МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Решение:

~~bx^2+2~~

$ax^2-2bx+c=0$;

1) если $a=0$, то $b=0$; $c=0$ (следует из определения геометрической прогрессии), откуда третий член геом. прогрессии: $\{0\}$.

(четвёртый член $\mapsto$ корень уравнения $0=0$, т.е. $\{0\}$ т.к. $0 \to$ член данной геометрической прогрессии, а при $x=0$ уравнение верно).

2) если $a \neq 0$, то $\frac{D}{4}=b^2-ac$, а т.к. $a;b;c$ – последовательные члены геометрической прогрессии, то $ac=b^2$ (известное св-о геометрической прогрессии), т.е. $\frac{D}{4}=0$, т.е.

$x=\frac{b}{a}$ (корень кратности 2).

Если $a;b;c;\frac{b}{a} \to$ геометрическая прогрессия, то пусть q – её знаменатель, т.е. $b=aq$; $c=aq^2$; ($q \in \mathbb{R}$; $q \neq 0$ по опр. геом. прогрессии)

Откуда четвёртый член данной прогрессии: aq^3 но мы выяснили, что четвёртый член этой последовательности $\to \frac{b}{a}=\frac{aq}{a}=q$;

т.е. $\begin{cases} aq^3=q \\ q\neq0 \end{cases} \Rightarrow aq^2=1$, т.е. $c=1$ (это и есть 3-ий член прогрессии)

Ответ: $\{+1\}$ или $\{0\}$

(0 возможен лишь в случае геометрической прогрессии: $\{0;0;0;0\}$.)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

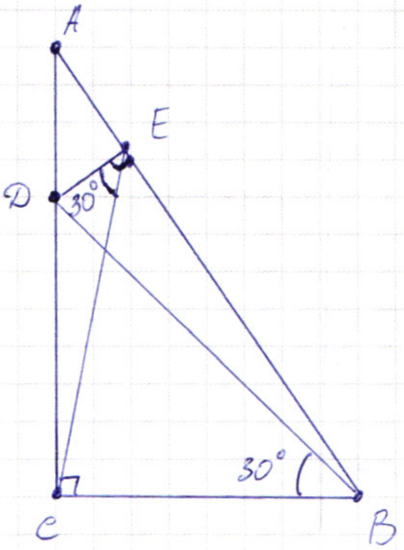
Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

№4 а) б)

Дано:
$\triangle ABC: \angle ACB = 90°$;
$D \in AC$; $E \in AB$;
$AD : AC = 1 : 3$;
$DE \perp AB$
$\angle CED = 30°$;
$AC = \sqrt{7}$;

а) $tg\angle BAC$ — ?
б) S_{CED} — ?



Решение:

а) Т.к. $\angle DCB = 90° = \angle DEB$ (по условию), то $CDEB$ — впис. (по призн. впис. четырёхуг. о противопол. углах).

Отсюда $\angle DEC = 30° = \angle DBC$ (по св-у впис четырёхуг. о соотв. углах). (по усл.)

Т.к. $AD : AC = 1 : 3$ (по условию), то по аксиоме изм. отрезков: $CD = \frac{2}{3}AC$;

В $\triangle ABC: \angle ACB = 90° \Rightarrow tg\angle BAC = \frac{BC}{AC}$ (по опр. тангенса острого угла прямоуг. треуг.)

В $\triangle BCD: \angle BCD = 90° \Rightarrow ctg\angle DBC = ctg\,30° = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{\frac{2}{3}AC} = 1,5\,tg\angle BAC$;

(по опр. котангенса острого угла прямоуг. треуг.; по пред. действием)

Отсюда $tg\angle BAC = \frac{2}{3}ctg\,30° = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

б) Пусть $\angle BAC = \alpha$ (обозначение), тогда $tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (по пункту а);

По следствию из основного тригонометрического тождества: $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Т.к. α — острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos\alpha > 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получаем:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \cos\alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\alpha=\frac{3}{7} \\ \cos\alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}};$$

~~По основному тре~~

По определению тангенса: $tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = tg\,\alpha\cdot\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\cdot 3}{3\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}};$

Т.к. $AD:AC=1:3$ (по условию), то по аксиоме изм. отрезков: $AD=\frac{AC}{3}=\frac{\sqrt{7}}{3}$;

в $\triangle ADE$: $\angle AED=90^\circ \Rightarrow \sin\angle DAE=\sin\alpha=\frac{DE}{AD}$; (по опр. синуса острого угла прямоуг. треуг.)

Откуда $DE=AD\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2}{3}$;

в $\triangle ADE$: $\angle ADE+\angle AED+\angle DAE=180^\circ$ (по теор. о сумме внутр. углов треуг.)

Откуда $\angle ADE=90^\circ-\alpha \Rightarrow \sin\angle ADE=\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}}$;

Т.к. $CD=\frac{2}{3}AC$, то $CD=\frac{2\sqrt{7}}{3}$;

По теореме о площади треуг., выраженной через синус соответствующего угла:

$S_{CDE}=\frac{1}{2}\sin\angle EDC\cdot CD\cdot DE=\frac{1}{2}\cos\alpha\cdot CD\cdot DE=$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{2\cdot 9\cdot\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$;

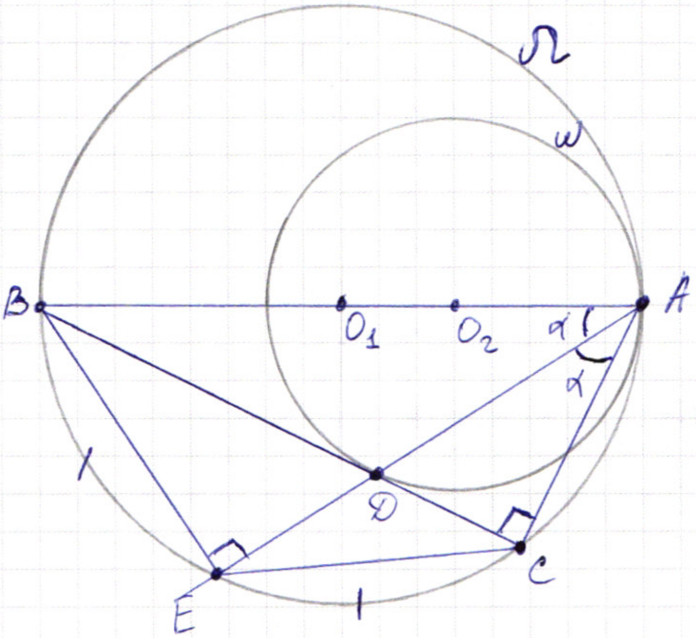
Ответ: а) $\{+\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$; б) $\{+\frac{2\sqrt{3}}{9}\}$

№5

Дано:

Ω – Окр. $(O_1; R)$.
ω – Окр. $(O_2; r)$.
$(R > r)$
Ω касается ω в точке A внутр. образом.
$B \in \Omega$;
AB – диаметр Ω;
$C \in \Omega$; BC касается ω в точке D;
$[AD) \cap \Omega = \{E; A\}$
$CD = 2$; $BD = 3$;

R – ? r – ?
S_{BACE} – ?



Решение:

1) Т.к. Ω касается ω в точке A; ω касается BC (хорда Ω) в точке D; $[AD) \cap \Omega = \{A; E\}$. } $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ E – середина дуги BC. (по лемме Архимеда) (известная лемма).
(по условию)

2) Т.к. E – середина дуги BC, то $\angle BAE = \angle CAE = \alpha$ (по следствию из теор. о впис. угле).

3) Т.к. AB – диаметр Ω, то $\angle BCA = \angle BEA = 90°$ (по следствию из теор. о впис. угле).

4) Т.к. AD – бисс. ΔBAC (по опр. бисс. треуг.), то $AB : AC = BD : DC = 3 : 2$ (по основному св-у биссектрисы треуг.; по условию).

5) Пусть $AB = 3x$, тогда $AC = 2x$ $(x > 0)$. (обозначения), тогда, т.к. в ΔABC: $\angle ACB = 90°$, то $AC^2 + BC^2 = AB^2$ (по теор. Пифагора).

Отсюда $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 9x^2 - 4x^2 = 5x^2 \overset{\text{т.к. } x>0}{\Leftrightarrow} BC = \sqrt{5}x$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) Т.к. $BC = BD + DC = 3 + 2 = 5$ (по аксиоме изм. отрезков), то $\sqrt{5}x = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 3\sqrt{5} \Rightarrow (AC = 2\sqrt{5}) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. $AB = 2R = 3\sqrt{5}$, то $R = 1{,}5\sqrt{5}$;
(по опр. диаметра окружности).

7) Т.к. $BO_2 = BA - AO_2 = 3\sqrt{5} - r$
(по аксиоме изм. отрезков; по опр. окружн.); т.к. $O_2D = r$ (по опр. окружн.).
и т.к. $DO_2 \perp BC$ (по хар. св-у касательной к окружности), то
$\triangle BO_2D: \angle BDO_2 = 90^\circ \Rightarrow O_2D^2 + BD^2 = BO_2^2$
(по теор. Пифагора)
Откуда $r^2 + 3^2 = (3\sqrt{5} - r)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r^2 + 9 = 45 + r^2 - 6\sqrt{5}r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6\sqrt{5}r = 36 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow r = 1{,}2\sqrt{5}$;

8) $\triangle ACE: \dfrac{CE}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow CE = 2R\sin\alpha$

$\triangle ABE: \dfrac{BE}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow BE = 2R\sin\alpha$

(по следствию из теоремы синусов).

9) $ACEB$ – впис. (по условию) $\Rightarrow \angle BEC = 180^\circ -$
$- \angle BAC = 180^\circ - 2\alpha$ (по св-у впис. четырёхуг. о противопол. углах).
Т.е. $\sin\angle BEC = \sin 2\alpha$;

10) в $\triangle BAC: \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow \sin\angle BAC = \sin 2\alpha =$
$= \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5}{3\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (по опр. синуса острого угла прямоуг. треуг.)

Т.к. 2α – острый угол прямоуг. треуг., то $0<\alpha<45^\circ \Rightarrow 0<\sin\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}$

т.к. $f(x)=\sin x \uparrow$ на $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$.

Пусть $\sin^2\alpha = t$, где $0<t<\frac{1}{2}$

т.к. $f(x)=\sqrt{x} \uparrow$ на $D(f)=[0;+\infty)$.

тогда $\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

(по основному тригоном. тождеству; по формуле синуса двойного угла).

т.е. $\begin{cases} \frac{5}{9}=4t(1-t) \\ 0<t<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=49t-49t^2 \\ 0<t<0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 49t^2-49t+5=0 \\ 0<t<0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36t^2-36t+5=0 \ (1) \\ 0<t<0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{6} \\ t=\frac{5}{6} \end{array}\right. \\ 0<t<0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{1}{6}.$

~~(1) $9t^2-9t+5=0$~~

~~$D=81-4\cdot5\cdot9=81-180$~~

(1) $36t^2-36t+5=0$

$\frac{D}{4}=18^2-36\cdot5=324-180=144>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{18\pm12}{36}=\frac{3\pm2}{6}$, т.е. 2 различ. корня $\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{6} \\ t=\frac{5}{6} \end{array}\right.$;

Отсюда $\sin^2\alpha=\frac{1}{6}$.

11) $S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BEC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot BE\cdot CE =$

по аксиоме изм. площадей

по формуле площади прямоуг. треуг., по формуле площади треуг. через синус соотв. угла

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot 2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\alpha =$

$=5\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{5}}{3}\cdot(3\sqrt{5})^2\cdot\frac{1}{6}=5\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{5}\cdot45}{3\cdot6}=$

$=5\sqrt{5}+5\sqrt{5}=10\sqrt{5}$;

Ответ: $\{3\sqrt{5}\}$ – радиус Ω; $\{2\sqrt{5}\}$ → радиус ω; $\{10\sqrt{5}\}$ → площадь BACE.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 Решение:

Рассмотрим сначала 2-ую часть неравенства:

$$ax+b \leq -8x^2+6x+7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x^2+(6-a)x+(7-b) \geq 0.$$

$f(x) = -8x^2+(6-a)x+(7-b) \mapsto$ функция графиком которой является парабола, ветви которой направлены вниз.

Заметим что нам необходимо (по условию) потребовать, чтобы $f(1) \geq 0$; $f(-\frac{1}{2}) \geq 0$.

Поясним, почему этих условий достаточно для выполнения условия.

Пусть существует $\xi \in [-\frac{1}{2}; 1]$ такое, что $f(x) < 0$, но тогда $f(1) \geq 0$; $f(x) < 0$; $f(-\frac{1}{2}) \geq 0$

Противоречие, т.к. $f(x)$ — непрерывная функция, возрастающая при $x \in (-\infty; \delta]$ и убывающий при $x \in [\delta; +\infty)$ где $\delta = \frac{a-6}{2\cdot(-8)} = \frac{6-a}{-16}$ (абсцисса вершины параболы).

Откуда $\forall \xi \in [-\frac{1}{2}; +1]$: $f(\xi) \geq 0$ ▨

Решим систему: $\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(-\frac{1}{2}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8+6-a+7-b \geq 0 \\ -2+\frac{a}{2}-3+7-b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \leq 5 \\ a+4 \geq 2b \end{cases}$; $\mapsto$ получили из второй ~~первой~~ части нер-ва.

Рассмотрим первую часть нер-ва

$8x - 6|2x-1| \le ax+b$;

а) если $0,5 \le x \le 1$, тогда $|2x-1| = 2x-1$;

$\begin{cases} 8x - 12x + 6 \le ax + b \\ 0,5 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le (a+4)x + (b-6) \\ 0,5 \le x \le 1 \end{cases}$.

Т.к. $g(x) = (a+4)x + (b-6)$ → прямая (возможно горизонтальная), то, чтобы отрезок этой прямой (при $x \in [0,5; +1]$) лежал не ниже оси абсцисс необходимо и достаточно потребовать:

$\begin{cases} g(1) \ge 0 \\ g(0,5) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4+b-6 \ge 0 \\ \frac{a}{2} + 2 + b - 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \ge 2 \\ a+2b \ge 8 \end{cases}$;

Заметим, что $8 \le a + 2b \le a + a + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \ge 2$. из 2-ой части нер-ва

Также заметим, что

$10 \le 8 + a \le 2(a+b) \le 2 \cdot 5 = 10$

из 2-ой части нер-ва.

причём равенство достигается лишь при:

$\begin{cases} a = 2 \\ a + 2b = 8 \\ a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$! ↦ единственное возможное решение.

Осталось лишь удостовериться, что данная пара чисел нам подходит, т.к. $\begin{cases} a+b=5 \\ a+4=2b \end{cases}$ (из 2-ой части нер-ва)

и $\begin{cases} a+b \ge 2 \text{ (верно)}. \\ a+2b = 8. \end{cases}$ (из 1-ой части нер-ва (пункт а)).

б) если $-0,5 \le x \le 0,5$, то мы хотим удостовериться, что

$8x - 6|2x-1| \le 2x + 3$, т.е.

$8x + 12x - 6 \le 2x + 3$

$18x - 9 \le 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $-0,5 \le x \le 0,5$:

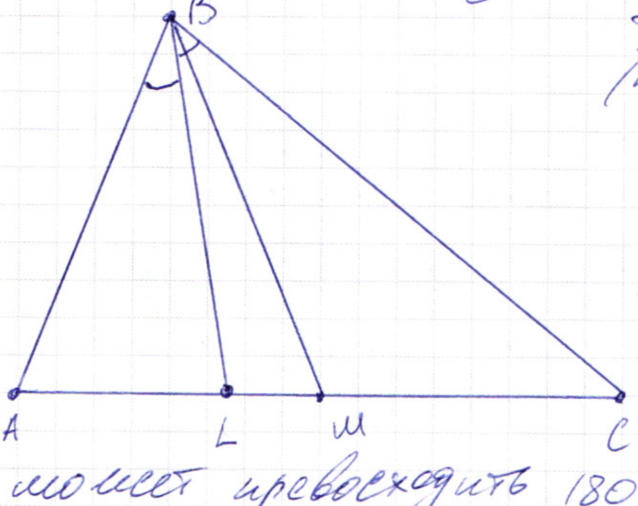
$-18 \le 18x - 9 \le 0$ (верно), т.е.

$(+3; +2) \mapsto$ единственная пара, которая может нам подойти.

Ответ: $(+3; +2)$.

№2 Решение:

① Покажем, почему рассматриваемые медиана и биссектриса не могут выходить из одной вершины. (см. рис: $\triangle ABC$; BM – медиана; BL – бисс.; $\angle MBL = 90°$)

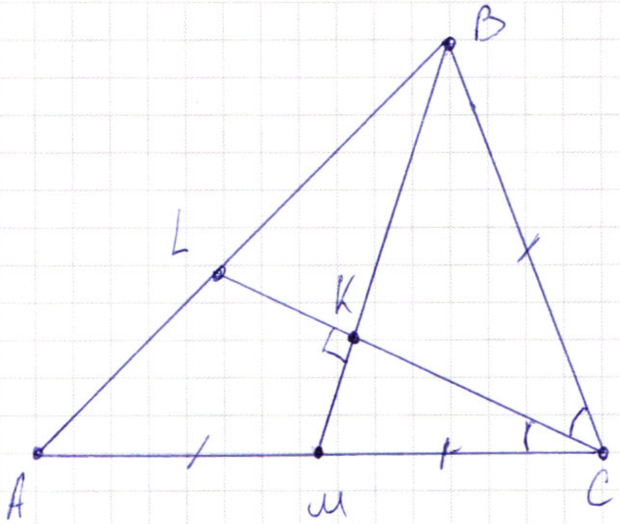


Т.к. $\angle ABL = \angle CBL$ (по опр. бисс. треуг.) то $\angle ABC = 2\angle CBL =$
$= 2\angle MBL + 2\angle CBM =$
$= 180° + 2\angle CBM > 180°$ (по аксиоме изм. углов).

Получили противоречие, т.к. угол треуг. (внутренний) не может превосходить $180°$.

Т.е. искомые медиана и бисс. выходят из разных вершин (см. рис.: $\triangle ABC$ (BM – медиана; CL – бисс.; $BM \cap CL = \{K\}$; $\angle MKL = 90°$ ($BM \perp CL$))

Т.к. в $\triangle BMC$: CK – высота и бисс. (по опр. высоты треуг.), то $\triangle BMC$ – р/б. с осн. BM) (по призн. р/б. треуг. о медиане и высоте из верш. к осн.) $\Rightarrow BC = CM$ (по опр. р/б. треуг.), а $CM = AM$ (по опр. медианы треуг.)



Т.е. $AC = 2BC = 2a$ (обозначение).

Т.е. если у треугольника медиана перпендикулярна биссектрисе, то какие-то 2 его стороны относятся как $2 : 1$.

Докажем обратное: если какие-то 2 стороны треуг. относятся как $2 : 1$, то одна из его медиан перпендикулярна одной из его биссектрис (рис. тот же).

Если BM — медиана $\triangle ABC$, то $AM = MC = CB = a$ (по аксиоме изм. отрезков; по опр. медианы)

Т.е. $\triangle BCM$ — р/б. с осн. BM (по опр. р/б. треуг.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. CL — бисс. $\angle MCB$, то $CL \perp BM$ (по св-у р/б. треуг. о бисс. и высоте из верш. к осн.).

Т.е. нас интересует кол-во треугольников со сторонами: a; $2a$; $900 - 3a$. (по опр. периметра треуг.)

Пусть набор чисел $(a; 2a; 900 - 3a)$ совпал с каким-то набором $(b; 2b; 900 - 3b)$ при $a \neq b$, тогда рассмотрим как такое могло получиться:

если $a = 2b$, то $2a = 4b$; если $2a = 2b$, то $a = b \to$
$\to$ противоречие
если $2a = b$, то $4b = b \Rightarrow b = 0 \to$
$\to$ противоречие.
$2a = 900 - 3b \Rightarrow$
$\Rightarrow 7b = 900 \Rightarrow b = \frac{900}{7}$;

$a = \frac{1800}{7}$; $2a = \frac{3600}{7}$; $900 - 3a = 900 - \frac{6 \cdot 900}{7} = \frac{900}{7}$;

$b = \frac{900}{7}$; $2b = \frac{1800}{7}$; $900 - 3b = 900 - \frac{3 \cdot 900}{7} = \frac{3600}{7}$.

НО ~~[illegible]~~ $b + 2b = \frac{3 \cdot 900}{7} < \frac{6 \cdot 900}{7} = 900 - 3b$

$a + (900 - 3a) = \frac{3 \cdot 900}{7} < \frac{6 \cdot 900}{7} = 2a$, откуда

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

таких треугольников не существует в силу нер-ва треугольника.

• если $a = 900 - 3b$, то $b = \frac{900 - a}{3} = 300 - \frac{a}{3}$.

если $b = a \to$ противоречие

если $b = 2a$, то $300 - \frac{a}{3} = 2a \Leftrightarrow 900 = 7a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{900}{7} \to$ такой случай мы рассматривали выше.

если $b = 900 - 3a$, то $300 - \frac{a}{3} = 900 - 3a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\frac{2}{3}a = 600 \Leftrightarrow a = \frac{1800}{8} = 225$;

$a = 225$; $2a = 450$; $900 - 3a = 225$;

$b = 225$; $2b = 450$; $900 - 3b = 225$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие, т.к. $a = b$.

Откуда при различных a все такие наборы различны. Осталось лишь выяснить при каких целых a существуют треугольники с нужным набором сторон, что будет нам гарантировать нер-во треуг.

(Очевидно, что если $a \in \mathbb{Z}$, то $2a \in \mathbb{Z}$; $900 - 3a \in \mathbb{Z}$).

$$\begin{cases} a + (900 - 3a) > 2a \\ a + 2a > (900 - 3a) \cdot 1 \\ 2a + (900 - 3a) > a \\ 900 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 900 > 4a \\ 6a > 900 \\ 2a < 900 \\ a < 900 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 225 \\ a > 150 \end{cases}.$$

т.е. $224 \geq a \geq 151 \Rightarrow$ от 151 до 224 ровно 74 целых числа (включая концы), т.е. искомых треугольников $\to$ 74 шт. Ответ: 74 треуг.

№7 Решение:

① Пусть $a \in \mathbb{Z}$, тогда научимся считать $f\left(\frac{1}{a}\right)$, выразив её через $f(a)$.

1) $f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{a^2}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a^2}\right)$;

2) $f\left(\frac{1}{a^2}\right) = f\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 2f\left(\frac{1}{a}\right)$,

т.е. $f\left(\frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a^2}\right) = f(a) + 2f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$.

② Выпишем $f(x)$ для всех $x \in [+2; +22]$

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$;
$f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$;
$f(4) = f(2) + f(2) = 2$;
$f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$;
$f(6) = f(2) + f(3) = 2$;
$f(7) = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$;
$f(8) = f(4) + f(2) = 3$;
$f(9) = f(3) + f(3) = 2$;
$f(10) = f(2) + f(5) = 3$;
$f(11) = \left[\frac{11}{2}\right] = 5$;
$f(12) = f(2) + f(6) = 3$;
$f(13) = \left[\frac{13}{2}\right] = 6$;
$f(14) = f(2) + f(7) = 4$;
$f(15) = f(3) + f(5) = 3$;
$f(16) = f(4) + f(4) = 4$;
$f(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$;
$f(18) = f(9) + f(2) = 3$;
$f(19) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$;
$f(20) = f(5) + f(4) = 4$;
$f(21) = f(3) + f(7) = 4$;
$f(22) = f(11) + f(2) = 6$;

③ Если $x, y \in \mathbb{Z}$; $x, y \in [2; 22]$, то

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

Выпишем для каждого y все x для которых $f(x) < f(y)$.
(останется лишь посчитать кол-во выпис. чисел).

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- $y=2$: нет таких чисел. (0 шт.)
- $y=3$; нет таких чисел. (0 шт.)
- $y=4$: 2; 3; (2 шт.)
- $y=5$; 2; 3; (2 шт.)
- $y=6$; 2; 3; (2 шт.)
- $y=7$: 2; 3; 4; 5; 6; 9; (6 шт.)
- $y=8$: 2; 3; 4; 5; 6; 9 (6 шт.)
- $y=9$; 2; 3; (2 шт.)
- $y=10$; 2; 3; 4; 5; 6; 9; (6 шт.)
- $y=11$: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; (16 чисел).
- $y=12$: 2; 3; 4; 5; 6; 9; (6 шт.)
- $y=13$: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; (17 чисел.)
- $y=14$: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 18; (12 чисел.)
- $y=15$; 2; 3; 4; 5; 6; 9 (6 чисел)
- $y=16$: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 18; (12 шт.)
- $y=17$: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22. (19 чисел)
- $y=18$; 2; 3; 4; 5; 6; 9; (6 шт.)
- $y=19$: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 20; 21; 22 (20 шт.)
- $y=20$: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 18. (12 шт.)
- $y=21$; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 18 (12 шт.)
- $y=22$; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; (17 чисел.)

Итого: всего $2+2+2+6+6+2+6+16+6+$
$+17+12+6+12+19+6+20+12+12+17=$
$=2\cdot 4+6\cdot 6+12\cdot 4+16+2\cdot 17+19+20=$
$=\overbrace{8+36}+\overbrace{48+16}+34+39=$
$=44+64+73=108+73=181$ искомая дробь. (кол-во искомых пар.)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: 181 пара.

№3 Решение:

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6\cdot(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases};$$

Пусть $x-6=a$; $y-1=b$; $a;b\in\mathbb{R}$;

получим:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ a\geq 6b \text{ (ОДЗ)}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \text{ (1)} \\ a^2+2b^2=18 \\ a\geq 6b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+2b^2=18 \\ a\geq 6b. \end{cases}$$

(1) $a^2-13ab+36b^2=0$.

$D=169b^2-4\cdot 36b^2=25b^2\geq 0 \Rightarrow$ либо 2 разл. корня, либо 1 корень кратности 2:

$$a=\frac{13b\pm 5b}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b. \end{array}\right.$$

① если $a=9b$, то $9b\geq 6b \Leftrightarrow 3b\geq 0 \Leftrightarrow b\geq 0$.

тогда $\begin{cases} a=9b \\ a^2+2b^2=18 \\ b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 81b^2+2b^2=18 \\ b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2=\frac{18}{83} \\ b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b=\sqrt{\frac{18}{83}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$, т.е.

$$x=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+6;\quad y=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+1.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) если $a = 4b$, то $4b \geq 6b \Leftrightarrow 2b \leq 0 \Leftrightarrow b \leq 0$.

Отгуда $\begin{cases} a = 4b \\ a^2 + 2b^2 = 18 \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b \\ 18b^2 = 18 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow a = -4.$

Отгуда $x = a + 6 = 2$; $y = b + 1 = 0$;

Ответ: $(2; 0)$; $\left(\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 6; \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 1\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9+r^2=(3\sqrt{5}-r)^2$

$9+\cancel{r^2}=45+\cancel{r^2}-6\sqrt{5}r.$

$6\sqrt{5}r=36.$

$r=\frac{6}{\sqrt{5}}=1{,}2\sqrt{5};$

$CE=2R\sin\alpha;$

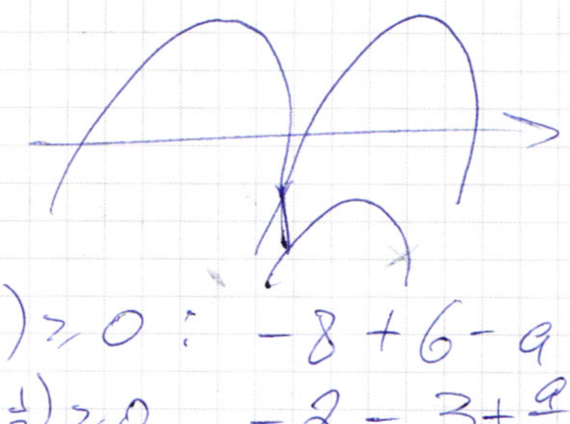
$BE=2R\sin\alpha$

$\frac{1}{2}\sin2\alpha\cdot4R^2\sin^2\alpha=2R^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin2\alpha.$

1. $-8x^2+6x+7-ax-b\geq0$

$-8x^2+(6-a)x+(7-b)\geq0.$

ветви ~~вну~~ вниз.



$f(1)\geq0: \ -8+6-a+7-b\geq0 \Rightarrow a+b\leq5.$

$f(-\frac{1}{2})\geq0 \quad -2-3+\frac{a}{2}+7-b\geq0.$

$a+4\geq2b.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

② $8x - 6|2x-1| \le ax + b$.

а) ~~[illegible]~~. $x \ge \frac{1}{2}$.

$8x - 12x + 6 \le ax + b$.

$0 \le (a+4)x + (b-6)$

$0 \le a+4+b-6$

$2 \le a+b$

$0 \le \frac{a}{2}+2+b-6$

$8 \le a+2b \le 5+b \Rightarrow b \ge 3$.

$a+4 \ge 2b \ge 6$.

$a \ge 2$.

$a+b \le 5$.

б) $x \le \frac{1}{2}$.

$8x+12x-6 \le ax+b$.

$(20-a)x \le b+6$.

$-10+\frac{a}{2} \le b+6$.

$a \le b+32$.

$10-\frac{a}{2} \le b+6$.

$8 \le a+2b$.

$3a+x = 900-\cancel{a}$

$x = 900-3a$.

$x < 3a$.

$900 < 6a$

$150 < a$.

$x > a$.

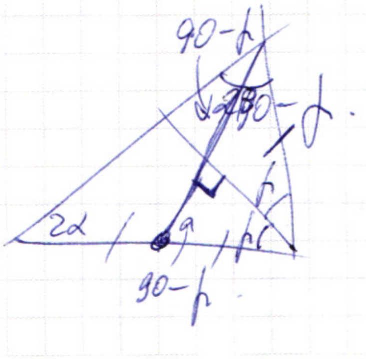
$900 > 4a$.

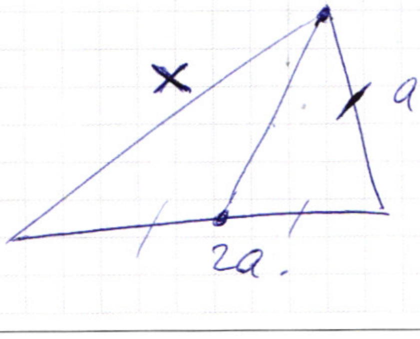
$225 > a$.

$151 \le a \le 224$.

$1 \le a-150 \le 74$.

74.





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

① $x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$ (ОДЗ).

② $x^2+2y^2-12x-4y+20=0.$

$(x-6)^2+2(y-1)^2+20-36-2=0.$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18.$

$x-6=a$; $y-1=b$.

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ a\geq 6b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0. \\ a^2+2b^2=18. \\ a\geq 6b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34b^2-13ab=-18. \\ a^2+2b^2=18 \\ a\geq 6b. \end{cases}$

③ $13ab=34b^2+18.$

$a=\dfrac{34b^2+18}{13b}\geq 6b \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{34b^2+18-78b^2}{13b}\geq 0.$

$\dfrac{18-44b^2}{13b}\geq 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{-12a^2 - 13ab + 10b^2 = -18 \cdot 43}$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0.$

$a^2 + 2b^2 = 18.$

$D = 169b^2 - 4 \cdot 36b^2 = (169 - 144)b^2 = 25b^2$

$\frac{13 \pm 5}{2} b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 9b. \\ a = 4b. \end{array}\right.$

$83b^2 = 18 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{18}{83}}$

$a = 9\sqrt{\frac{18}{83}};$

$18b^2 = 18 \Rightarrow b = -1$

$a = -4.$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(2) = 1;$

$f(3) = 1.$

$f(5) = 2.$

$f(7) = 3.$

$f(11) = 5.$

$f(13) = 6.$

$f(17) = 8.$

$f(19) = 9$

$f(23) = 11;$

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

$f(4) = 2;\ f(6) = 2;\ f(8) = 3;$

$f(9) = 2;\ f(10) = 3;\ f(12) = 3;$

$f(14) = 4;\ f(15) = 3;\ f(16) = 4;$

$f(18) = 3;\ f(20) = 4;$

$f(21) = 4;\ f(22) = 6;$

$f(\frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{4}) = 1 + f(\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{4}) = 2f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2}) = 1 + 2f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2}) = -1;$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) = f(3) + 2f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a^2}\right) = f(a) + 2f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{a^2}\right) = 2f\left(\frac{1}{a}\right)$ $\Rightarrow$ $f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

Далее перебор!!!

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)