

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть q - множитель прогрессии, т.е. $aq^3 = bq^2 = cq = d$;
(d - n -й член прогрессии) $aq^2 = bq = c$; $aq = b$.

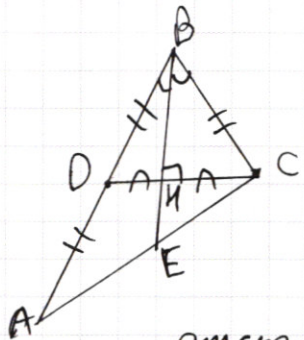
Тогда: $ad^2 - 2bd + c = 0$

$$a^3 q^6 - 2a^2 q^4 + a q^2 = 0.$$

$$c^3 - 2c^2 - c = 0.$$

$(c-1)^2 \cdot c = 0$. 1) $c=0$ - не подходит, т.к. в этом случае $a=b=c=d=0$, и это не ариф. прогр.

2) $c=1$ - подходит. Ответ: третий член прогрессии равен 1



№2

$$\angle ABE = \angle ECB$$

Пусть $BE \perp DC$, $DB = AD$, $BE \perp DC$, т.е. это указано в условии треугольника. Тогда в нем $DC \perp BE = H$;

в $\triangle BDC$ BH высота и бисс-са, значит $BD = BC = AD$,

отсюда вывод: подходит треугольник, в котором одна из

сторон в 2 раза больше другой. Пусть $BC = x$, $AB = 2x$. Тогда по

неравенству тр-ка: $AC = y$, $x < y < 3x$. Значит $x + x + 2x < 900$

и $x + 2x + 3x > 900$; $150 < x < 225$, а также, а в этом треугольнике

равно $225 - 150 = 75$ чисел. Ответ: 74



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x-6y)^2 = (x-6)(y-1) \\ (x-6)^2 - 36 + 2(y-1)^2 - 2 + 20 = 0 \end{cases} \quad \sqrt{3}.$$

Пусть $a = x-6$, $b = y-1$.
 Тогда $x-6y = a-6b$

$$\begin{cases} (a-6b)^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \text{ т.к. } b \neq 0 \text{ (иначе } a=0, \\ \text{но } a^2 + 2b^2 \neq 18) \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$
 но поделим на b .

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\frac{a}{b} + 36 = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \quad t = \frac{a}{b}; \quad t^2 - 13t + 36 = 0.$$

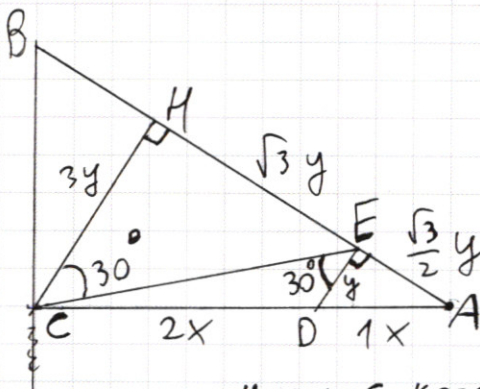
$$\begin{cases} \frac{a}{b} = 4 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = 9 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ a = -4 \\ b = -1 \\ a = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b = -\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a = -9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ x = \sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \\ y = \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \\ x = -\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \\ y = -\sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-10; 2); (2; 0);$
 $\left(\frac{27\sqrt{166}}{83} + 6; \frac{3\sqrt{166}}{83} + 1\right);$
 $\left(-\frac{27\sqrt{166}}{83} + 6; -\frac{3\sqrt{166}}{83} + 1\right)$



$\sqrt{4}$.

Проведем $CH \perp AB$. $\angle HCE = \angle CED$ как
накрест лежащие, т.е. $\angle HCE = 30^\circ$.

Пусть $ED = y$, тогда $\triangle AED \sim \triangle AHC$ по двум

углам с коэфф. $k = \frac{1}{3}$ т.к. $AD = \frac{1}{3}AC \Rightarrow HC = 3y$.

Далее: $HE = \text{tg } 30^\circ \cdot CH = \sqrt{3}y$; $AE = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}HE = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

$$\text{tg } \angle BAC = \frac{HC}{AH} = \frac{3y}{\frac{\sqrt{3}}{2}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

д) по м. кат в $\triangle AHC$: $(3y)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = 7$

$$S_{\triangle CED} = \frac{HE \cdot ED}{2} = \frac{\sqrt{3}y \cdot y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$\frac{\sqrt{3}}{9}$ Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{9}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

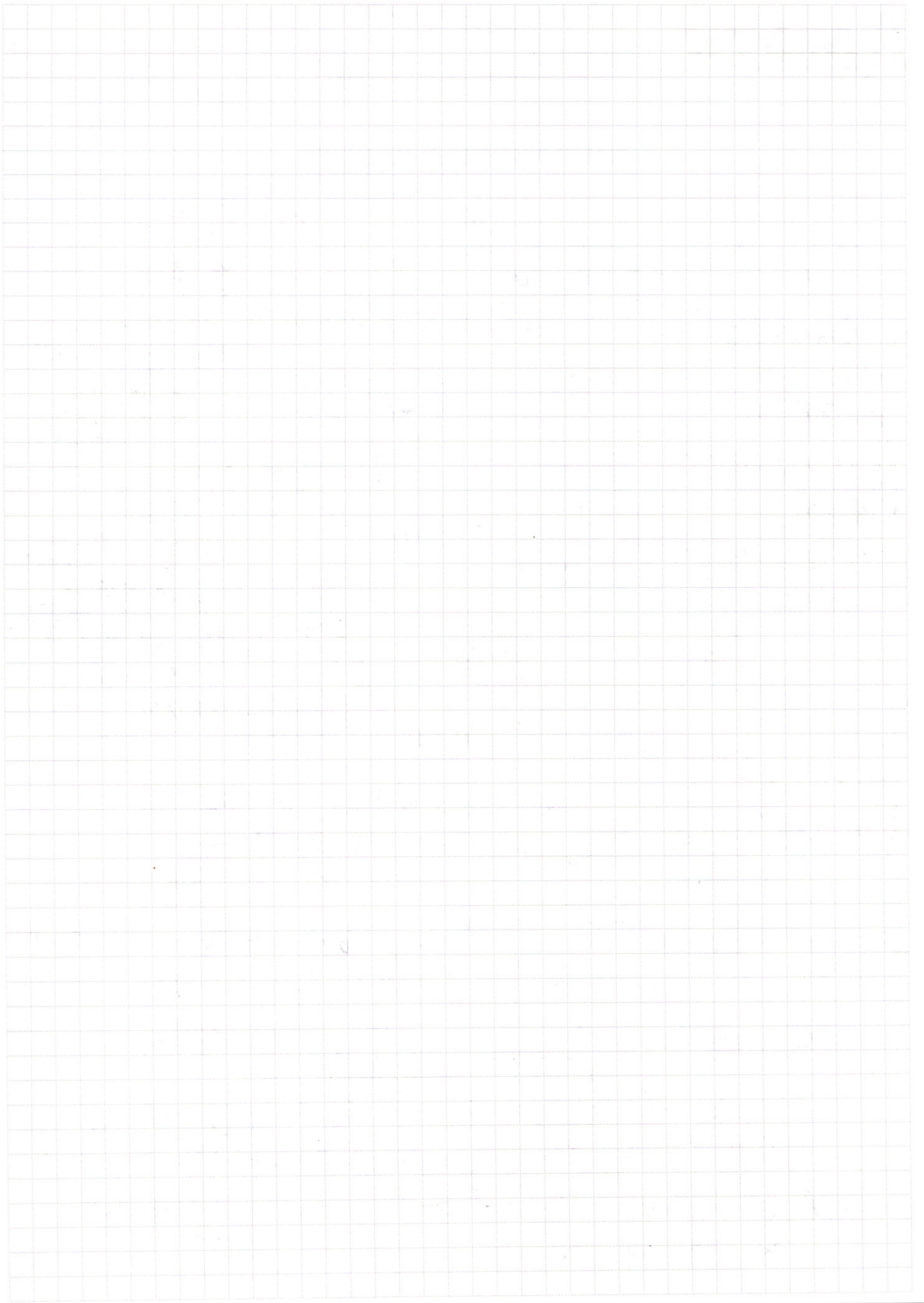
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^3 = b^3 = c^3 = d^3$; $a^2 - 2bd + c = 0$ (1) $\frac{a}{b} - 13 \frac{a}{b} + 36 = 0$
 $a^3 q^6 - 2a^2 q^4 + a q^2 = 0$ (2) $\frac{a}{b} = t$
 $a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$ $a^2 + 2b^2 = 18$ $t = a^2 q^2$ $t^3 - 2t^2 + t = 0$ $t^2 - 13t + 36 = 0$
 $a = \sqrt{18 - 2b^2}$ $t = 1$ $a q^2 = 1$ $t = 0$ $a q^2 = 0$ $a = 0$ $b = 0$ $c = 0$ $d = 0$
 $18 - 2b^2 - 13b \cdot \sqrt{18 - 2b^2} + 36b^2 = 0$ $34b^3 + 18 - 13b \cdot \sqrt{18 - 2b^2} = 0$ $83 - 2 = 166$ $\frac{a}{b} = 4$; $18b^2 = 18$ $b = 1$ $a = 4$
 $b = 1$ $a = 4$ $x_1 = 4$ $x_2 = 9$
 $b = \sqrt{\frac{18}{83}}$ $a = 9\sqrt{\frac{18}{83}}$
(3) $x, 2x, y$; $x < y < 3x$
 $(a - 6b)^2 = ab$ $x + x + 2x < 900$; $x < 225$
 $a^2 + 2b^2 - 18 = 0$ $x + 2x + 3x > 900$; $x > 150$
 $151 \dots 224$ \rightarrow (74)

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 = (x - 6)(y - 1) \\ (x - 6)^2 - 36 + 2(y - 1)^2 - 2 + 20 = 0 \end{cases}$

$a = x - 6$ $b = y - 1$

$(x - 6y)^2 - (x - 6)^2 = (x - 6y - (x - 6))(x - 6y + (x - 6)) = (6 - 6y)(2x - 6y - 6) = (1 - y)(x - 3y - 3) \cdot 12 = (1 - y)(x - 6 - (3y - 3)) \cdot 12 = 12 \cdot (1 - y) \cdot (a - 3b) \cdot 12$
 $(x - 6y)^2 = 12(a - 3b) \cdot 12 + a^2 = a^2 + 12ab + 36b^2$
 $x - 6y = a - 6b$

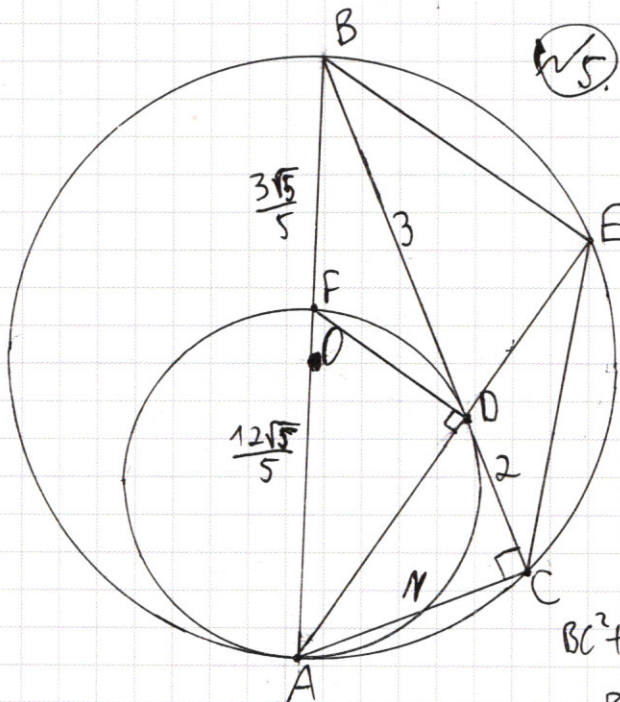


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\tan A = \frac{3y}{\frac{3\sqrt{3}}{2}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 $AC = \sqrt{9 + \frac{27}{4}} = 3\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}y$
 $\frac{3}{2}y = 1; y = \frac{2}{3}$
 $ED = \frac{2}{3}; EC = 2\sqrt{3}y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
 $S_{CED} = \frac{EH \cdot ED}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$



Степень точки B отн. окр. ω :
 $BO^2 = 3^2 = BF \cdot BA; BF = \frac{9}{BA}$
 $CN \cdot CA = 4; NC = \frac{4}{CA}$
 $\frac{CA}{AB} = \frac{AN}{AF}$
 $\frac{CA}{AN} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{CA}{NC} = \frac{AB}{BF}$
 $\frac{CA}{BA} = \frac{2}{3} \leftarrow \frac{CA^2}{4} = \frac{BA^2}{9}$
 $BC^2 + CA^2 = 4BA^2; \frac{18}{9}BA^2 = \frac{5}{9}BA^2; BA = 3\sqrt{5}$
 $CA = 2\sqrt{5}$
 $BF = \frac{9 \cdot 3}{2\sqrt{5}} = \frac{27}{2\sqrt{5}}; AF = 3\sqrt{5} - \frac{27}{2\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{2} = 6\sqrt{5}$
 $AD = 2\sqrt{6}$

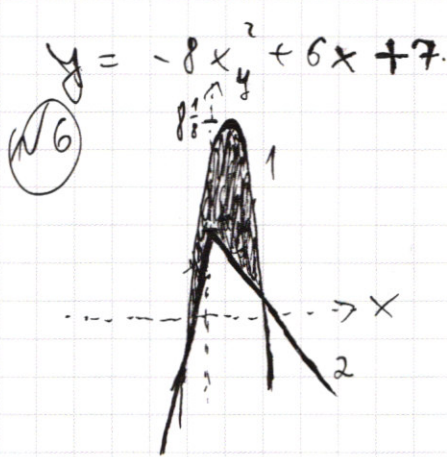
$S_{ABEC} = \frac{BC \cdot AE}{2} \cdot \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{30}}{6} \cdot \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$
 $\frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$$

$$y_0 = -8 \cdot \frac{9}{64} + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = 8 \frac{1}{8}$$

$$1) 8x - 12x + 6 = -4x + 6 \quad (\text{после } x = 0.5)$$

$$2) 8x + 12x - 6 = 20x - 6 \quad (\text{после } x = 1.5)$$

при $x = -\frac{1}{2}$:

$$-4 - 6 \cdot 2 \leq \frac{1}{2}a + b \leq -2 \cdot 3 + 7$$

$$-16 \leq \frac{1}{2}a + b \leq 1$$

$$-16 \leq -\frac{1}{2}a + b \leq 2$$

$$-30 \leq 3b \leq 9$$

$$-10 \leq b \leq 3$$

при $x = 1$: $8 - 6 \cdot 1 \leq a + b \leq 5$

$$4 \leq a \cdot 0.5 + b \leq 8$$

$$\begin{cases} 2 \leq a + b \leq 5 \\ -16 \leq -\frac{1}{2}a + b \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \leq 5 - b \\ -32 \leq a + 2b \leq 4 \end{cases}$$

$$0 \leq (a + b) - (-\frac{1}{2}a + b) \leq 21$$

$$0 \leq a \leq 14$$

вариант 1. $a + b = 5$

$$-\frac{1}{2}a + b = 2 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \checkmark$$

$$2. a + b = 5 \quad a = 14$$

$$-\frac{1}{2}a + b = -16 \quad b = -9 \quad \times$$

$$3. a + b = 2$$

$$-\frac{1}{2}a + b = 2 \quad \begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases} \times$$

$$4. a + b = 2$$

$$-\frac{1}{2}a + b = -16 \quad \begin{cases} a = 12 \\ b = -10 \end{cases} \times$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)