МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c, x – геом. прогр. $\Rightarrow b = aq;\ c = aq^2;\ x = aq^3$, где q – знаменат. прогр.

$ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow \cancel{a^2q^6}\ a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2 = 0 \Rightarrow$

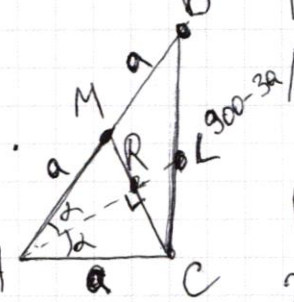
$\Rightarrow c^3 + 2c^2 + c = 0$ $C_1 = C$ (тогда прогр. постоянная, все члены равны 0). ~~Если $c \neq 0$, то можем~~

$c(c^2 + 2c + 1) = 0 \Rightarrow c(c+1)^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$

Ответ: 0; −1

№2

Рассмотрим один такой треугольник ABC.
Без огр. общности пусть AL – бис-са и CM – медиана и $AL \perp CM$ и $AL \cap CM = R$ (рассматриваем случай, когда мед. и бис-са выходят из разн. вершин)



Пусть $AC = a$. Тогда в ΔAMC AR – бис-са и высота $\Rightarrow \Delta AMC$ – р/б $\Rightarrow$
$\Rightarrow AM = AC = a$; $AM = MB = a$, т.к CM – мед
$P = 900 \Rightarrow BC = 900 - 3a$

Запишем правило Δ-ка для трех сторон:

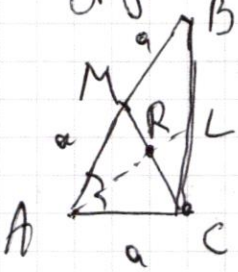
$\begin{cases} a < 900 - a \\ 2a < 900 - 2a \\ 900 - 3a < 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a < 900 \\ 4a < 900 \\ 6a > 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 225 \\ a > 150 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 (продолжение)

Очевидно, что сторона длины a всегда будет минимальной. Поэтому всего таких треугольников столько же, сколько и таких $a \in \mathbb{N}$, что $150 < a < 225$. Таких a $224 - 150 = 74$.

Теперь докажем обратную конструкцию: если одна ст. равна a, другая $2a$, а третья $900-3a$, то мед $\perp$ бис-се.



В ΔAMC: $AM = AC$, т.к. $AM = MB$, $MA = 2a$;
AR - бис-са в р/б Δ-ке $\Rightarrow$ AR - высота $\Rightarrow$
$\Rightarrow AL \perp MC$ ЧТД.

Таким образом утв., что бис-са $\perp$ мед., равносильно утв., что $AC = a$, $AB = 2a$, $BC = 900 - 3a$ (если $P = 900$)
Также очевидно, что медиана и бис-са, выходящие из одной вершины A, не могут быть перп. (в противном случае $\angle A \geq 180°$ - противореч)
Поэтому есть всего 74 таких Δ-ка.

Ответ: 74

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

Замена: $x-6=a$; $y-1=b$; $\Rightarrow \begin{cases} a+6-6(b+1)=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow$

$x=a+6$ $\qquad$ $y=b+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+2b^2=18 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $a-6b=\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 6b \\ ab\geq 0 \\ a^2-12ab+36b^2=ab \end{cases}$ – ОДЗ на a и b; $ab\geq 0 \Rightarrow a$ и b одного знака; $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-13ab+36b^2=0$. ~~Если $a=0$, то $36b^2=0 \Rightarrow b=0$, но тогда (2) не выполняется $\Rightarrow$ отбрасываем этот случай. Тогда поделим все на a^2: (Замена $\frac{b}{a}=p$)~~

~~$1-13p+36p^2=0$; $D=169-144=25 \Rightarrow p_{1,2}=\frac{13\pm5}{36}=$ $=\frac{1}{2}$;~~ Если $b=0$, то $a^2=0 \Rightarrow a=0$, что не удовл уравн (2). Поэтому $b\neq 0 \Rightarrow$ можно поделить обе части на b^2. ~~Поэ~~ Замена: $\frac{a}{b}=p$. Получим:

$p^2-13p+36=0$; $D=169-144=25 \Rightarrow p_{1,2}=\frac{13\pm5}{2}=$
$=9;\ 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \ \text{~~не подходит~~} \end{array}\right.$

№3 (продолжение)

$\left[\begin{array}{l} a = 9b \Rightarrow a \text{ и } b \text{ неотр (если они отр, то } 9b < 6b) \\ a = 4b \Rightarrow a \text{ и } b \text{ неположит (если они положит, то } 4b < 6b) \end{array}\right.$ противореч. ОДЗ

противореч. ОДЗ

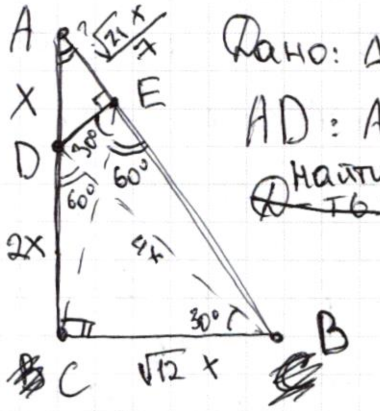
Подставляя полученные значение в (2):

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \text{ и } b \geq 0 \\ 81b^2 + 2b^2 = 18 \Rightarrow 83b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{18}{83}} \text{ и } a = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ \begin{cases} a \leq 0 \text{ и } b \leq 0 \\ 16b^2 + 2b^2 = 18 \Rightarrow 18b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \text{ и } a = -4 \end{array}\right.$

Делаем обратную замену и получаем такие р-я: $(x; y) = \left(9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; \sqrt{\frac{18}{83}} + 1\right); (2; 0)$

Ответ: $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; \sqrt{\frac{18}{83}} + 1\right)$ и $(2; 0)$

№4



Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг ($\angle C = 90°$). $D \in AC$ и $E \in AB$.
$AD : AC = \frac{1}{3}$; $DE \perp AB$; $\angle CED = 90°$

Найти: а) $tg\angle BAC$; б) S_{CED}, если $AC = \sqrt{7}$

Р-е: Пусть $AD = x \Rightarrow AC = 3x \Rightarrow DC = 2x$
$\angle DEB = 90°$ и $\angle ACB = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow DCBE$ - впис $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ в $\triangle DCB$ $DB = \frac{2x}{\sin 30°} = 4x \Rightarrow CB = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12}x \Rightarrow$
(по т. Пиф)
$\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{12}x}{3x} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

По т. Пиф: $AB = \sqrt{9x^2 + 12x^2} = \sqrt{21}x \Rightarrow \sin\angle BAC = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{21}} =$
$= \frac{2\sqrt{7}}{7}$. $\Rightarrow DE = x \cdot \sin\angle BAC = \frac{2\sqrt{7}x}{7}$; $\cos\angle BAC = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{21}x}{7}$. По т. кос. в ΔAEC:

$CE^2 = 9x^2 + \frac{21}{49}x^2 - 2\cdot 3x \cdot \frac{\sqrt{21}x}{7} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} =$

$= 9x^2 + \frac{21}{49}x^2 - 6 \cdot \frac{21}{49}x^2 = 9x^2 - \frac{5\cdot 21}{49}x^2 =$

$= \frac{9\cdot 49 - 5\cdot 21}{49}x^2 = \frac{336}{49}x^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{336}}{49}x = CE \Rightarrow$

$\Rightarrow CE = \frac{4\sqrt{21}}{49}x \Rightarrow S_{CDE} = \frac{1}{2}\cdot \sin\angle DEC \cdot DE \cdot CE =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}x \cdot \frac{4\sqrt{21}}{49}x = \frac{14\sqrt{3}}{343}x^2;$

$3x = \sqrt{7} = AC \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow S_{CDE} = \frac{14\cdot\sqrt{3}\cdot 7}{343\cdot 9} =$

$= \frac{7^2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{7^3\cdot 9} = \frac{2\sqrt{3}}{63}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{63}$

№7

Заметим, что $f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(x)$ (т.к. $\frac{x}{y}\cdot y = x$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. Фактически, если мы фиксируем значение $f(x) = c$, то нужно найти кол-во таких y, что $f(y) < c$. Запишем и посчитаем значение функции для всех натуральных аргументов в промежутке $[2; 22]$

№7 (продолжение)

$f(2)=\left[\frac{2}{2}\right]=1$

$f(3)=\left[\frac{3}{2}\right]=1$

$f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(5)=\left[\frac{5}{2}\right]=2$

$f(6)=f(3)+f(2)=2$

$f(7)=\left[\frac{7}{2}\right]=3$

$f(8)=f(4)+f(2)=3$

$f(9)=f(3)+f(3)=2$

$f(10)=f(5)+f(2)=3$

$f(11)=\left[\frac{11}{2}\right]=5$

$f(12)=f(6)+f(2)=3$

$f(13)=\left[\frac{13}{2}\right]=6$

$f(14)=f(7)+f(2)=4$

$f(15)=f(5)+f(3)=3$

$f(16)=f(8)+f(2)=4$

$f(17)=\left[\frac{17}{2}\right]=8$

$f(18)=f(9)+f(2)=3$

$f(19)=\left[\frac{19}{2}\right]=9$

$f(20)=f(10)+f(2)=4$

$f(21)=f(7)+f(3)=4$

$f(22)=f(11)+f(2)=6$

Запишем все значение функций в порядке возрастание:

1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3

4 4 4 4 5 6 6 8 9

Нужно для каждого такого значения посчитать кол-во значений, строго больше данного.

$19+19+15+15+15+15+$

$+9+9+9+9+9+9+$

$+5+5+5+5+4+2+2+1=$

$=19\cdot 2+15\cdot 4+9\cdot 6+5\cdot 4+$

$+4+2\cdot 2+1=38+60+54+20$

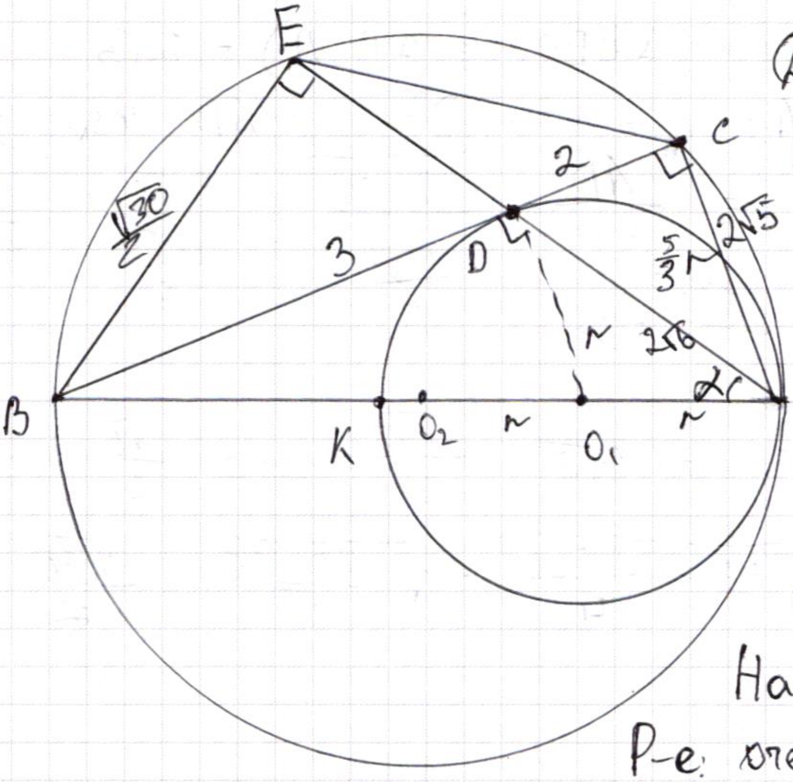
$+8+1=40+60+60+20+1=$

$=181$

Ответ: 181

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Дано: $\Omega^{(R;O_2)}$ и $\omega^{(r;O_1)}$ - окр, касаются внутр образом в т. A; AB - диаметр Ω; $C \in \Omega$ так, что BC - кас к ω (D - точка кас)

$AD \cap \Omega = E$; $BD=4$; $CD=2$.

Найти: R и r; S_{BACE}

Р-е: очевидно, что O_1 и O_2 лежат на AB. Пусть $AB \cap \omega = K$. BD - кас к ω $\Rightarrow \angle BDO_1 = 90°$.

$\Delta BDO_1 \sim \Delta BCA$ ($\angle BCA = 90°$, т.к. опир на диам) по 2-м углам $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BO_1}{BA} \Rightarrow \frac{2R-\cancel{2}r}{2R} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow 6R = 5R \cdot 2 - 10r \Rightarrow 4R = 10r \Rightarrow 2R = 5r$~~

$\Rightarrow 6R = 10R - 5r \Rightarrow 4R = 5r. \Rightarrow 4R^2 = \frac{25r^2}{4}$

По св. кас и сек: $BD^2 = BK \cdot BA \Rightarrow 9 = (2R-2r)2R =$

$= 4R^2 - 4Rr = 4R^2 - \cancel{25r}\, 5r^2 = \frac{25}{4}r^2 - 5r^2 = \frac{25-20}{4}r^2 =$

$= \frac{5}{4}r^2 \Rightarrow \frac{5}{4}r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = \frac{9 \cdot 4}{5} \Rightarrow r = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

N5 (продолжение)

$r = \frac{6\sqrt5}{5} \Rightarrow R = \frac{5r}{4} = \frac{6\sqrt5}{4} = \frac{3\sqrt5}{2} \Rightarrow \cancel{AB = 3\sqrt5}$

~~$AC = \frac{5}{3}r$ (из подобия $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA$) $= 2\sqrt5$~~

Ответ: $r = \frac{6\sqrt5}{5}$; $R = \frac{3\sqrt5}{2}$

$AC = \frac{5}{3}r$ (из подобия $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA$) $= 2\sqrt5$

по т. кос в $\triangle O_1DA$: $r^2 = r^2 + AD^2 - 2rAD \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{AD^2}{2rAD} = \frac{AD}{2r} = \frac{\sqrt{CD^2+CA^2}}{\frac{12\sqrt5}{5}} = \frac{2\sqrt6}{\frac{12\sqrt5}{5}} = \frac{10\sqrt6}{12\sqrt5} =$

$= \frac{5\sqrt6}{6\sqrt5} = \frac{5\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow EA = BA \cdot \cos\alpha = 3\sqrt5 \cdot \frac{\sqrt{30}}{6} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt6}{6} =$

$= \frac{5\sqrt6}{2} \Rightarrow BE = \sqrt{45 - \frac{25 \cdot 6}{4}} = \sqrt{\frac{180-150}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) + 20 - 36 - 2 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$(x-6)^2 = 18 - 2(y-1)^2 = 2(9 - (y-1)^2) =$

$= -2((y-1)^2 - 9) = -2(y-1-9)(y-1+9) =$

$= -2(y-10)(y+8) = \cancel{2(y\ 10-y)}$

$-2(y-10)(y+8) \geq 0$

$-\ \ -8\ \ +\ \ 10\ \ -$ $\quad y \in [-8; 10]$

$\cancel{(x-6)^2 +}$ $(x-6)^2 + 2(y-10)(y+8) = 0$

$x^2 - 12x + (36 + 2(y-10)(y+8)) = 0$

$\frac{D}{4} = 36 - 36 - 2(y-10)(y+8) =$

$= -2(y-10)(y+8)$

$\times \frac{49}{7}$ $\quad 343$

$x_{1,2} = \pm\cancel{\ } \cancel{\pm}\ 6 \pm \sqrt{-2(y-10)(y+8)}$

$x - 6 = \pm\sqrt{-2(y-10)(y+8)}$ $\qquad (x-6y)^2 = \pm\sqrt{-2(y-10)(y+8)}\,(y-6)$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$: $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AB}$

$12 + 9 = \sqrt{21}$ $\qquad tg\alpha = \frac{\sqrt{12}}{3}$

б) Выражаем все через x и ищем

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(x/y) + f(y) = f(x) \Rightarrow f(x/y) = f(x) - f(y)$

тисем 21

$f(2)=1$ 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3

$f(3)=1$ 4 4 4 4 5 6 6 8 9

$f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(5)=2$

Посчитать тут сумму

$f(6)=f(3)+f(2)=2$

$19\times2+15\times4+6\times9+4\times5+$

$f(7)=3$

$+4+2\times2+1$

$f(8)=f(4)+f(2)=3$

$f(9)=f(3)+f(3)=2$

$f(10)=f(5)+f(2)=3$

$f(11)=5$

$f(12)=f(6)+f(2)=3$

$19\times2=38$

$f(13)=6$

$f(14)=f(7)+f(2)=4$

$f(15)=f(5)+f(3)=3$

$40+60+60+20+1$

$f(16)=f(8)+f(2)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=f(9)+f(2)=3$

$f(19)=9$

$f(20)=f(10)+f(2)=4$

$f(21)=f(7)+f(3)=4$

$f(22)=f(11)+f(2)=6$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$(x-6)^2+2y^2-4y-16=0$

$2y^2-4y+((x-6)^2-16)=0$

$\frac{D}{4}=4-2(x-6)^2+32=36-2(x-6)^2=$

$y_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{36-2(x-6)^2}}{2}$

1) $\frac{a}{b}=9 \Rightarrow a=9b$

2) $\frac{a}{b}=4 \Rightarrow a=4b$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-\cancel{6})}$

$\cancel{x^2-12xy+36y^2=(x-6)(y-6) \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow x^2-12xy+36y^2=xy-6y-6x+36}$

$836^2=18 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\pm 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

$x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}=$

1) $81b^2+2b^2=18$

2) $16b^2+2b^2=18$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$\cancel{x=6}\ y=1$

$18b^2=18 \Rightarrow$

$b_{1,2}=\pm 1 \Rightarrow a_{1,2}=\pm 4$

$\cancel{x^2+2}\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$\times\frac{36}{4}$ 144

$x-6=a;\ y-1=b$

$$\begin{cases} a^2+2b^2=18 \Rightarrow a^2=2(3-b)(3+b) \\ \sqrt{ab}=a+6-6(b+1)=a-6b \end{cases}$$

$p_{1,2}=\frac{13\pm5}{2}=$

$ab=a^2-12ab+36b^2$

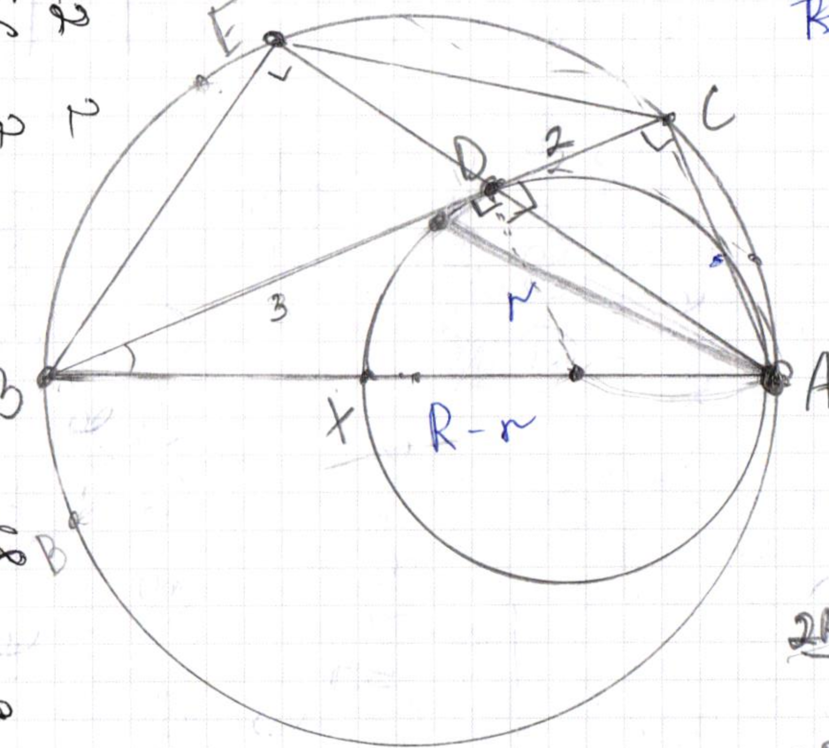
$=\cancel{\ \ }\ 9;4$

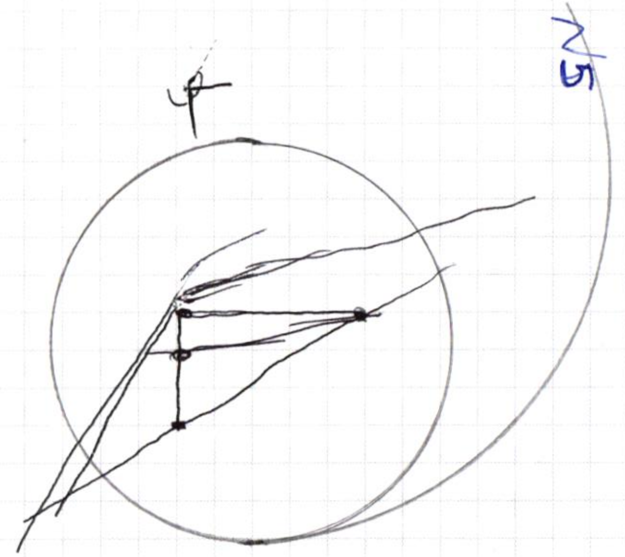
$a^2-13ab+36b^2=0 \quad p^2-13p+36=0 \Rightarrow D=169-144=$
$=25=5^2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№5





$\cancel{R}$

$\cancel{3}$ $9+r^2=$

$=R^2+2rR+r^2$

$R^2+2rR=9$

$\frac{2R-r}{R}=\frac{3}{5} \Rightarrow 3R=5R-5r \Rightarrow \cancel{2R=5r}$

(подобие)

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{3}{5} \Rightarrow 10R-5r=6R \Rightarrow$

$4R=5r$

$BX\cdot BA=9=\cancel{R}\ 2$

Радиус нашем. допишить

$(2R-2r)\cdot 2R=\cancel{3}\ 9$

$4R^2-4rR=9$

$4R^2-5r^2=9$

$16R^2=25r^2$

$\frac{25}{4}r^2-5r^2=9 \Rightarrow \frac{5}{4}r^2=9 \Rightarrow \frac{9\cdot 4}{5}=r^2 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{5}}=r \Rightarrow$

$\Rightarrow R=\frac{30}{4\sqrt{5}}$

3

112 2

56 2

28 2

14 2

7

17×17: 119, 17, 289

$\times 18$, 18

$49\times 9 = 441$; $441-105=336$

$21\times 5=105$

21·21

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c - геом прогр. $\cancel{ac = b \cdot x} \Rightarrow x = \frac{ac}{b} =$

$ax^2 - 2bx + c = 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = b^2 - ac \Rightarrow x = \frac{bc}{a}$ $\quad ax = bc \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{bc}{a} \Rightarrow b \pm \sqrt{b^2 - ac} = bc \Rightarrow$

$\Rightarrow b(c-1) = \pm\sqrt{b^2 - ac}$

$\cancel{ax^2 - 2a}$ $x = aq^3$; $b = aq$; $c = aq^2$

$a^2q^4 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

$-a^2q^4 + aq^2 = 0$

$a^2q^4 = aq^2$

$\cancel{aq^2} \quad aq^2(aq^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow aq^2 = 0 \Rightarrow$ все члены равны 0

$aq^2 = 1 \Rightarrow c = 1$ Ответ: 0; 1.

$224 - 150 = 76$ $\quad 6a > 900 \Rightarrow$
$\Rightarrow a > 150$

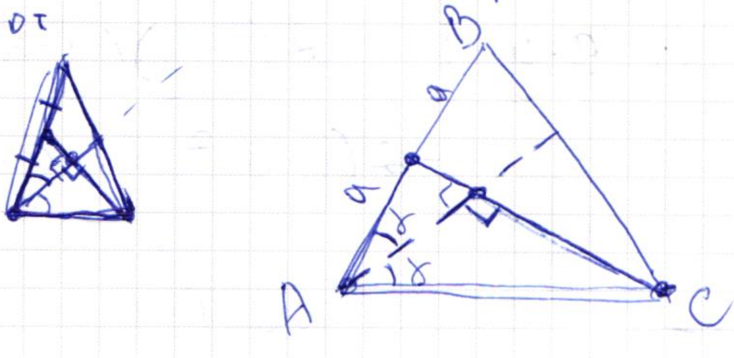
$900 - 3a < 3a$ $\quad 4a < 900 \Rightarrow$
$\Rightarrow a < 225$

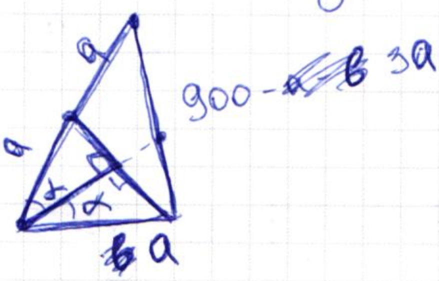
$900 - 2a > 2a$

$900 - a > a$

P = 900 целые стороны. Бисса перп медиане.

a от





Ответ: 76

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2-12x+36+2y^2-4y+2+20=38 \end{cases}$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$$

$$y(x-6)-(x-6)=(x-6)(y-6)$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-6)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$\boxed{y=6 \Rightarrow x=36}$ – ~~не подходит~~; $x=6 \Rightarrow y=1$ – н.к

$x-6y\geq 0 \Rightarrow (x-6y)^2=(x-6)(y-6)$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2+20=38$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$-2;6$

$4;6$

$y=4;\ x=6$

$x<11;\ \cancel{y<6}\ y\leq 4$

$x>1;\ y\geq -2$

$-2\leq y\leq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1<x\leq 6$

$-2<y<4$

$1<x<6$

$n^2+2q^2=18$

$$(x-6)^2=2(9-(y-1)^2)=$$

$$=2(9-y+1)(9+y-1)=2(8-y)(y-8)=$$

$$=-2(y-8)^2 \text{ – единственн}$$

р-е: $x=6;\ y=8$ – не подходит

имеет система р-й не

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)