МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a; b; c - члены геом прогресси, обозначим здесь

$a=a$ $b=aq$ $c=aq^2$, тогда

$ax^2-2bx+c=0 = ax^2-2aqx+aq^2=0$

$D=4a^2q^2-4a^2q^2=0$ $x=\frac{2aq}{2a}=q$, но

x - 4-ый член, т.е. $x=aq^3$, тогда

$aq^3=q$ $aq^3-q=0$ $q(aq^2-1)=0$ $\left[\begin{array}{l}q=0\\ aq^2-1=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}q=0\\ aq^2=1\end{array}\right.$

но $q\neq0$, т.к. прогрессия - геом., тогда

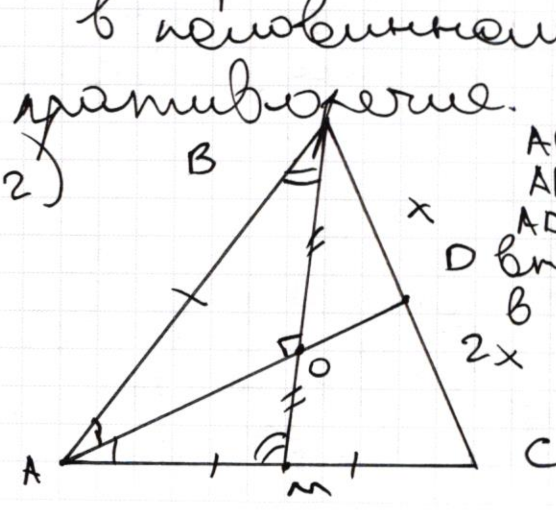
$aq^2=1$, но c - третий член и $c=aq^2=1$

Ответ: $c=1$

№2

1) Бис-а и медиана при таких условиях не могут выходить из одной вершины, т.к. $\frac{x}{2}<90^\circ$, но при этом медиана лежит в половинном угле и пер-рна бис-е — противоречие.

2)



AD - бис-а BM - медиана

AD ∩ BM = т. O при этом

AD и BM в любом треугольнике

D внутри (даже в тупом)

В △AOM и △ABO: ∠AOM = ∠BAO,

AO ⊥ BM, т.е. BM высота

и бис-а, т.е. △ABM - р/б-ый

и BM - медиана и AB = AM = AC

По т. о бис-се, бис-а делит сторону в том же отношении, как относятся боковые стороны, т.е. $\frac{CD}{DB} = \frac{2}{1}$

Пусть $CD = 2x$ $BD = x$, а $MC = MA = AB = y$, тогда получаем, что $AB + BC + CD = 3x + 3y = 900$ $x + y = 300$, при этом $x, y \in Z$

Тогда $x > 0$ $y > 0$ и $y = 300 - x$.

Имеем ~~…~~ 299 таких вариантов, т.е. $(1; 299)$; $(2; 298)$ ... $(299; 1)$

Варианты $(1; 299)$ и $(299; 1)$ не являются одинаковыми, т.к. x и y ~~об~~ привязаны к медиане и биссектрисе.

Ответ: 299

№4

Дано:

а) $\triangle ABC$

$\angle C = 90°$

$D \in AC$

$E \in AB$,

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ б) $AC = \sqrt{7}$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 30°$

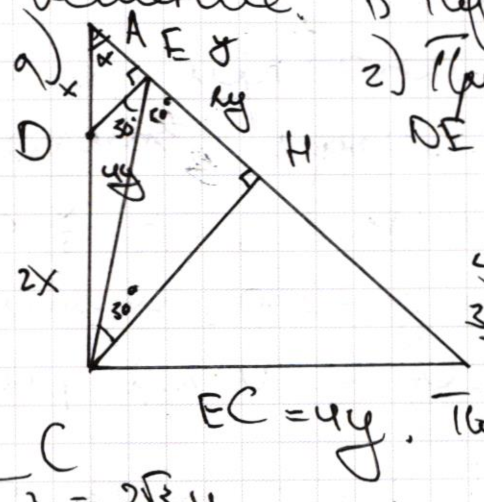
Найти:

а) $tg \angle BAC$

б) $S_{\triangle CED}$

Решение:

а)



1) Пусть $AD = x$, тогда $DC = 2x$

2) Проведём $CH \perp AB$

$DE \parallel CH$, тогда $\frac{AE}{EH} = \frac{AD}{DC}$ и

$AE = \frac{1}{2} EH = 2y$

$\angle CEH = 90° - 30° = 60°$, $\angle ECH = 30°$

3) $\triangle EHC$ - пр-ый, EH лежит против $30°$, тогда $EC = 4y$. По т. Пифагора, $CH = \sqrt{EC^2 - EH^2} = \sqrt{16y^2 - 4y^2} = 2\sqrt{3}y$

4) $tg \angle CAB = \frac{CH}{AH} = \frac{2\sqrt{3}y}{3y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

б) По т. Пифагора, $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2}$ $3x = \sqrt{21}y$ $x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}y$, но $3x = \sqrt{7}$ (п.1 у), т.е. $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}y$ $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2) В $\triangle DEC$ по т. синусов: $2R = \frac{CD}{\sin 30°}$ $R = \frac{CD}{2 \cdot \frac{1}{2}} = CD$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $EC = 4y$, $DC = 2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} y = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} y$

4) $S_{\triangle DEC} = \frac{abc}{4R} = \frac{ED \cdot EC \cdot CD}{4 \cdot CD} = \frac{ED \cdot EC}{4} =$

$= \frac{4y \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} y}{4} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} y^2$, но $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е.

$S_{\triangle DEC} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

Ответ: б) $S_{\triangle DEC} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$, а) $tg \angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$

№6

1) Построим примерные графики $y = 8x - 6|2x-1|$ и $y = -8x^2 + 6x + 7$ на зад. пром.

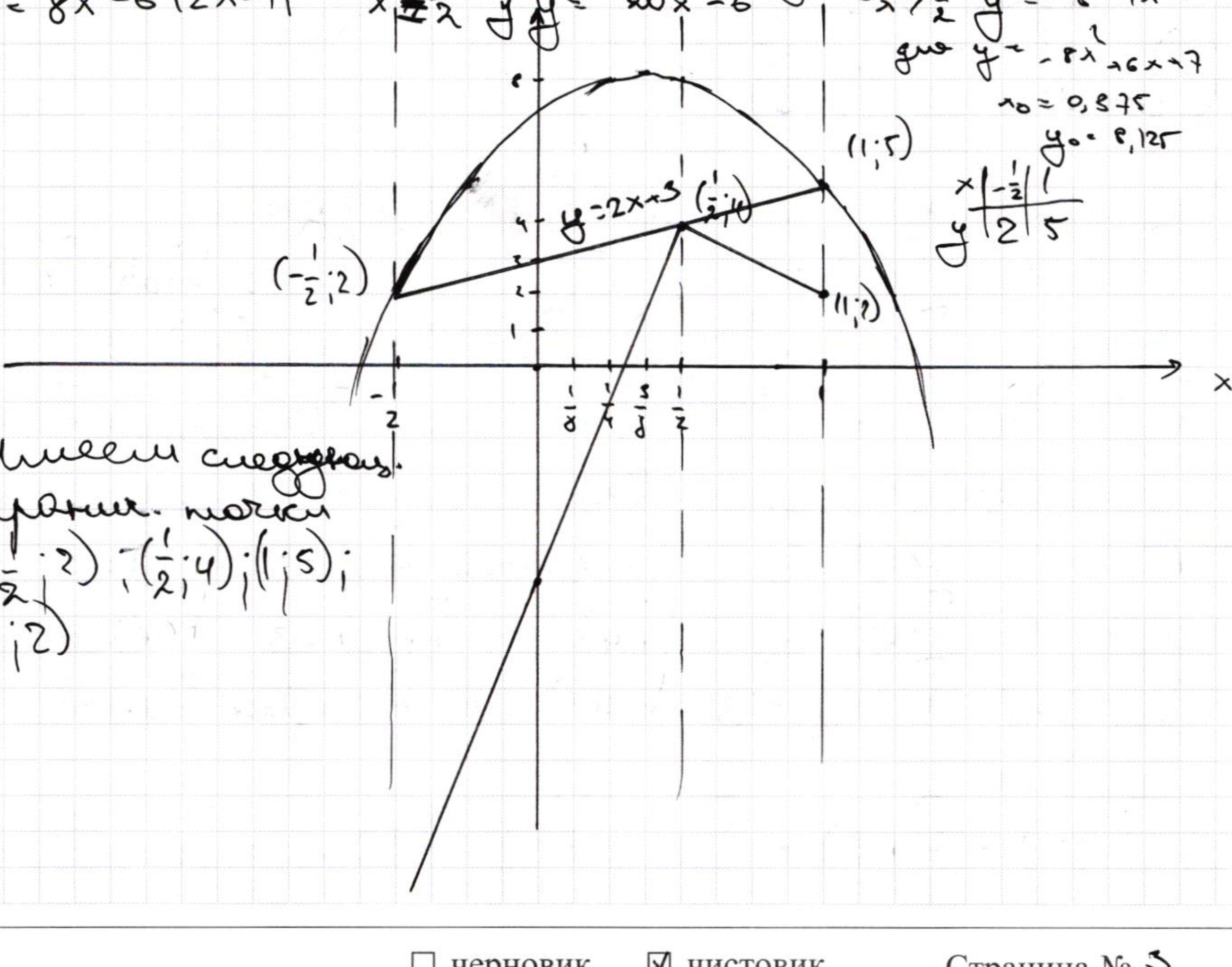
$y = 8x - 6|2x-1|$ $x \leq \frac{1}{2}$ $y = 20x - 6$ $x > \frac{1}{2}$ $y = 6 - 4x$

для $y = -8x^2 + 6x + 7$

$x_0 = 0{,}375$

$y_0 = 8{,}125$

x	$-\frac{1}{2}$	1
y	2	5



Имеем следующ. огранич. точки $(-\frac{1}{2};2)$; $(\frac{1}{2};4)$; $(1;5)$; $(1;2)$

2) Тогда можем получить систему условий: $\begin{cases} -\frac{a}{2}+b\le 2 \\ \frac{a}{2}+b\ge 4 \\ a+b\le 5 \\ a+b\ge 2 \end{cases}$

① $-\frac{a}{2}-b\le -4$ $\quad \frac{a}{2}\le 1 \quad a\le 2$

$a+b\le 5$

$-\frac{a}{2}+b\le 2$

$-\frac{a}{2}-b\le 4$ $\quad -a\le -2 \quad a\ge 2$,

получаем, что $2\le a\le 2$, т.е. $a=2$

② $a+2b\ge 8$ $\quad b\ge 3$ $\quad a+b\le 5$ $\quad 3b\le 9\ b\le 3$

$-a-b\ge -5$ $\quad -a+2b\le 4$

получаем, что $3\le b\le 3$, т.е. $b=3$, действительно, график функции $y=2\cancel{x}+3$ проходит через крайние точки графиков заданных функций, т.е. удовлетворяет условию

Ответ: $(2;3)$

№7

1) По условию, $f(p)=[\frac{p}{2}]$, тогда $f(2)=1$ $\quad f(3)=1$. По условию $f(ab)=f(a+b)$, тогда $f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=2$, $f(5)=2$, $f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=1+1=2$. По аналогии находим для всех чисел от 2 до 22:

$f(7)=3$ $\quad f(8)=3$ $\quad f(9)=2$ $\quad f(10)=3$ $\quad f(11)=5$

$f(12)=3$ $\quad f(13)=6$ $\quad f(14)=4$ $\quad f(15)=3$ $\quad f(16)=4$

$f(17)=8$ $\quad f(18)=3$ $\quad f(19)=9$ $\quad f(20)=4$ $\quad f(21)=4$

$f(22)=6$

2) $f(2)=f(1\cdot 2)=f(1)+f(2)=f(1)+1=1$, т.е. $f(1)=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $f(1)=f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(\frac{1}{2})+f(2)=f(\frac{1}{2})+1=0$,
т.е. $f(\frac{1}{2})$. В общем виде:
$f(1)=f(n\cdot\frac{1}{n})=f(n)+f(\frac{1}{n})=0$, $f(\frac{1}{n})=-f(n)$

4) Тогда $f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0$
$f(y)>f(x)$

5) Получим систему условий:

$\begin{cases} 2\le x\le 22 \\ 2\le y\le 22 \\ f(y)>f(x) \end{cases}$ В п.1 изложен список значений $f(y)\ne 1$, т.к. $f(n)=0$ только при $n=1$, а $y\geq 2$ $(1>0)$.

$f(y)=2$ при 4 зн-ях y $f(x)<2$ при 2 зн-ях x Итого 8 пар $4\cdot 2$

$f(y)=3$ при 6 зн-ях y $f(x)<3$ при 6 зн-ях x Итого 36 пар $6\cdot 6$

$f(y)=4$ при 4 зн-ях y $f(x)<4$ при 12 зн-ях x Итого 48 пар $4\cdot 12$

$f(y)=5$ при 1 зн-ии y $f(x)<5$ при 16 зн-ях x Итого 16 пар $16\cdot 1$

$f(y)=6$ при 2 зн-ях y $f(x)<6$ при 17 зн-ях x Итого 34 пары $17\cdot 2$

$f(y)\ne 7$

$f(y)=8$ при 1 зн-ии y, $f(x)<8$ при 19 зн-ях x Итого 19 пар

$f(y)=9$ при 1 зн-ии $f(x)<9$ при 20 зн-ях x Итого 20 пар

Дальше неук. промеж. зн. нет.

6) В сумме получаем $8+36+48+16+34+19+20=181$ пару

Ответ: 181 пара.

N3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-6y)^2=(x-6)(y-1) \\ (x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)-18=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-6y-x+6 \geq 0$ или $x-6y \geq 0$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=(x-6)(y-1) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sqrt{2}(x-6y)^2-2\sqrt{2}(x-6)(y-1)=0 \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{2}(x-6y)^2-2\sqrt{2}(x-6)(y-1)+(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$$

$$2\sqrt{2}(x-6y)+(x-6-y\sqrt{2}+\sqrt{2})^2-18=0$$

$$2\sqrt{2}(x-6y)^2+(x-y\sqrt{2}-6+\sqrt{2})^2-18=0$$

N5

Дано:

Ω; ω

$\Omega \cap \omega =$ т. A

AB – диаметр Ω

$BC \cap \omega =$ т. D

$AD \cap \Omega =$ т. E

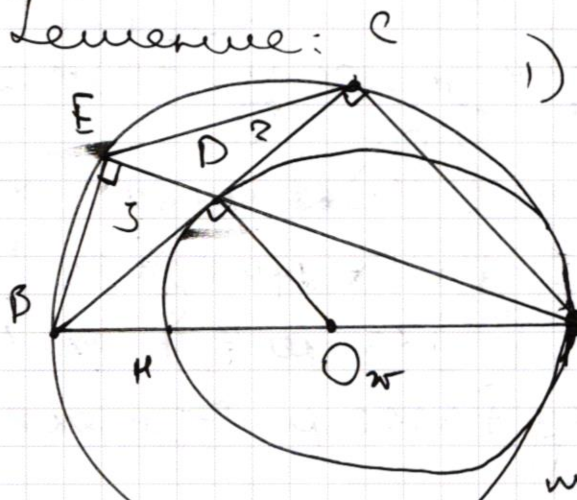
$CD = 2$

$BD = 3$

Найти:

R_Ω; R_ω; S_{BACE}

Решение:



1) AB – диаметр, $\angle BEA = \angle BCA = 90°$, т.к. опираются на $\smile$

2) Центры O_ω и O_Ω лежат на одном отрезке AB, т.к. общ. т. касания.

тогда $O_\omega D \perp BC$ и $O_\omega D \parallel CA$. С другой стороны, $BA \cap \omega =$ т. H и $BH \cdot AB = BD^2$ или

$2R_\Omega \cdot (2R_\Omega - 2R_\omega) = BD^2$, а из $O_\omega D \parallel AC$: $\frac{R_\omega}{R_\Omega} = \frac{DC}{BC} = \frac{2}{5}$

$2R_\Omega = 5R_\omega$

$5R_\omega(5R_\omega - 2R_\omega) = 15R_\omega^2$ $R_\omega = \sqrt{\frac{9}{15}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $R_\Omega = 2{,}5R_\omega =$

$= \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{\sqrt{15}}{2}$; $R_\omega = \sqrt{\frac{3}{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

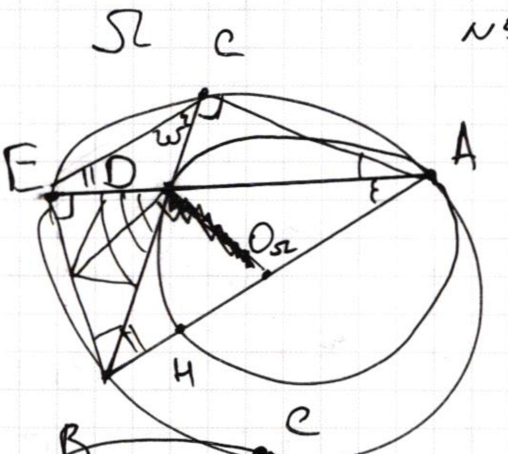
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



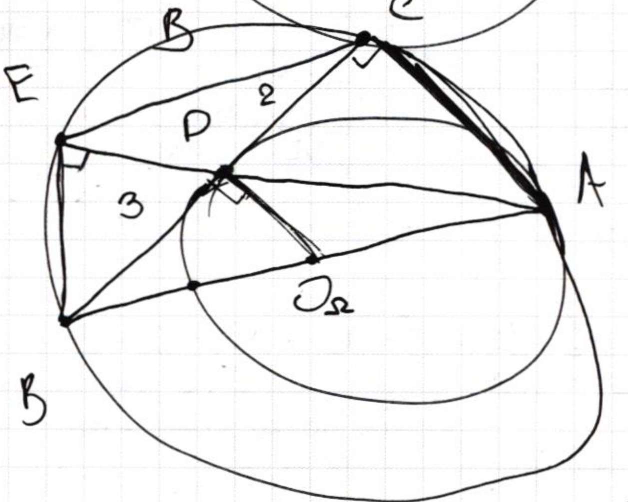
$CD = 2 \quad BD = 3$

$ED \cdot DA = 6$

Ω

$\cancel{R}\, D(R-d) = 9$

$D = \sqrt{AC^2 \cdot 25}$



№7

$f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$2 \le x \le 22 \quad 2 \le y \le 22 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(2) = 1 \quad f(3) = 1 \quad f(5) = 2$

$f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 1+1 = 2$

$f(6) = f(2\cdot 3) = 1+1 = 2$

$f(7) = 3 \quad f(8) = f(2\cdot 4) = 2+1 = 3$

$f(9) = f(3\cdot 3) = 2 \quad f(10) = f(2\cdot 5) = 1+2 = 3$

$f(11) = 5 \quad f(12) = f(2\cdot 6) = 3 \quad f(13) = 6 \quad f(14) = f(2\cdot 7) = 4$

$f(15) = f(3\cdot 5) = 1+2 = 3 \quad f(16) = f(2\cdot 8) = 4 \quad f(17) = 8$

$f(18) = f(2\cdot 9) = 1+2=3$ $f(19) = 9$ $8+36=44$

$f(20) = f(2\cdot 10) = 4$ $f(21) = f(3\cdot 7) = 3+1=4$ $44+48=92$

$92+16=108$

$f(22) = f(2\cdot 11) = 6$ $108+34=142$

$142+20=162$

$162+19=181$

$f(2) = f(4\cdot \frac{1}{2}) = f(4) + f(\frac{1}{2}) = 2 + f(\frac{1}{2}) = 1$

$f(\frac{1}{2}) = -1$

$f(1) = f(2\cdot\frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{2}) = 1-1=0$

$f(1) = f(\frac{1}{3}\cdot 3) = 1-1=0$, т.е.

~~$f(\ ) = 1$~~ $f(\frac{1}{3}) = -1$ $36+48+16+34+10=$

~~Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y})$~~ $=50+82+39=$

$=89+82=171 \quad 171+8=179$

$f(\frac{1}{4}\cdot 4) = f(\frac{1}{4}) + 2 = 0$ ~~$8+38+48+16+34+19+20$~~

$f(\frac{1}{n}) = -f(n)$ ~~$44+48+50+19+20 = 92+70+19$~~ $162+19=181$

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$ ~~$8+36+48+16+34+19+26$~~ $=98+72+19=$

$=170+19=189$

$8+6+8+6+4+9=$

$30+40+10+30+10+20=170$

~~0; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 2; 3; 3; 4; 3; 4; 5; 3; 9; 4; 4; 6~~

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

0; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 2; 3; 5; 3; 6; 4; 3; 4; 8; 3; 9; 4; 4; 6

~~y=4~~ ~~x=2~~ $y = 4; 5; 6; 9$ $x = 2; 3$ – 8 пар

3 $y = 7; 8; 10; 12; 15; 18$ $x = 2; 3; 4; 5; 6; 9$ – 36 пар

48 пар

4 $y = 14; 16; 20; 21$ $x = 2; 3; 4; 5; 6; 9; 7; 8; 10; 12; 15; 18$

16 пар

5 $y = 11$ $x = 2; 3; 4; 5; 6; 9; 7; 8; 10; 12; 15; 18; 14; 16; 20; 21$

6 $y = 13; 22$ $x =$ все $+ 11$ 34 пары

7 $y = 17$ $x =$ все $+ 13; 22$ 19 пар всего: $36+48+16+34+19+20=171$

9 $y = 19$ $x =$ все $+ 17$ 20 пар Ответ: 171 пара

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a b c

$a \quad aq \quad aq^2$

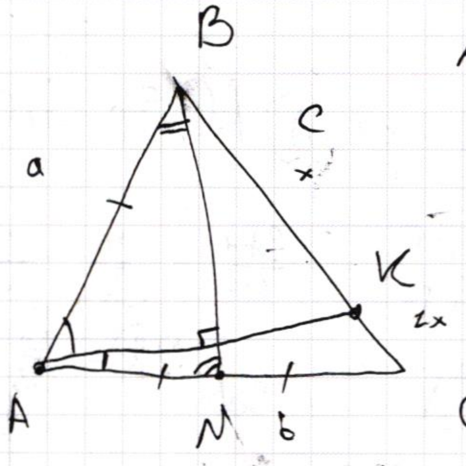
$ax^2 - 2bx + c = 0 \qquad ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$D = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0 \qquad x = \frac{2aq}{2a} = q$

$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 = q \qquad q(aq^2 - 1) = 0$

$aq^2 = 1$? Ответ: $c = 1$

№2



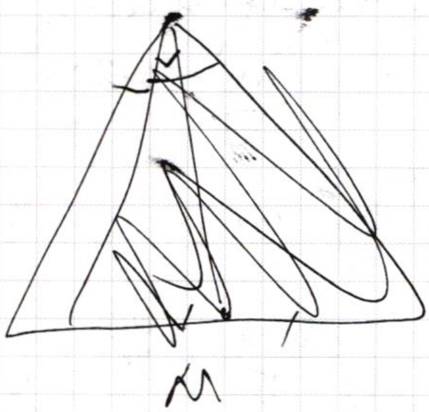
$3x + 3y = 900$

$x + y = 300$?

бис-а и медиана всегда внутри, из разных углов.

299 треугольников

№3 Ответ: 299



$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$xy - 6y - x + 6 \geq 0$

$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6 \qquad x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0 \quad (1)$

$(1) - (2): \ 34y^2$

$$\begin{cases} x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \\ x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0 \\ xy-6y-x+6\geqslant 0 \end{cases}$$

$\cancel{x^2+2y^2-2\sqrt{2}xy}$

$(x-6y)^2-xy+6y+x-6=0$ $(x-6y)^2+x(1-y)-6(1-y)=$

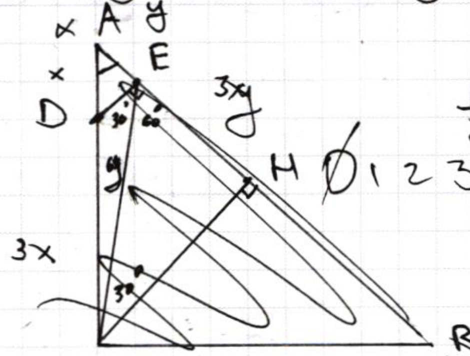
$=(x-6y)^2+(x-6)(1-y)$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$(x^2-2\cdot6\cdot x+6^2)+2(y^2-2\cdot1\cdot y+1)-18=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0$ б) $AC=\sqrt{7}$ $S_{\triangle}CED-?$

а) 

$tg A=\frac{DE}{AE}=\frac{CH}{HA}=\frac{CB}{BA}$

$\angle AEC=120^\circ$ $2R=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}:\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ $R=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

По т. косинусов:

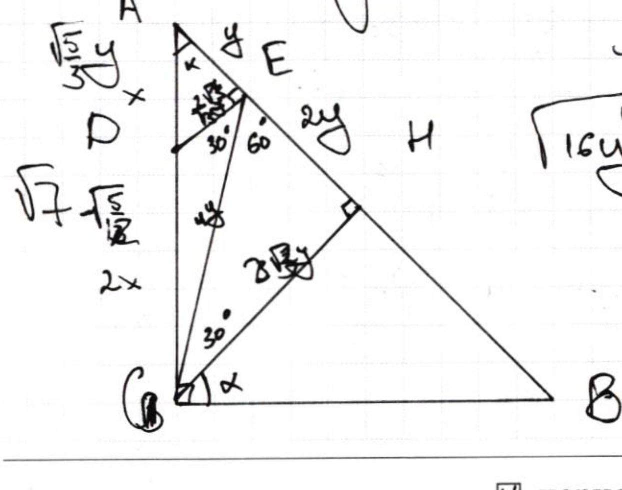
$16x^2=36y^2+y^2-2\cdot36y^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$16x^2=y^2(36-36\sqrt{3})$

$9x^2=y^2+16y^2-4y^2\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{7}=\sqrt{3}y$ $y=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot4$ $S=\frac{abc}{4R}=$

$y=\sqrt{\frac{7}{3}}$



$\sqrt{16y^2-4y^2}=\cancel{2\sqrt{3}}\ 3\sqrt{2}y$ $S=\frac{abc}{4R}$

$2\sqrt{3}$

$3y^2+12y^2=9x^2$ $5y^2=3x^2$

$x=\sqrt{\frac{5}{3}}y$

$tg\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}:1=\frac{2}{\sqrt{3}}$ Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$?

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $y=\sqrt{\frac{7}{5}}$ $2R=\frac{DC}{\sin E}=\frac{\sqrt5}{2\sqrt3}y:\frac12$ $R=\frac{\sqrt5}{2\sqrt3}y$

$R=\frac{\sqrt5}{2\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt7}{\sqrt5}=\frac{\sqrt7}{2\sqrt3}$

$EC=4y=\frac{4\sqrt7}{\sqrt5}$ $DE=\frac{2}{\sqrt3}y=\frac{2\sqrt7}{\sqrt{15}}$

$DC=\frac{\sqrt5}{2\sqrt3}\cdot y=\frac{\sqrt7}{2\sqrt3}$

$S_{\triangle DEC}=\frac{abc}{4R}=\left(\frac{4\sqrt7}{\sqrt5}\cdot\frac{2\sqrt7}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt7}{2\sqrt3}\right):\frac{2\sqrt7}{\sqrt3}=$

$=\frac{56\sqrt7}{30}\cdot\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}$

$\sqrt{\frac53}y=\sqrt7$ $y=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt5}$ $R=\frac{\sqrt5}{2\sqrt3}\cdot y=\frac{\sqrt7}{2}$

$EC=4y=\frac{4\sqrt{21}}{\sqrt5}$ $DE=\frac{2}{\sqrt3}\cdot y=\frac{2\sqrt7}{\sqrt5}$

$DC=\frac{\sqrt5}{2\sqrt3}\cdot y=\frac{\sqrt7}{2}$ $S=\frac{abc}{4R}=\frac{4\sqrt{21}\cdot2\sqrt7\cdot\sqrt7}{\sqrt5\cdot\sqrt5\cdot2}:2\sqrt7=$

$=4$

№6 $x=1$ $y=-8+6+7=5$

$8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$ $y_0=-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac38+7=$

$=-\frac98+\frac94-7=$

$x=\frac12$ $x=\frac12$ $y=-8\cdot\frac14+6\cdot\frac12+7=$ $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-16}=\frac38=0{,}375$

$=-2+3+7=+8$ $=\frac{18}{8}-\frac98=\frac98+7=$

1) $x\le\frac12$

$8x-6(1-2x)=8x-6+2x=10x-6$

2) $x\ge\frac12$ $8x-6(2x-1)=8x-12x+6=6-4x$

x	$\frac12$	0	
y	8	-6	
y	$\frac14$	$\frac12$	$=8+\frac18$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

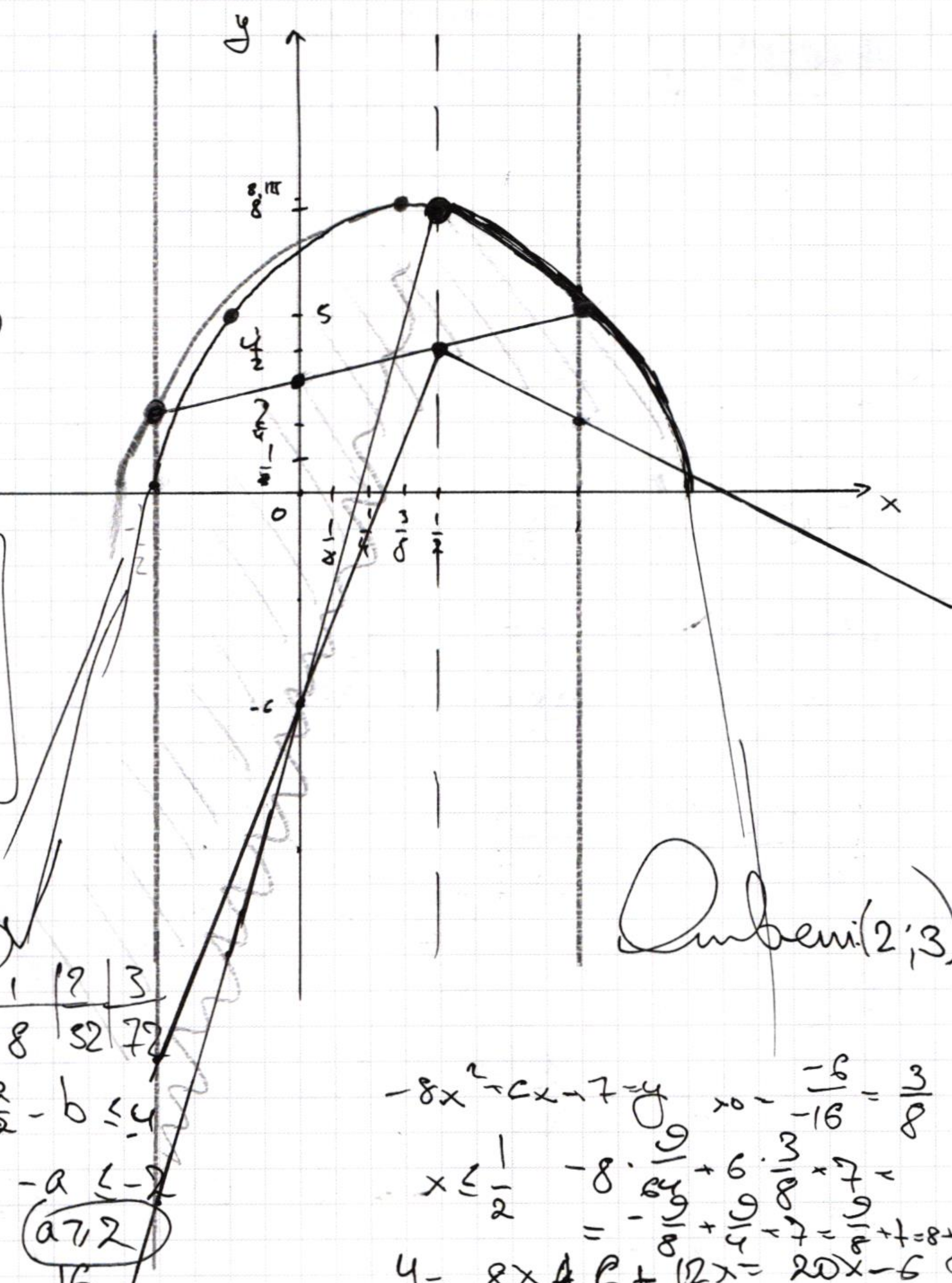
$-\frac{a}{2} - b \le -4$

$a + b \le 5$

$+\frac{a}{2} \le 1$

$a \le 2$ $\quad$ $a \ge 2$

$a = 2$



$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{a}{2} + b \ge 4 \\ &-\frac{a}{2} + b \le 2 \\ &a + 2b \le 5 \end{aligned}}$$

$a + 2b \ge 8$

$-a - b \ge -5$

$b \ge 3$ $\quad$ $b = 3$

$8x$

x	0	1	12	3
y	0	8	52	72

$\cancel{ax + b} \le$ $\quad -\frac{a}{2} - b \le 4$

$-\frac{a}{2} + b \le 2 \quad -a \le -2$

$\frac{a}{2} + b \ge 4 \quad a \ge 2$

16

$a + b \le 5 \quad \cancel{-\frac{a}{2} + b < -20}$

$-a + 2b \le 4 \quad a > 0$

$3b \le 9 \quad a + b < 2$

$b \le 3$

$\cancel{\frac{a}{2} + b < -18}$

$-\frac{a}{2} + b = -16 \quad a + b = 2$

$\cancel{a = 2 - b}$

$1{,}5a = 18 \quad a = 12$

$b = -10$

$(-\frac{1}{2}; -16) \quad (1; 2)$

$(-\frac{1}{2}; 2) \quad (\frac{1}{2}; 4)$

$-8x^2 + 6x + 7 = y \quad x_0 = -\frac{6}{-16} = \frac{3}{8}$

$x \le \frac{1}{2} \quad -8 \cdot \frac{9}{64} + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7 =$

$= -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$

$y = 8x - 6 + 12x = 20x - 6$

x	$\frac{1}{2}$	0
y	4	-6

$-8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 =$

$= -2 - 3 + 7 = 2$

$-8 + 6 + 7 = 5$

$4 - 6|0 - 1| = 4$

$-\frac{a}{2} + b = 2 \quad \frac{a}{2} + b = 4 \quad 2b = 6 \quad b = 3$

$\frac{a}{2} = 1 \quad a = 2 \quad (2; 3)$

Ответ: $(2; 3)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$x^2+36y^2-12yx-18xy+6y+x-6=0$$

$$(x-6)^2 \cancel{+2(y-1)^2} = 18$$

$$xy-6y+6-x= x(y-1)+6(1-y) = (y-1)(x-6)$$

$$\left(x^2+(\sqrt{2}y)^2-2\cdot\sqrt{2}y\cdot x\right)+2\sqrt{2}\cdot xy-12x-4y+20=0$$

$$x(2\sqrt{2}y-12)-4(y-5)$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \\ (x-6y)^2-(y-1)(x-6)=0 \end{cases}$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2-18+(x-6y)^2-(y-1)(x-6)=0$$

$$\cancel{(x-6)^2+\left((x-6)+\sqrt{2}(y-1)\right)^2-18+(x-6y)+(2\sqrt{2}-1)(y-1)(x-6)=0}$$

$$\cancel{(x-6)(x-6-y+1)+2(y-1)^2-18+(x-6y)^2}$$

$$(x-6-y+1)^2+(y-1)^2-18+(x-6y)^2+(y-1)(x-6)=0$$

$$(x-y-5)^2+(y-1)^2-18+(x-6y)^2+(y-1)(x-6)=0$$

$$(y-1)(x-6+y-1)+(x-y-5)^2+(x-6y)^2-18=0$$

$$\cancel{(y-1)(x+y-7)+(x-y-5)^2+(x-6y)^2-18=0}$$

$$2(y-1)^2+2(y-1)(x-6)+(x-6)^2+(y-1)(x-6)+(x-6y)^2-18=0$$

$$2(y-1)(y-1-x+6)+(x-6)(x-6+y-1)+(x-6y)^2=18=0$$

~~$2(y-1)(x-y-6)+(x-6)(x+y-7)+(x-6y)^2-18=0$~~

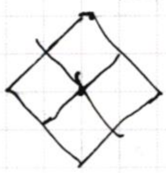
$x^2+36y^2-12xy-xy+6y+x-6+x^2+2y^2-12x+y+20=0$

$2x^2+38y^2-13xy+7y-11x+14=0$

~~$x(2x-13y-11)+y(38y$~~

$2(y-1)^2+(x-6)^2-18+(x-6y)^2+(x-6)(y-1)=0$

~~$x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)-18=0$~~



$x=0$

~~$2\sqrt{2}\cdot 36y^2+2y^2$~~

$2\sqrt{2}\cdot 36y^2-2\sqrt{2}(-6)(y-1)+36+2y-20=0$

~~$72\sqrt{2}y^2+12\sqrt{2}y-12\sqrt{2}+36+2y-20=0$~~

~~$72\sqrt{2}y^2$~~

$\frac{15}{4}-25$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)