МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $b=aq \quad c=aq^2$

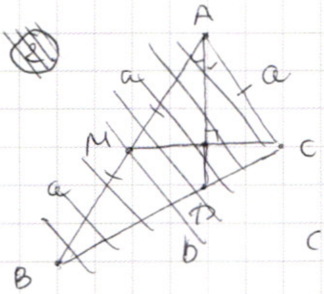
$ax^2+2bx+c = ax^2+2aqx+aq^2 = a(x^2+2qx+q^2) = a(x+q)^2$

$a(x+q)^2=0$ ~~$x=-q$~~ $x=-q$ – ~~третий~~ четвёртый член прогрессии

$aq^3=-9 \quad aq^2=-1$

Ответ: -1.

~~2.~~



~~Пусть биссектриса тр. ABC AD перпендикулярна медиане CM. В тр. CAM биссектриса совпадает с высотой, следовательно, тр. MAC – равнобедренный, AM=AC=MB. Пусть AC=a, а BC=b, тогда нам нужно посчитать количество решений системы~~

~~(1) $\begin{cases} 3a+b=1200 \\ a,b \in \mathbb{N} \end{cases}$~~

~~(1) $3a+b=1200$~~

~~$b=3(400-a)$~~

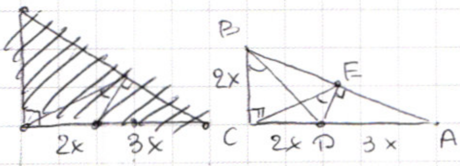
~~Каждому натуральному $a \le 399$ соответствует единственное значение b, значит всего решений 399.~~

~~Ответ: 399.~~

~~3.~~

~~3.~~

4.

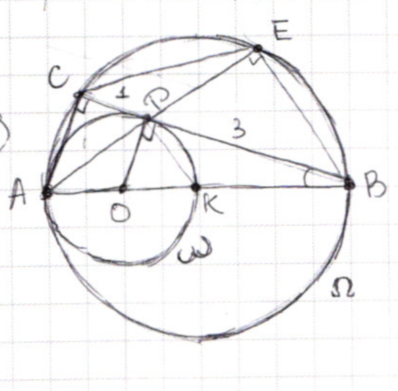


BCDE – вписанный, т.к. $\angle BCD = \angle BED = 90°$ $\Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 45°$. $CDB = 90° - CBD = 45°$ $\Rightarrow$ тр. CBD – равнобедренный, $BC=CD$. Пусть $AC=5x$, тогда $AD=3x$, $CD=2x=CB$

$tg(BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

5.



Ст. точки B относительно ω равна $BD^2=9$. Т.к. центры ω и Ω лежат на AB можно записать ст. т. B отн. ω как $(2R-2r)\cdot 2R$, где R – радиус Ω, r – радиус ω

$(2R-2r)\cdot 2R = 4R^2 - 4Rr = 9 \quad (1)$

Также заметим, что тр.$BCA \sim$ тр.BDO ~~так как~~ (по трём углам), из этого получим

$$\frac{BD}{BO}=\frac{BC}{BA} \quad \frac{3}{BO}=\frac{4}{BA} \quad \frac{3}{2R-r}=\frac{4}{2R} \quad 6R=8R-4r \quad R=2r \ (2)$$

~~Подставим в~~ Из (1) и (2) получим $r=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

~~8)~~ Пусть K – точка пересечения AB с ω, это также будет и центром Ω.

$$\angle KAD=\frac{1}{2}\angle KOD$$

$$\sin\angle KAD=\sin\frac{1}{2}\angle KOD=\sqrt{\frac{1-\cos\angle KOD}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{R-r}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos^2\angle KAD=1-\frac{3}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\angle KAD=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$AD=AK\cdot\cos\angle KAD=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

По т. о пропорциональных отрезках $AD=DE$, $AE=2\sqrt{3}$

$$\angle EDB=\angle KAD+\angle ABD$$

$$\sin\angle EDB=\sin(\angle KAD+\angle ABD)=\sin\angle KAD\cdot\cos\angle ABD+\sin\angle ABD\cdot\cos\angle KAD=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\cancel{\sqrt{2}\ldots}\ \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 3}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{9}3}$$

Площадь $BACE$ равна $2\sin(\angle EDB)\cdot AE\cdot BC=\frac{2}{\cancel{3}}\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot 4\cdot 2\cancel{\sqrt{3}}=$
$=8\sqrt{2}$.

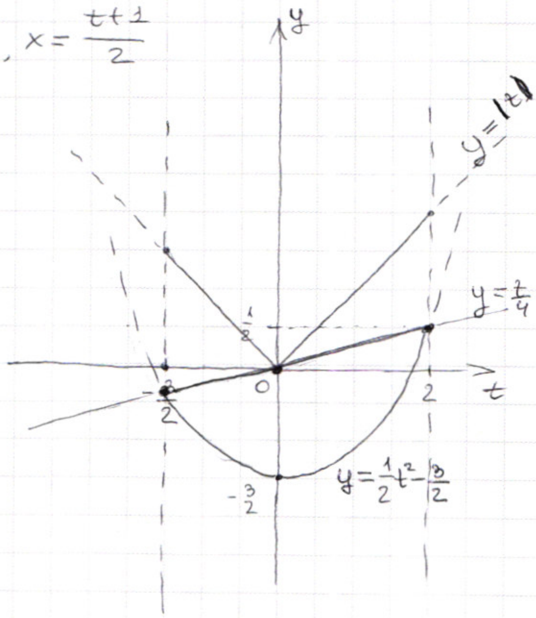
(6.) $2x^2-x-1\leq ax+b\leq x+|2x-1|$ ~~2x...~~

$$2x^2-2x-1\leq(a-1)x+b\leq|2x-1|$$

$$\frac{1}{2}(2x-1)^2-\frac{3}{2}\leq(a-1)x+b\leq|2x-1|,\ t=2x-1,\ x=\frac{t+1}{2}$$

$$\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}\leq\frac{(a-1)}{1}(t+1)+b\leq|t|$$

$$x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right],\quad t+1\in\left[-\frac{1}{2};3\right],\quad t\in\left[-\frac{3}{2};2\right]$$



Построим графики каждой части неравенства в осях ~~ty~~ ty при $t\in\left[-\frac{3}{2};2\right]$.

Пусть $f_1(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}$, $f_2(t)=|t|$

Заметим, что ~~так~~ точки $\left(-\frac{3}{2};f_1\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$, $(0;f_2(0))$ и $(2;f_1(2))$ лежат на одной прямой, $y=\frac{t}{4}$.

Это единственная прямая, удовлетворяющая ~~условию~~ неравенству. ~~Итак~~

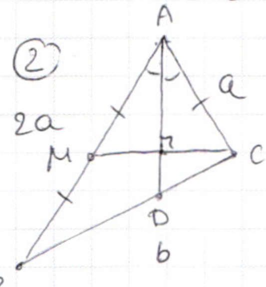
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = \frac{t}{4} = \left(\frac{a-1}{2}\right)(z+1) + b = \left(\frac{a-1}{2}\right)z + \frac{a-1}{2} + b$$

$$\begin{cases} \frac{(a-1)}{2} = \frac{1}{4} \quad a = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{a-1}{2}\right) + b = 0 \quad b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ответ: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$

(2)



Пусть биссектриса тр. ABC AD перпендикулярна медиане CM. В тр. CAM биссектриса является высотой => тр. MAC - равнобедренный, AM=AC.
Пусть AC=a, BC=b, тогда AB=2a. Для чисел a, 2a и b должно выполняться н-во треугольника; а также они должны быть натуральными и в сумме давать 1200. Запишем эти условия в систему.

$$\begin{cases} a, b \in \mathbb{N} \\ a < 2a+b \\ 2a < a+b \\ b < a+2a \\ 3a+b=1200 \end{cases} \iff \begin{cases} a, b \in \mathbb{N} \\ a < b \ ; \quad a < 1200-3a; \ a < 300; \\ b < 3a \ ; \quad b < 1200-b; \ b < 600 \ ; \ 1200-3a < 600 \\ 3a+b=1200 \qquad\qquad a > 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a, b \in \mathbb{N} \\ a \in [201; 299] \\ 3a+b=1200 \end{cases} \qquad b = 3(400-a)$$

Для каждого натурального a существует единственное, следовательно всего таких треугольников может быть 99.

Ответ: 99.

(7) $f(1 \cdot b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(\frac{1}{b}) + f(b) = 0 \qquad f(\frac{1}{b}) = -f(b)$

$f(n) = f(p_1) + f(\frac{n}{p_1}) = f(p_1) + f(p_2) + f(\frac{n}{p_1 \cdot p_2}) = \ldots = f(p_1) + f(p_2) + \ldots +$

$+ f(p_k) + f(1) = \sum_{i=1}^{k} f(p_i)$, где p_i - простые множители n

~~для $p>2$~~ для простых чисел больших 2 $[\frac{p}{2}] = \frac{p-1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b) \Rightarrow \left(\left(f(\frac{a}{b}) < 0 \right) \Leftrightarrow \left(f(b) > f(a) \right) \right)$

$f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(4)=2$, $f(5)=2$, $f(6)=\cancel{3}2$ $f(7)=3$,
$f(8)=3$, $f(9)=2$, $f(10)=3$, $f(11)=5$, $f(12)=3$, $f(13)=6$, $f(14)=4$
$f(15)=3$, $f(16)=4$, $f(17)=8$, $f(18)=3$, $f(19)=9$, $f(20)=4$, $f(21)=4$

Выберем для каждого значения $f(x)$, $x \in [1;21]$, $f(y)$, $y \in [1;21]$ такой, что $f(y) > f(x)$.

$f(x)=0$, $x=1$, $\forall y \in [2;21]$ $f(y)>f(x)$, 20 пар $(x;y)$

$f(x)=1$, $x \in \{2;3\}$, $\forall y \in [4;21]$ $f(y)>f(x)$, 36 – 15 = 21 пара

кол-во пар, которые дают то же зн. $\frac{x}{y}$

$f(x)=2$, $x \in \{4;5;6;9\}$, $\forall y \in [\cancel{7};21] \setminus \{9\}$ $f(y)>f(x)$, $14 \cdot 4 - \cancel{1}14 = 42$ пар

$f(x)=3$, $x \in \{7;8;10;12;15;18\}$, $\forall y \in \{11;13;14;16;17;19;20;21\}$ $f(y)>f(x)$
$6 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 32$ пары

$f(x)=4$, $x \in \{14;16;20;21\}$, $\forall y \in \{11;13;17;19\}$ $f(y)>f(x)$
16 пар

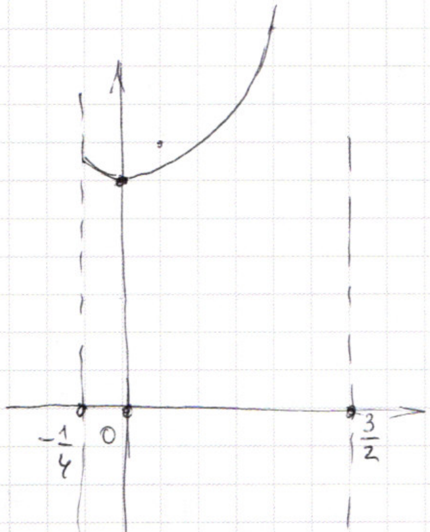
$f(x)=11$, $x=5$ $\forall y \in \{13;17;19\}$ $f(y)>f(x)$ 3 пары

$f(x)=13$ – 2 пары
$f(x)=17$ – 1 пара
$f(x)=19$ – нет пар

Ответ: всего 137 пар.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$2x^2-2x-1 \le (a-1)x+b \le |2x-1|$

$\frac{1}{2}(2x-1)^2-\frac{3}{2} \le (a-1)x+b \le |2x-1|$ $\quad$ ~~x=a~~ $2x-1=t$

$\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2} \le \frac{(a-1)}{2}(t+1)+b \le |t|$

$x=\frac{t+1}{2}$

$\frac{t+1}{2} \in \left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$

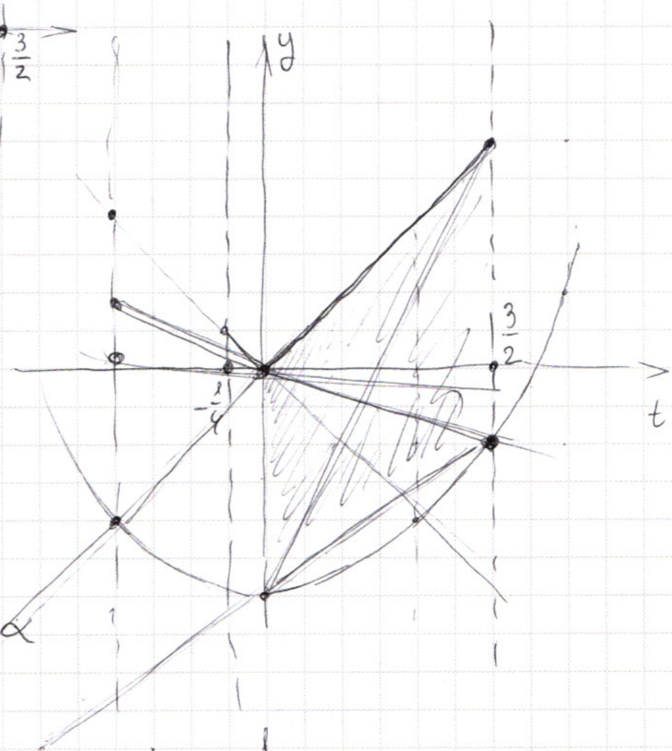
$t+1 \left[-\frac{1}{2};3\right]$

$t \in \left[-\frac{3}{2};2\right]$

$\cos 180° = \cos 90$

$\cos 180° = 0-1$

-1



$\cos \alpha+\beta = \cos\alpha \cdot c$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}{2}$

$|\sin^2\alpha|$

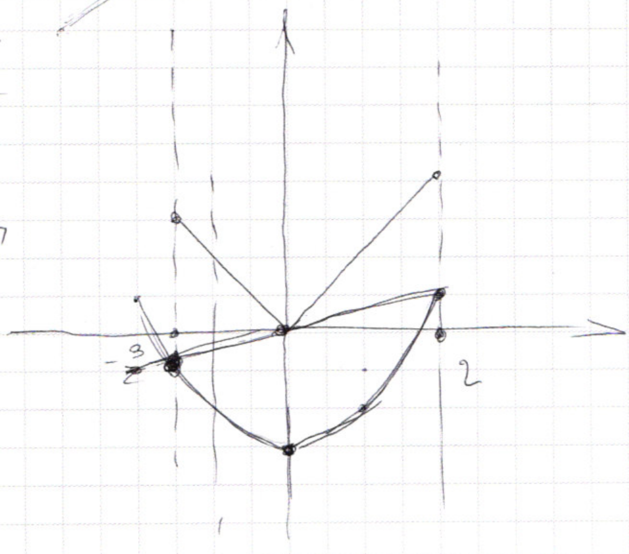
$|\sin \alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$\alpha \in (0;\pi)$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^4-\frac{3}{2}$

$\frac{9}{4}-\frac{3}{2}$

$\frac{9}{8}-\frac{12}{8}=-\frac{3}{8}$



$y=$

7. $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]=\cancel{2}\left(\frac{p-1}{2}\right),\ p>2,$

$1\le x\le 21$

$1\le y\le 21$ $f(xy)<0$

$f(p)=\left(\frac{p-1}{2}\right)$

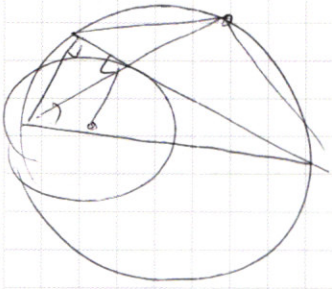
$f(p\cdot 1)=f(p)+f(1)$

$f(p)=f(p)+f(1)$ $f(1)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=$ $f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(1)$

$\cancel{f(1\cdot f(1))=f(1)+f(f(2))}$



$f(2\cdot x)=1+x$ $x=\frac{1}{4}a$

$f(2)=1$ $f(4)=2$ $f(5)=$

$f\left(\frac{1}{2}x\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(x)=f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(2$ $f(1)=f\left(\frac{1}{4}\right)+f(4)$

$0=$ $f(4)=-f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)=2f(2)=2$

$f(5)=2$

$f(6)=f(3)+f(2)=2$

$f(7)=3$

$f(8)=f(4)+f(2)=3$

$f(9)=2f(3)=2$

$f(10)=3$

$f(11)=5$

$f(12)=f(6)+f(2)=1+2=3$

$f(3)+f(4)=1+2$

$f(2\cdot x)=f(x)+1$

$f(13)=6$

$f(14)=3+1=4$

$f(15)=3$

$f(16)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=3$

$f(19)=9$

$f(20)=4$

$f(21)=4$

$f(2)=f(1)+f(2)$

$f(2\cdot 1)=0+f(2)$

$f(2\cdot x)=f(2)+f(x)$

$f(4)=2f($

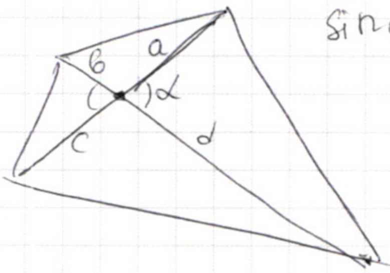
$\cancel{3+7}+4$

$22+32+42$

$+21+20$

$\cancel{60}+74$

137



$\sin\alpha\cdot(d_1+d_2)$

$\sin\alpha$

$\sin(180-\alpha)$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1}$

$\sin\alpha$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\sin 2\alpha=$

$\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot ad$

$+\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot bd$

$+\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot bc$

$+\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot cd$

$ad+bd+bc+cb$

$\cancel{d(a+b)}$

$d(a+c)+b(a+c)$

$(d+b)(a+c)$

$\cancel{ad+ab+bc+bd}$

$ab+bc+cd+da$

$b(a+c)+d(a+c)$

$90+90$

$(a+c)(b+d)\cdot 2\sin\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)=$

$=\cancel{\cos^2(\alpha+\beta)}$

$\cos 0=\cancel{00}\ 1\cdot 1-$

$\cos 2\alpha=\cancel{\sin}\ \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\cos\beta$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a \quad b = aq \quad c = aq^2$

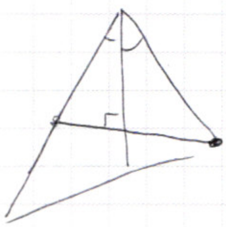
$ax^2 + 2bx + c = aq^3$

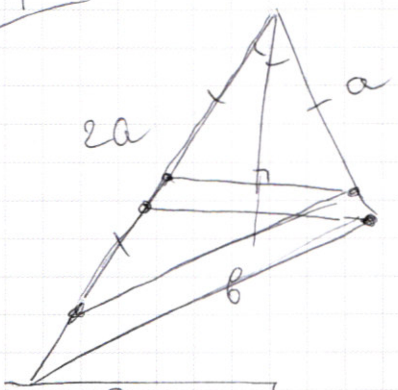
$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0 \qquad a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$

$a(x+q)^2 = 0$

$x = -q$

$-q = aq^3 \quad -1 = aq^2$





$3a + b = 1200$

$a + \frac{b}{3} = 400$

$b ⋮ 3 \qquad b = \{3; 6; \ldots$

1197

$3; 6; 9; 12; \ldots, 1197$

$\frac{1197}{3} = 399$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$y - 2x \qquad (y-2x)($

$y-$

$+4 \quad +2$

$2(x-1)^2 + y$

$a^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \qquad y - 4y + 4$

$a = x\sqrt{2} \qquad 2x^2 = a^2$

$y - \sqrt{2}a = \sqrt{\frac{xy}{\sqrt{2}}\sqrt{2}a - y + 2}$

$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 = 3$

$2y - 2\sqrt{2}a = \sqrt{xy - 2a - \sqrt{2}y + 2\sqrt{2}}$

$a = x\sqrt{2} \qquad x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$(a^2 - 2\sqrt{2}a + 2) + y^2 - 4y + 4 = 3$

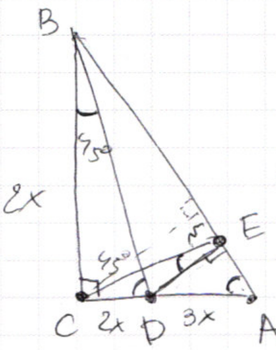
$(a - \sqrt{2})^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{3})^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$2a > a + b$

$a > 2a + b$

$a < b$

$2a < a + b$

$a < 2a + b$

$-a < b$

$b < 3a$

$b < 1200 - b$

$2b < 1200$

$4a < 1200$

$2a < 1200$

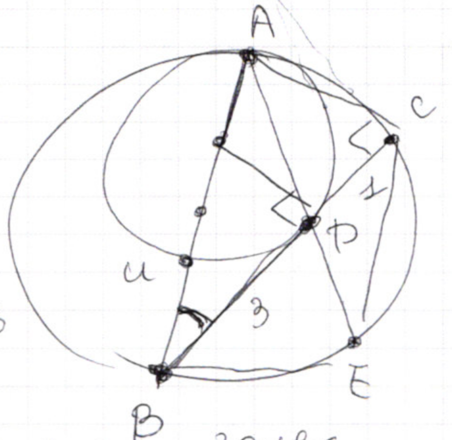
$b < 600$

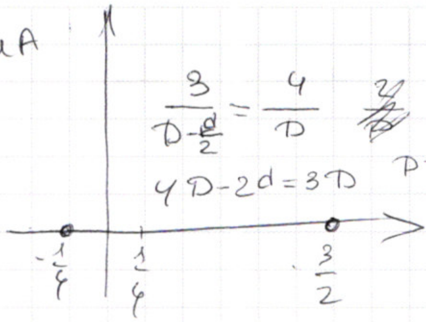
$a < 300$

$3a + b <$

$3^2 = BU \cdot UA$

$3^2 = D - d$





$\frac{3}{D - \frac{d}{2}} = \frac{4}{D}$

$D = 2d$

$4D - 2d = 3D$

$9 = BU \cdot BA$

$9 = (AB - UA) \cdot BA$

$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$9 = 4R^2 - 4Rr$

$\frac{3}{2R - r} = \frac{4}{2R}$

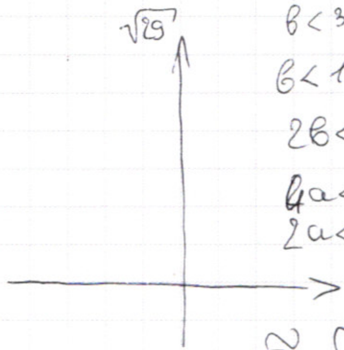
$6R = 8R - 4r$

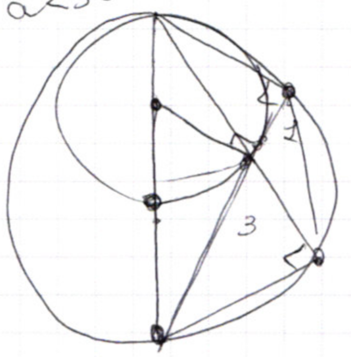
$4r = 2R$

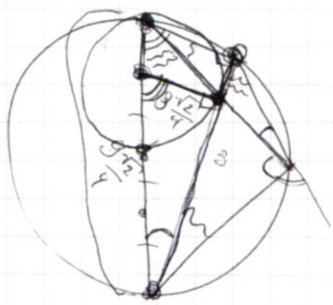
$2r = R$

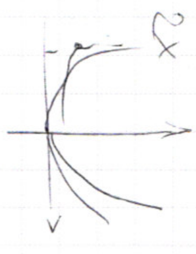
$9 = (4r - 2r) \cdot 4r$

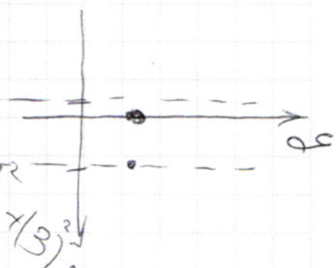
$9 = 8r^2 \quad r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$











$2x^2 - 4x + 2$

$2x^2$

$2(x-1) \cdot x - 1$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$(2x-1)^2 \quad 4x^2 - 4x + 1$

$2x$

$2x^2 - 2x$

$(2x-1)^2$

$\frac{1}{2}x^2$

$t = 2x - 1$

$\frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} \le at$

$(2x-1)^2 \frac{3}{2} \le (a-1)x + b \le |2x-1|$

$\frac{12\sqrt{2}}{4} \quad 3\sqrt{2}$

$2x^2 - 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$4x^2 - 4x + 1$

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + (3)^2 = \sqrt{\frac{45}{4}}$

$\frac{9}{8} + 9 = \frac{81}{8} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

$2x - 1 = t$

$x = \frac{t+1}{2}$

$(a-1)\left(\frac{t+1}{2}\right) + b$

$\left(\frac{a-1}{2}\right)(t+1) + b$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)