МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 - 6x - 7 = 0$

$D = 9^2 - 7\cdot 8 = 81 - 56 = 25$

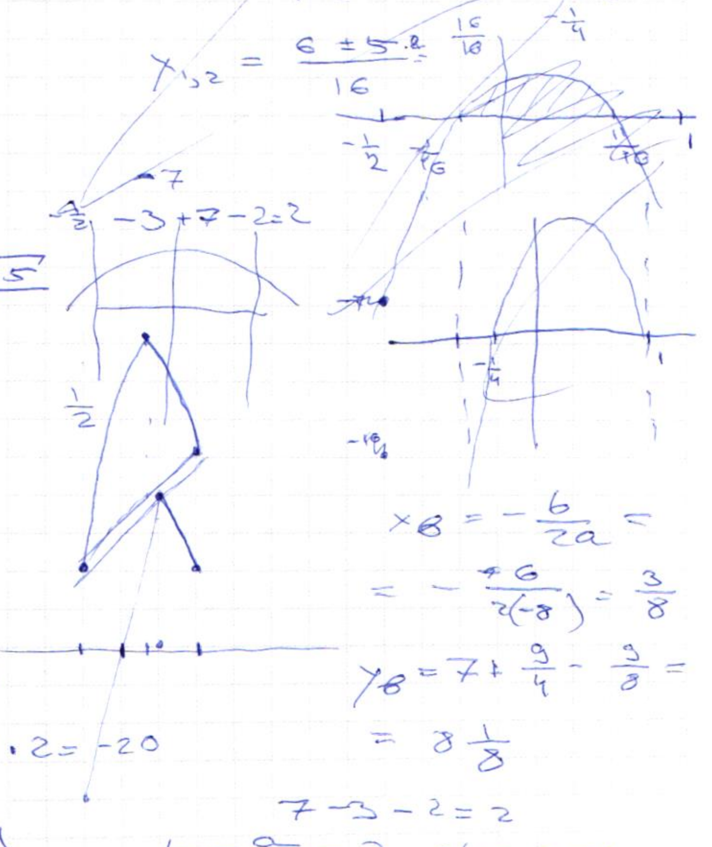
$x_{1,2} = \frac{6 \pm 5\cdot 2}{16}$

~~$y = 8x - 6|2x-1|$~~

$8x^2 - 6x - 7 = 0$

$D = 9 + 7\cdot 8 = 56 + 9 = 65$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\cdot\sqrt{65}}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{8}$



$8x - 6|2x-1| = y$

$x \ge \frac{1}{2}$

$8x - 12x + 6 = y$

$y = 6 - 4x$

$x < \frac{1}{2}$ $\quad 8x + 12x - 6 = 20x - 6$

$8 - 6\cdot 1 = 2 \quad -4 - 6\cdot 2 = -20$

$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-8)} = \frac{3}{8}$

$y_B = 7 + \frac{9}{4} - \frac{9}{8} = 8\frac{1}{8}$

$7 - 3 - 2 = 2$

$\frac{1}{2}a + b = 4$

$6 - \frac{a}{2} = 2 \quad 2b - a = 4$

$a + 2b = 8$

$a + b = 5$

$a + b = 5$

$3b = 9 \quad b = 3$

$a = 2$

$(2; 3)$

$\sqrt{(y-1)(x-6)}$ $\quad -2$

$(x-6y)^2 \; (y-1)(x-6) \quad -66$

~~$38y^2 + 76y + 20$~~

~~$y^2 + 2y + \frac{10}{19} = 0$~~

~~D~~

$(y-1)^2 \, 2(x-6)^2 \, 18 = 0$

$18 = 4(x-6y)^2$

$2\left(2(x-6y)^2 - 9\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№7.

$F(2)=F(2)+F(1)$

$F(1)=0 \quad F(5)=2 \quad F(2)=F(3)=1 \quad F(7)=3 \quad F(11)=5$

$F(6)=2 \quad F(13)=6 \quad F(17)=8$

1 − 0	6 − 1	11 − 5	~~1 − 0~~	6 − 2	11 − 5	16 − 4	21 − 3
2 − 1	7 − 3	12 − 3	2 − 1	7 − 3	12 − 2	17 − 8	22 − 6
3 − 1	8 − 3	13 − 6	3 − 1	8 − 3	13 − 6	18 − 3	
4 − 2	9 − 1	14 − 3	4 − 2	9 − 2	14 − 3	19 − 9	
5 − 2	10 − 5	15 − 6	5 − 2	10 − 2	15 − 2	20 − 2	

$5\cdot\frac{8}{5}\,\frac{5}{8}\cdot 8= \quad 2-3=-1 \quad 2+2+3+2+5+2+9+5+2=$

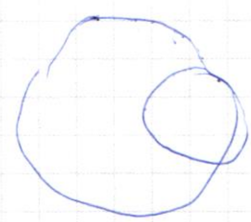
$=5+5+6+11+5=32$

$20+20+9\cdot 8+4\cdot 5+8\cdot 4+1\cdot 3+2\cdot 1+0=$

$65+4+72=76+65=141$

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2+2y^2-12x+4y+20=0 \end{cases} \quad x\geq 6y \quad 1\leq y\leq ?$$



$x^2-12yx+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2-13yx+36y^2+x+6y-6=0$

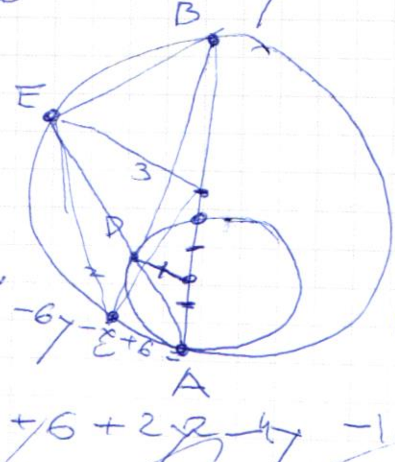
$13yx-39y^2-17x-10y+26=0$

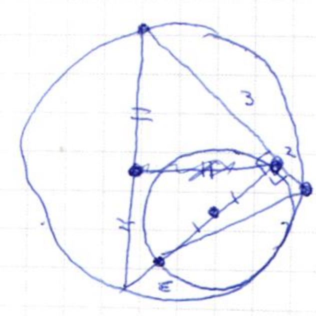
$39y^2-13yx+10y+17x+26=0$

$y=1 \quad x=6$

$+20=0$

$2 \quad 60-36$





-2

$-39y^2+20-4y+xy-6y-x+6=$

$(x-6y)^2-16+2y^2-12y=0$

$xy-6y-x+6+2y^2-4y-16=0$

$xy-10y+x-10=0$

$(x-10)(y+1)=0 \quad x=10 \quad y=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$a, b, c \quad a\cdot d = b \quad c = a\cdot d^2$

$x^2 - 2dx + d^2 = 0$

$(x-d)^2 = 0$

$x = d$

$x = a\cdot d^3 = d \quad a\cdot d^2 = \boxed{1 = c}$

№3.

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 - 12x + 20 - 4y + y^2 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$

$x^2 - 13xy + 6y^2 + x + 30 = 0$

$10 + 10y - 13xy + \ldots$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = \left(\sqrt{xy - 6y - x + 6}\right)^2 =$

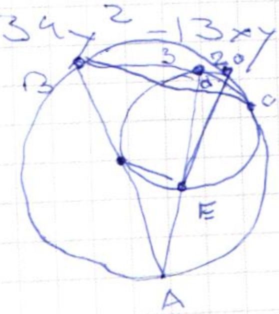
$= \sqrt{(x-6)(y-1)} \qquad x \le 6 \quad y \ge 1$

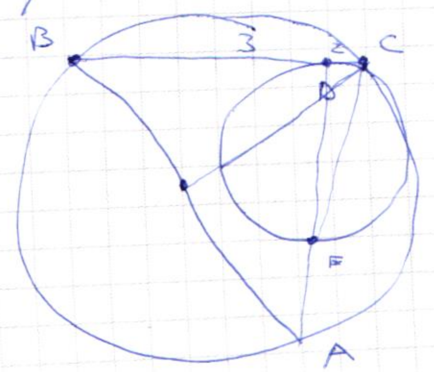
$\qquad\qquad\qquad\qquad x \ge 6 \quad y \le 1$

$= xy - 6y - x + 6$

$x^2 - 13xy + 6y + x + 36y^2 - 6 = 0$

$34y^2 - 13xy + 10y + 13x + 14 = 0$





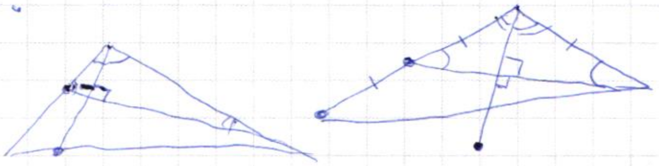
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 2.



$3x + c = 900$

$c = 3(300 - x)$

$c < 3x$

$2x < x + c$

$900 < 6x$

$x < c < 3x$

$c < 900 - c$ $\quad 150 < x$ $\quad 150$

$900 - c < 3c$ $\quad c < 450$ $\quad$ 675

$\cancel{450} < 3x < 750$

225

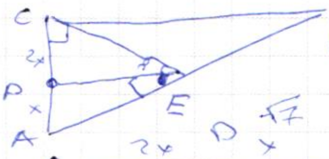
$\cancel{150} < 4c$

$\cancel{180} < x < 250$

$\cancel{180,\ 210,\ 240}$

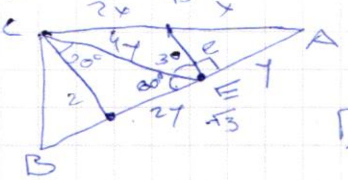
$225 < c$ $\quad \cancel{33}$

№ 5 4.



B $\quad tg\ BAC$

$4x^2 = \ell^2 + 16y^2 - 4\ell y \cdot \cos 30^\circ$



$\ell^2 - 4\sqrt{3} \cdot \ell y - (\cancel{4x^2 - y^2}) = 0$ $\quad 16y^2 - 4x^2$

$D = 3y^2 + \cancel{4}y^2 \cancel{+16}x^2 = -\cancel{7}y^2 + 16x^2$

$\ell = \frac{\sqrt{3}\,\ell y \pm 2\sqrt{-\cancel{7}y^2 + 16x^2}}{2}$ $\quad 16y^2 - 4x^2$

$16y^2 - 4y^2 = 4 \cdot 3y^2 = 2\sqrt{3} \cdot y$

$3x - 3y - 2\sqrt{3}y$

$9y^2 + 4 \cdot 3y^2 = (12 + 9)y^2 = 21y^2$

$3x = \sqrt{21}y$

$tg\angle CAD = \frac{2\sqrt{3}y}{3y} =$ $\quad x = \sqrt{\frac{7}{3}}y$ $\quad y = \sqrt{\frac{3}{7}}x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad S_{CED} = S_{ABC} - S_{CBE} - S_{ADE} =$

$AC = \sqrt{7}$ $\quad = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 2\,\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{3} - \frac{3}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{9 - 6 - 1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Введем d, такое что: $\frac{b}{a} = d$.

$b = a \cdot d$ (1), так как у нас геом. последовательность то d – это множитель при домножение x-ого члена геом. последовательности, мы получаем $x+1$-го.

Из этого следует:

$c = d \cdot b = d^2 \cdot a$ (2)

Подставим (1) и (2) в $ax^2 - 2bx + c$:

$a x^2 - 2adx + ad^2 = 0$ | поделим на a

Если $a = 0$, то вся последовательность равна 0, тогда 3-ий её член равен 0.

Пусть $a \neq 0$:

$x^2 - 2dx + d^2 = 0$

$(x - d)^2 = 0$

$x = d$

Т.к. x – четвертый член последовательности то $x = d^3 \cdot a$

$d = d^3 \cdot a$

$1 = d^2 \cdot a = c$ – третий член последовательности.

Ответ: если $a \neq 0$ третий член равен 1, если $a = 0$ третий член равен 0.

№2.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

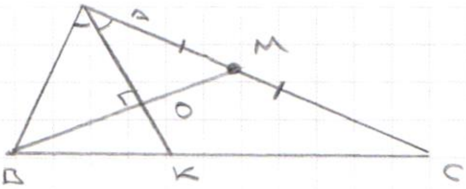


рис1

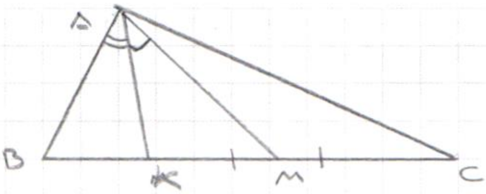


рис2

Заметим, что у нас возможно 2 случая:

1) медиана и биссектриса выходят из разных углов

2) медиана и биссектр. выходят из одного угла

Рассмотрим ситуацию №2 (рис 2)

Заметим, что $\angle AKM = 90^\circ$, и $\angle AKM < \angle KAC$ (т.к. медиана должна быть в треугольнике)

Т.к. $\angle KAC > \angle AKM$, то $\angle KAC > 90^\circ$, а т.к. AK – биссектр., то $\angle BAC > 180^\circ$ – такое не возможно

Рассмотрим ситуацию №1:

AK – биссектриса BM – медиана

Пусть (.) O – их пересечение

$\triangle ABO$ и $\triangle AOM$:

$$\left.\begin{array}{l} AO - \text{общ.} \\ \angle AOB = \angle AOM\ (BM \perp AK) \\ \angle BAO = \angle OAM\ (AK - \text{бис.}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABO = \triangle AOM \Rightarrow$$

$\Rightarrow AM = AB = x$

$2x + x + c = P_{\triangle ABC} = 900$

$3x + c = 900$ (1)

Заметим, что $AC < BA + BC$ (т.к иначе не будет $\triangle$) $\Longrightarrow 2x < x + c$

$x < c$

$3x < 3c$ (2)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

Из (1) и (2) следует: $900-c<3c$

$225<c$ (3)

~~Ти~~ Аналогично, $A: BC < AC+AB \Rightarrow$

$\Rightarrow c<3x$

Из (1) следует: $c<900-c$

$2c<\cancel{45}900$

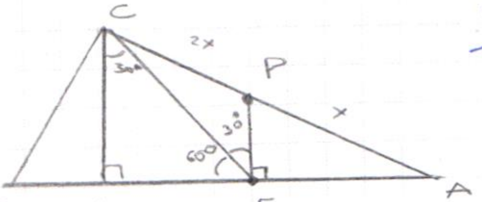
$c<450$ (4)

Из (3) и (4) следует, что: $225<c<450$

Т.к. ~~к~~ из (1) следует, что c и x взаимосвязаны, то у нас столько вариантов решения, сколько вариантов c. А вариантов c — $450-225-1=224$.

Ответ: 224.

№4.



а) Проведем высоту CH, она упадет внутрь ABC, т.к. $\angle A$~~BC~~CB - прямой

$\angle HEP=90°$, т.к. $PE\perp AB$.

$\angle CEH=\angle HHB-\angle CEP=90°-30°=60°$

Т.к $\angle CHE=90°$ (CH − выс) и $\angle CEH=60°$, то $\angle HCE=30°$

Пусть $DA=x$, тогда $CD=2x$ (т.к $AD=\frac{1}{3}AC$)

Обозначим $AE=y$.

$\measuredangle$ $\triangle ADE$ и $\triangle CHA$:

$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ - общ.}\\ \angle CHE = \angle DEH = 90^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ADE \sim \triangle CHA \Rightarrow$

$\Longrightarrow EH = 2EA = 2y.$

$\measuredangle$ $\triangle CHE$: т.к. $\angle HCE = 30^\circ$, и $\angle CHE = 90^\circ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow CE = 2HE = 4y$

Т.к. $\angle CHE = 90^\circ$: $CE^2 = HE^2 + CH^2$ $(CH = e)$

$$16y^2 = 4y^2 + e^2$$

$$e^2 = 12y^2$$

$$e = 2\sqrt{3}y$$

Т.к. $\triangle CHA \sim \triangle ADE$: $k = \frac{CA}{AD} = \frac{CD+DA}{AD} = \frac{3x}{x} = 3$

Т.к. $k = 3$ и $CH = 2\sqrt{3}y \Rightarrow DE = \frac{CH}{3} = \frac{2y}{\sqrt{3}}$

$tg\angle BAC = \frac{DE}{EA} = \frac{2y}{\sqrt{3}\cdot y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

б) Т.к. в $\triangle ADE$ $\angle DEA = 90^\circ \Longrightarrow DA^2 = EA^2 + DE^2$

$$x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y^2 = \frac{7}{3}y^2$$

$$y^2 = \frac{3}{7}x^2 \Longrightarrow y = \sqrt{\frac{3}{7}}x$$

$x = DA = \frac{CA}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$y = \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$AH = 3EA = 3\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ACH} - S_{\triangle DEA} - S_{\triangle CHE}$

$S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2}CH\cdot AH = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$S_{\triangle DEA} = \frac{1}{2}CH\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{\triangle CHE} = \frac{1}{2}DE\cdot EA = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$(CH = 2\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}})$

$S_{\triangle BDE} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{9-3-1}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$8x-6|2x-1| \le ax+6 \le -8x^2+6x+7$

Рассмотрим правую часть неравенства:

$8x^2-6x-7=0$

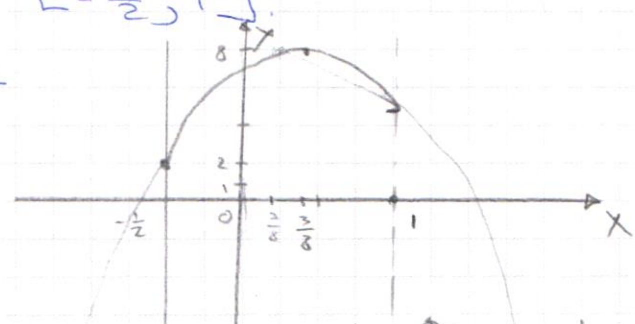
$D/4 = 9+8\cdot 7 = 9+56 = 65$

$x_{1,2} = \frac{6\pm 2\sqrt{65}}{16} = \frac{3\pm\sqrt{65}}{8}$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{65}}{8} > \frac{\sqrt{65}}{8} > \frac{\sqrt{64}}{8} > 1$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{65}}{8} < \frac{3-\sqrt{64}}{8} < \frac{4-\sqrt{64}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

Значит функция $-8x^2+6x+7$, не пересекает ось Ox на промежутке $[-\frac{1}{2};1]$.



$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-8)} = \frac{3}{8}$

$y_в = 7+\frac{9}{4}-\frac{9}{8} = 8\frac{1}{8}$

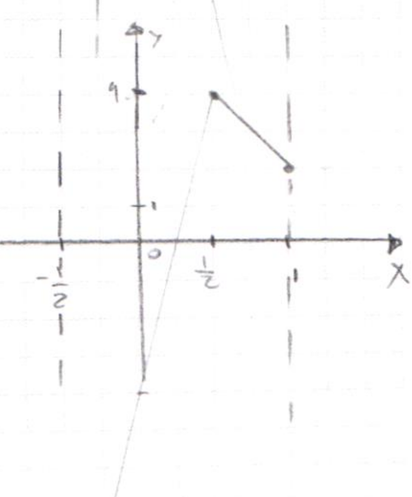
$y(1) = -8+6+7 = 5$

$y(-\frac{1}{2}) = -2-3+7 = 2$

Рассмотрим левую часть:

$y = 8x-6|2x-1|$

$y = \begin{cases} 8x-12x+6 = -4x+6, \text{ при } x \ge \frac{1}{2} \\ 8x+12x-6 = 20x-6, \text{ при } x < \frac{1}{2} \end{cases}$



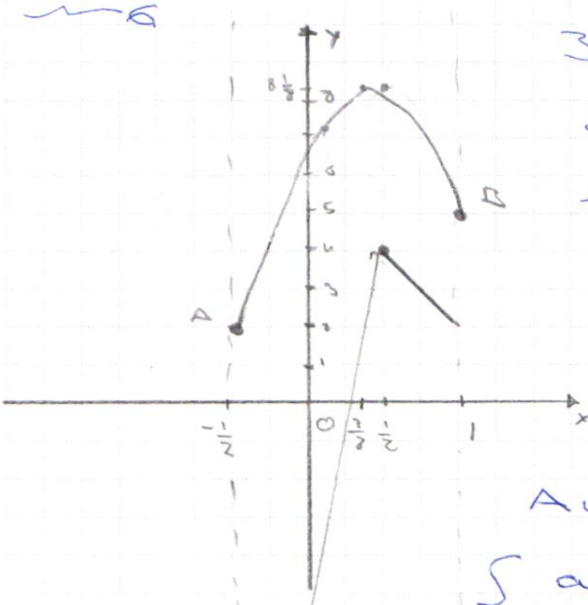
$y(1) = \cancel{20\cdot 1-6} = 6-4\cdot 1 = 2$

$y(-\frac{1}{2}) = -20\cdot\frac{1}{2}-6 = -16$

Наложим графики друг на друга.

Наш график должен быть ровно между ними

№6



Заметим что наша функция с одного конца не должна быть выше A, а с другой B.

A по середине ниже C.

Составим ур-е прямой кот. проходит через точки A и B.

$$\begin{cases} a\cdot 1+b=5 \\ -a\cdot\frac{1}{2}+b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 2b-a=4 \end{cases}$$

$$3b=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow a+3=5$$

$$a=2$$

Проверим проходит ли эта прямая через точку $C\left(\frac{1}{2};4\right)$

$$4=\frac{1}{2}\cdot a+b$$

$$4=\frac{1}{2}\cdot 2+3$$

$$4=1+3$$

$$4=4$$

Да, эта прямая проходит через (·)C, значит ниже и выше прямых подходящих по условию нет $\Rightarrow (a;b)=(2;3)$

Ответ: $(2;3)$

№7.

Давайте для нашего с вами удобства выпишем все значения $F(x)$ от 2 до 32.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$F(2)-1$ $F(5)-2$ $F(8)-3$ $F(11)-5$ $F(14)-4$ $F(17)-8$
$F(3)-1$ $F(6)-2$ $F(9)-2$ $F(12)-3$ $F(15)-3$ $F(18)-3$
$F(4)-2$ $F(7)-3$ $F(10)-3$ $F(13)-6$ $F(16)-4$ $F(19)-9$

$F(20)-4$ $F(21)-4$ $F(22)-6$

Давайте выпишем, сколько у нас получилось чисел одинаковых: 1 – 2, 2 – 3, 3 – 6, 4 – 4, ~~1–5~~ 5 – 1, 6 – 2, 8 – 1, 9 – 1.

Чтобы $F\left(\frac{x}{y}\right)<0$, надо: $F\left(y\cdot\frac{x}{y}\right)=F(y)+F\left(\frac{x}{y}\right)$

$F\left(\frac{x}{y}\right)=F\left(y\cdot\frac{x}{y}\right)-F(y)=F(x)-F(y)<0$

~~При этом~~ Теперь будем выбирать такие x и y, чтобы $F(x)-F(y)<0$, воспользуемся тем, что мы уже знаем все $F(x)$, для $2\leq x\leq 22$.

Тогда с помощью расчетов получим (мы будем брать $F(x)=y$, и искать сколько у него пар с $F(z)=y-k$, где $k>0$.):

$S = 3\cdot2+6\cdot5+4\cdot11+1\cdot12+2\cdot13+1\cdot15+1\cdot16 =$

$= 6+30+44+28+26+15 = 80+54+15 = 100+44+5 =$

$= 149.$

Ответ: 149.