

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a , b , c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a , b , c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21$, $1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ (x-2)^2 = (x-1)(y-2) + 2(x-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Обозначим $x-1 = a$, $y-2 = b$ тогда $y-2x = b-2a$

$$\begin{cases} (b-2a)^2 = ab \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 5ab + 4a^2 \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ b = 5a \pm \sqrt{25a^2 - 76a^2} \\ 2a^2 + 8a^2 - 3 \end{cases}$$

№ 1

$$\begin{cases} 0x^2 + 6x + c \\ x - x_1 = \frac{c}{a} = 4^2 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -9 \end{cases}$$

Обозначим знаменатель в системе численной прогрессии q . Тогда $b = 4q$, $c = 4^2q$

$$\begin{cases} x^2 - 2bx + c = 0 \\ x^2 - 8qx + 4q^2 = 0 \\ x^2 + 6qx + 4^2 = 0 \end{cases}$$

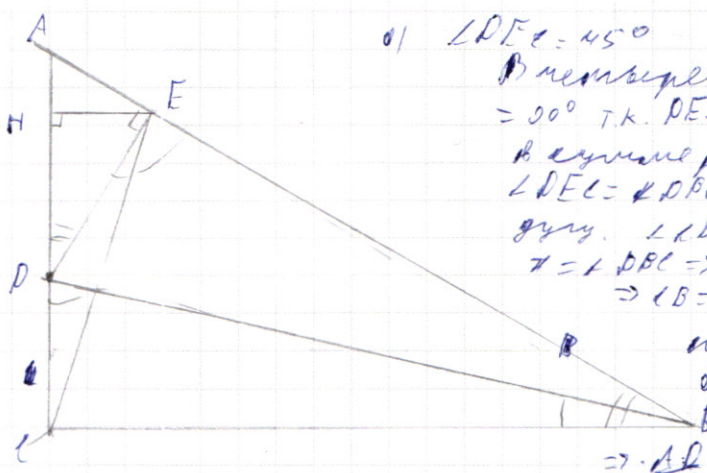
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2q + \sqrt{4q^2 - 4q^2}}{2} \\ x_2 = \frac{-2q - \sqrt{4q^2 - 4q^2}}{2} \\ x = -q \\ x = -q \end{cases}$$

по условию корни совпадают: Так как корень является членом верхнего члена численной прогрессии $-q = 4^2$

$x = -7$

Ответ: -7

№ 4



$\angle DEC = 45^\circ$
 В четырехугольнике $BCDE$ $\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ$ т.к. $DE \perp AB$. Противоположные углы в сумме равны $180^\circ \Rightarrow BCDE$ - вписанный $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$ как опирающиеся на одну дугу. $\angle CDB = 180^\circ - \angle DCB - \angle DBC = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$
 $\angle = \angle DBC \Rightarrow \triangle DBC$ - равнобедренный $\Rightarrow CD = CB = AC - AD = \frac{2}{5} AC$
 тогда $\sin \angle BAC = \frac{CB}{CA} = \frac{2}{5}$
 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \quad AE = AD \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} \frac{AC^2}{AB}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} AC^2}{\sqrt{AC^2 + \frac{4}{25} AC^2}} = \frac{\frac{3}{5} AC^2}{\frac{\sqrt{29} AC}{5}} = \frac{3AC}{\sqrt{29}} = 3$$

Обозначим высоту из точки E в $\triangle DCE$ EH

$$\sin \angle CAD = \frac{\sin \angle CAB}{\cos \angle CAB} = \frac{2}{5}$$

$$\cos \angle CAB = \frac{4}{5} \sin \angle CAB$$

$$\cos^2 \angle CAB + \sin^2 \angle CAB = 1$$

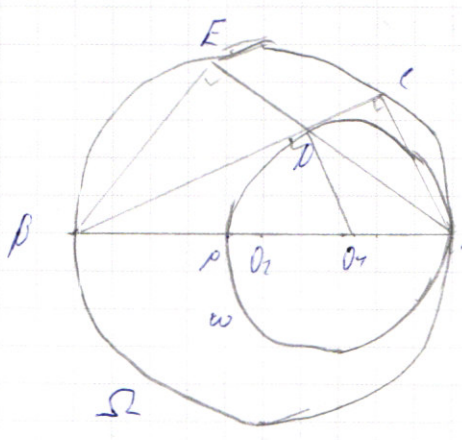
$$\frac{25}{4} \sin^2 \angle CAB + \sin^2 \angle CAB = 1$$

$$\sin \angle CAB = \sqrt{\frac{4}{29}} \quad \text{т.к. } \angle CAB < 90^\circ \text{ т.к. } \triangle ABC \text{ прямоугольный}$$

$$\text{Площадь } \triangle CED = \frac{EH \cdot DC}{2} = \frac{AE \cdot \sin \angle CAD \cdot \frac{2}{5} AC}{2} = \frac{3 \cdot 2 \sqrt{\frac{4}{29}} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{29}}{2} = \frac{6}{5}$$

Отвечим: $\sin \angle CAB = \frac{2}{5}$, $\cos \angle CAB = \frac{4}{5}$

№ 5



Обозначим радиус окружности R
 $\angle BPA = 90^\circ$ т.к. PA - диаметр $\Rightarrow \angle BPA = 90^\circ$
 $\angle BPA$ - острый $\Rightarrow \text{сека } PA \cap \omega = P, A \Rightarrow$
 $\frac{BP}{BC} = \frac{BO}{BA} = \frac{2R - x}{2R} = \frac{BD + DC}{4}$
 $2R - 4x = 6R$
 $2R = 4x$
 $R = 2x$

Обозначим $PA \cap \omega = P$

$$BP^2 = AP \cdot PA = (2R - 2x) \cdot 2R = 2$$

$$(4x - 2x) \cdot 4x^2 = 2$$

$$8x^2 = 2$$

см. продолжение задачи № 4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

в 5-угольнике

$$2R^2 = 9$$

$$R = 2r = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$BD = BO_1 \cdot \sin \angle BO_1D$$

$$\sin \angle BO_1D = \frac{BD}{BO_1} = \frac{3}{2R - r} = \frac{3}{3V} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\angle DO_1A = 180^\circ - \sin \angle DO_1A = 90^\circ \sin 180^\circ - \angle DO_1B = \sin \angle DO_1B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos^2 \angle DO_1A + \sin^2 \angle DO_1A = 1$$

$$\cos \angle DO_1A = \frac{1}{3} \quad \text{т.к. } \angle DO_1A = \angle ADO_1 + \angle DO_1B = 90^\circ + \angle DO_1B \Rightarrow \cos \angle DO_1A = -\sin \angle DO_1B$$

$$AD^2 = AO_1^2 + DO_1^2 - 2AO_1 \cdot DO_1 \cdot \cos \angle DO_1A = 2R^2 + 2R^2 \cdot \frac{1}{9} = 2R^2 \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{20R^2}{9} = \frac{20 \cdot 9}{9 \cdot 3} = \frac{20}{3}$$

$$\text{Стороны параллелограмма } BD \text{ и } DE \cdot DA = 3$$

$$DE = \frac{3}{DA} = \frac{3}{\sqrt{\frac{20}{3}}} = \frac{3 \sqrt{3}}{\sqrt{20}} = \frac{3 \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{15}}{10}$$

$$\text{Площадь } S_{ABCE} = S_{\triangle BED} + S_{\triangle EDC} + S_{\triangle CDA} + S_{\triangle BDA}$$

$$S_{\triangle BED} = \frac{DE \cdot DC \cdot \sin \angle DEC}{2} = \frac{DE \cdot DC \cdot \sin(\angle BDO_1 + \angle DO_1A)}{2} = \frac{DE \cdot DC \cdot \sin(90^\circ + \angle DO_1A)}{2} = \frac{DE \cdot DC \cdot \cos \angle DO_1A}{2}$$

$$= \frac{DE \cdot DC \cdot \cos \angle DO_1A}{2} \quad \text{т.к. } \angle DO_1B \text{ смежный с } \angle DO_1A \text{ и } \angle DO_1B = \angle DO_1A \Rightarrow \angle DO_1A = 90^\circ - \angle DO_1B = 90^\circ - \angle DO_1A \Rightarrow \angle DO_1A = 45^\circ$$

$$\cos \angle DO_1A = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \angle DO_1A = \frac{1}{9}$$

$$\cos \angle DO_1A = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \angle DO_1A = \frac{1}{9}$$

$$S_{\triangle EDC} = \frac{DE \cdot DC \cdot \cos \angle DO_1A}{2} = \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{10} \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{20}$$

$$S_{\triangle EDB} = \frac{ED \cdot BD \cdot \sin \angle EDB}{2} = \frac{ED \cdot BD \cdot \sin(180^\circ - \angle EDC)}{2} = \frac{ED \cdot BD \cdot \sin \angle EDC}{2} = \frac{ED \cdot BD \cdot \cos \angle DO_1A}{2}$$

$$S_{\triangle EDB} = \frac{3\sqrt{15}}{20} \quad S_{\triangle EDC} = 3S_{\triangle EDB} = 2$$

$$S_{\triangle BDA} + S_{\triangle CDA} = S_{\triangle BCA} = \frac{BC \cdot BA \cdot \sin \angle CBA}{2} = \frac{BE \cdot BA \cdot \frac{DO_1}{BD}}{2} = \frac{BC \cdot BA \cdot \frac{R}{2R}}{2} = \frac{BC \cdot BA}{4} = \frac{4 \cdot 2R}{4} = 2R = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

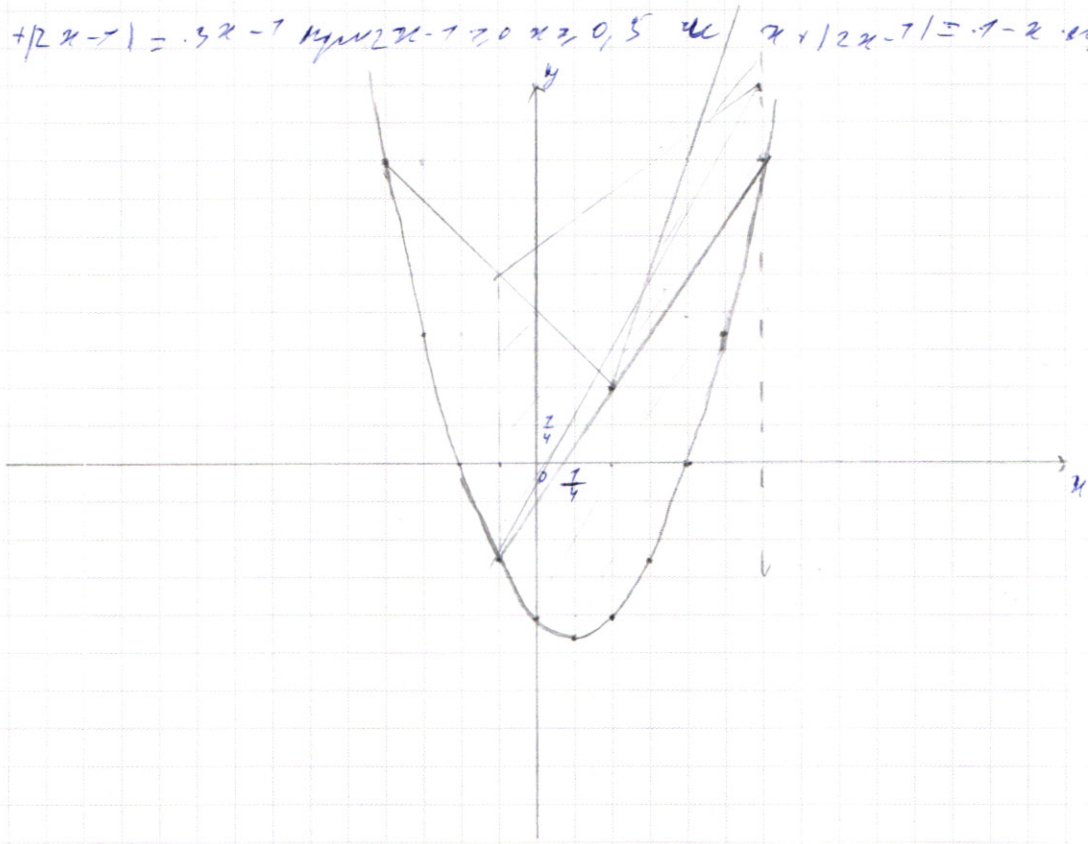
$$S_{ABCE} = S_{\triangle BED} + S_{\triangle EDC} + S_{\triangle BCA} = 2 + \frac{2}{3} + 6\sqrt{3} = 2\frac{2}{3} + 6\sqrt{3}$$

Ответ: радиус $R = \frac{3}{\sqrt{3}}$ и $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ площадь $ABCE = 2\frac{2}{3} + 6\sqrt{3}$

№5

Изобразите на графике функцию $y = 2x^2 - x - 7$ и $y = x + |2x - 7|$

$2x^2 - x - 7$ - парабола с вершиной в $x = \frac{-(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ и $y = 2 \cdot (\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} - 7 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{56}{8} = -\frac{57}{8}$
 $x + |2x - 7| = -3x - 7$ при $2x - 7 \geq 0$ и $x \geq 3,5$ и $x + |2x - 7| = -1 - 2$ при $x < 3,5$



Значения для параболы

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{17}{8}$	-7	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{4}{8}$	2

$$2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{3}{4} - 7 = \frac{9}{8} - \frac{3}{4} - 7 = -\frac{5}{8}$$

$$\frac{25}{8} - \frac{5}{4} - 7 = \frac{15}{8} - 7 = -\frac{41}{8}$$

$$\frac{2}{2} - \frac{3}{2} - 7 = \frac{6}{2} - 7 = -1$$

и другой график с вершиной симметрично

$ax + b$ - прямая на промежутке $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ ее диаметр метают в ~~этом~~ замкнутой области.
 Значение функции $y = ax + b$ в ~~этом~~ при $x = \frac{3}{2}$ не меньше $\frac{1}{2}$, а при $x = -\frac{1}{4}$ не меньше $-\frac{5}{8}$.

Рассмотрим все ~~эти~~ прямые $ax + b$ проходящие через точку $(\frac{3}{2}; 2)$. Есть ли же одна прямая лежащая в замкнутой области.

Эта функция $y = ax + b$ в точке $x = \frac{3}{2}$ должна принимать значение от 2 до 5. ~~Эта~~ или при $x = \frac{3}{2}$ ее значение больше двух но ~~она не может~~ не превышать 5 метают в замкнутой области. Тогда ~~она не может~~ существовать одна пара чисел a и b .

при $x = \frac{1}{2}$ $ax + b = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{3}{2}$ $ax + b = 2$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}a + b = 2 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ Ответ: } a = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$f(a+b) = f(a) + f(b) \Rightarrow$ свойство аддитивности $f(b) = f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \dots + f(a_i) + f(a)$
где a_1, a_2, \dots, a_i - произвольные слагаемые в b

$$f(1) = f(1+1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

тогда $f(1) = f\left(\frac{1}{p} + p\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p) = -\left[\frac{p}{2}\right]$ где p - простое

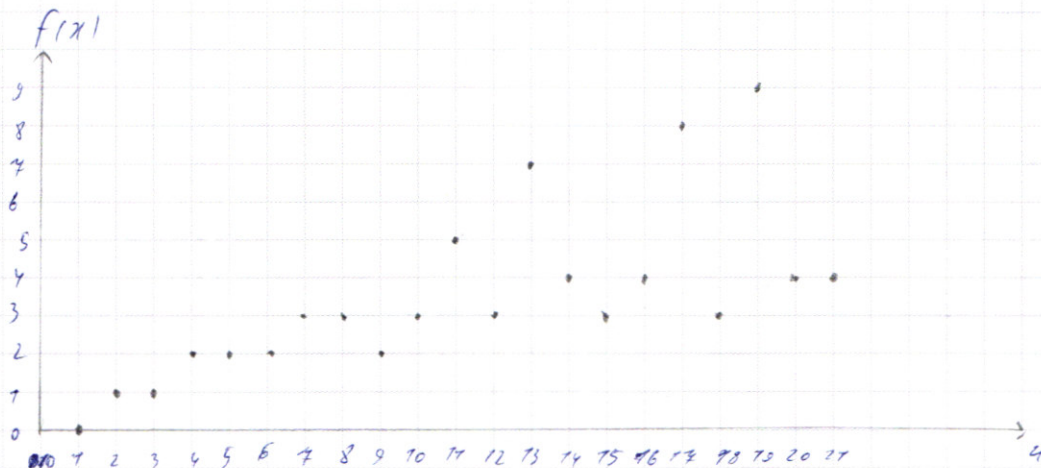
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y_1} + \dots + \frac{1}{y_n}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y_1}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{y_n}\right)$ где x_1, x_2, \dots, x_n
и y_1, y_2, \dots, y_n - произвольные слагаемые в x и y

Примеры: числа от 1 до 21: 2 3 5 7 11 13 17 19

$f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = f(2) + f(2) = 2, f(5) = 2, f(6) = 2, f(7) = 3, f(8) = 3, f(9) = 2$
 $f(10) = 3, f(11) = 5, f(12) = 3, f(13) = 4, f(14) = 4, f(15) = 3, f(16) = 4, f(17) = 8, f(18) = 3$
 $f(19) = 9, f(20) = 4, f(21) = 4$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$ то есть $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ тогда если $f(y) > f(x)$

и обозначим значение функции на графике



числа разбиваются по группам для подсчета $f(x)$ суммы.

Крупнейшие парные натуральные числа для подсчета $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$
 $7 + 2 + 3 + 4 + 4 + 6 + 8 + 4 + 7 + 2 + 2 + 7 + 17 + 20$ (для каждой группы чисел
с суммарным значением $f(x)$ и суммарным значением $f(y)$ в группе.)

$$7 + 2 + 3 + 4 + 4 + 6 + 8 + 4 + 7 + 2 + 2 + 7 + 17 + 20 = 6 + 7 + 8 + 4 + 8 + 5 + 6 + 3 + 6 + 20 = 70 + 9 + 2 + 20 = 78 + 2$$

Ответ: 782

№2

Если биссектриса перпендикулярна стороне, то она и высота в том же треугольнике равнобедренный равнобедренный.

Тогда в исходном треугольнике одна из сторон равна половине другой.



Обозначим ^{длину} сторону треугольника на $2a$, a и $1200 - 3a$ т.к. периметр 1200 .

Для треугольника должно выполняться неравенство треугольника.

$$\begin{cases} 1200 - 3a < 2a + a \\ 2a < 1200 - 3a + a \\ a < 1200 - 3a + 2a \\ a > 200 \\ a < 300 \\ a < 600 \\ a > 200 \\ a < 300 \end{cases}$$

Если стороны заданы, то можно задать ~~сторону~~ длину одной из сторон. $x \Rightarrow$ всего таких треугольников 19 (если взять нестрого неравенство тогда треугольник будет вырожденным).

Ответ: 19.

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \\ y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \\ (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \\ (6-2a)^2 = 4b \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ b^2 - 5ab + 4a^2 = 0 \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ b = \frac{5a \pm \sqrt{5a^2 - 4a^2}}{2} \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ b = 4 \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ b = 0 \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ b = 4 \\ 78a^2 + 3 = 0 \\ b = 0 \\ a^2 = 7 \end{cases}$$

Обозначим ~~$x-1 = a$ и $y-2 = b$~~ $x-1 = a$ и $y-2 = b$

тогда $y - 2x = 6 - 2a$

$\sqrt{xy - 2x - y + 2} = \sqrt{ab} = \sqrt{4a^2}$ или $\sqrt{a^2}$ по знаку перед корнем в левом случае не будет отрицательным и замечания

$$\begin{cases} b = 4 \\ a = \sqrt{7} \\ b = 4 \\ a = -\sqrt{7} \\ b = 0 \\ a = 1 \\ b = 0 \\ a = -7 \end{cases}$$

подставим a и b

$$\begin{cases} b = y = 2 + 2\sqrt{\frac{7}{3}} \\ x = 1 + \sqrt{\frac{7}{6}} \\ y = 2 - 2\sqrt{\frac{7}{3}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{7}{6}} \\ y = 3 \\ x = 2 \\ y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1) (2; 3) (1 - \sqrt{\frac{7}{6}}; 2 - 2\sqrt{\frac{7}{3}}) (1 + \sqrt{\frac{7}{6}}; 2 + 2\sqrt{\frac{7}{3}})$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)