frac{9}{8} + 7$

$(\frac{3}{8}; 8\frac{1}{8})$

$tg60 = \frac{\sqrt3}{2} = \frac{CX}{2y}$

$CX = \sqrt3 \cdot y$

$tg\alpha = \frac{CX}{3y} = \frac{\sqrt3 y}{3y} = \frac{1}{\sqrt3}$



$\sin\alpha = \frac{3}{1,8\sqrt5}$

$\frac{1}{0,6\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{3}$

$\frac{3}{5} = \frac{2R - r}{2R}$

$6R = 10R - 5r$

$5r = 4R$

$r = \frac{4}{5}R$

$3\sqrt5 - 1,2\sqrt5$

$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$9 = 2\frac{R}{5} \cdot 2R = \frac{4R^2}{5}$

$45 = 4R^2$

$R = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt5$

$r = \frac{24 \cdot 3\sqrt5}{5 \cdot 2} = \frac{6}{\sqrt5} = \frac{6}{5}\sqrt5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

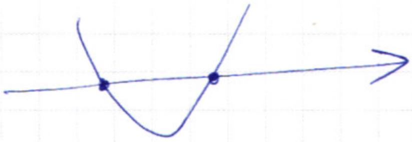
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

если $1 \geq x \geq 0{,}5$

$8x - 12x + 6 = 6 - 4x \leq ax + b$

$-8x^2 + (6-a)x + (7-b) \geq 0$

$8x^2 + (a-6)x + (b-7) \leq 0$



$x < 0{,}5$

$8x + 12x - 6 = 20x - 6 < ax + b$

$$\frac{6 - a \pm \sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)}}{\cancel{16}} \geq 10$$

$$\frac{6 - a - \sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)}}{16} \leq \cancel{-0{,}5}\ \cancel{-8}\ -14$$

$-a\ 2\sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)} - 14 \geq 10 \cancel{-a} - \cancel{\sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)}}$

$\sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)}\ \cancel{-4} \geq \cancel{8}\ 12$

$32 \cdot 7 = 210 + 14$

$(a-6)^2 - 32(b-7) \geq 144$

$a^2 - 12a + 36 - 32b + \overset{80}{224} \geq \cancel{144}$

$a^2 - 12a + 116 - 32b \geq 0$

$a^2 - 12a + 116 - 16(8-a) \geq 0$

$a^2 + 4a - 12 \geq 0$

$D = 16 + 48 = 64$

$a = \frac{-4 \pm 8}{2} = {-6 \atop 2}$

$6 - b \leq (a+4)x$

$6 - b \leq (a+4) \cdot (-0{,}5)$

$20x - 6 < ax + b$

$0{,}5(20-a) \leq x(20-a) < b + 6$

$10 - a/2 < b + 6$

$-\frac{a}{2} - 2 \leq b - 6$

$8 - a \leq 2b$

$8 \leq$