МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6\sin(120-A) = \sin A$

$6\sin 120\cdot\cos A - 6\cos 120\cdot\sin A = \sin A$

$6\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos A - 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin A = \sin A$

$3\sqrt{3}\cos A = 4\sin A$

$DE = DA\cdot tg\,\alpha$

$\boxed{tg\,A = \frac{3\sqrt{3}}{4}}$

$DA = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\frac{7}{16} = DE^2 + EA^2$

$\frac{7}{16} = EA^2(tg^2\alpha + 1)$

$\frac{7}{16} = EA^2\left(\frac{27}{16} + 1\right)$

$\frac{7}{16} = EA^2\left(\frac{27+16}{16}\right)$

$EA^2 = \frac{7}{43}$

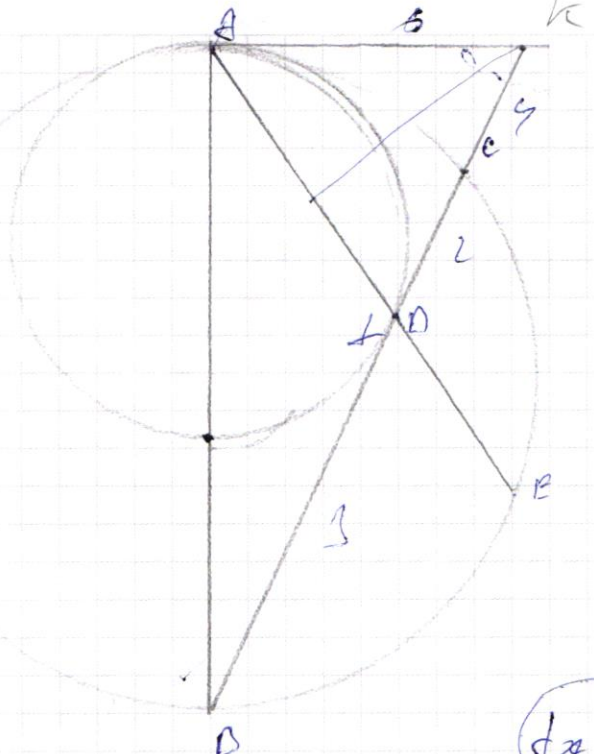
$S = \frac{EA^2\cdot tg\,\alpha}{2} = \frac{\frac{7}{43}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}}{2} =$

$= \frac{21\sqrt{3}}{8\cdot 43}$

$DE \cdot 2\sqrt{6} = 6$

$DE = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{DE = \sqrt{\frac{3}{2}}}$



$AK = KD$

BACE

$CD = 2 \quad BD = 3$

$BD \cdot DC = DE \cdot AE$

$\frac{2\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{6 \cdot \sqrt{5}}{5}$

$d_1 \, |d_1 - d_2| = 9$

$4\sqrt{5}$

$\frac{5\sqrt{6}}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{\frac{2}{3}}$

$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{6}}}$

$AK^2 = CK \cdot KB$

$AK^2 = (DK - DC)\cdot(BD + DK)$

$AK^2 = (AK - 2)\cdot(3 + AK)$

$AK^2 = AK^2 + AK - 6$

$AK = 6$

$6^2 + 6^2 - 2\frac{2}{3}\cdot 6^2 =$

$AD^2 = 6^2\left(2 - \frac{4}{3}\right)$

$\left(\frac{6}{3} - \frac{4}{3}\right)$

$\boxed{AD = 6\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{6}}$

$\frac{d_1}{\sin\angle A} = \frac{AB}{\sin B}$

$9^2 = 6^2 + d_1^2$

$(9-6)(9+6)$

$3 \cdot 15 = d_1^2$

$d_1 = 3\sqrt{5}$

$6 \quad \cancel{\frac{12\sqrt{5}}{5}} \quad \cancel{6\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$\cancel{\frac{2}{\sqrt{5}}} \quad \cancel{2\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$45 - 3\sqrt{5}\, d_2 = 9$

$36 = 3\sqrt{5}\, d_2$

$\frac{12}{\sqrt{5}} = d_2$

$d_2 = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$S_{\angle A} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$S_{BACE} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3$

$224 - 140$

$224 - 50 \quad 104 - 20 \quad 74$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$\frac{S_3 \cdot S_7}{S_6}$ $(x-q)^2 = 0.$

$aq^3 = 9$

$4q^2 = 1$

$x > b$

$a > 0$

$900 = 36 + x$

$36 > x > b$

$x = q$

$[225; 150]$

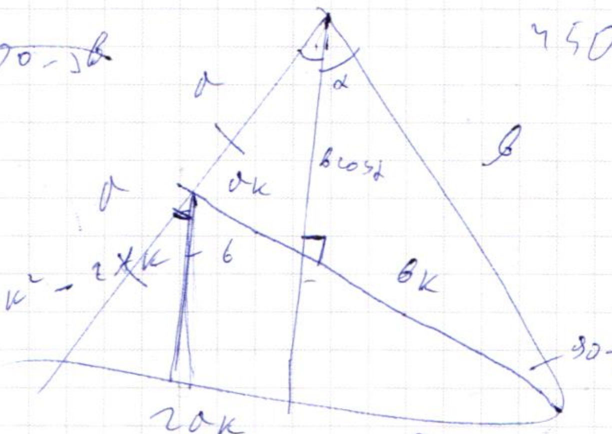
$900 > 36 + b$

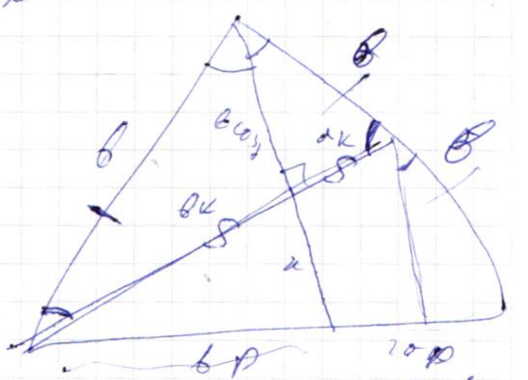
$900 > 4b$

$225 > b$

$450 > x$

$140 < b$





$900 - 36$

$\cancel{20p \cdot bk \cdot a = bp \cdot ak \cdot 2a}$

$a \cdot b\cos\alpha \cdot bp =$

$= a \cdot x \cdot p(b + a)$

$b^2\cos\alpha = x(b+a)$

$(900 - 224) \cdot 3 = x$

$76 \cdot 3 = x$

$210 + 24 = x$

234

$100 - 24$

$90 - 4 = 76$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \end{cases}$$

$\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2-36+2(y-1)^2-2=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$x-6=a$

$y-1=b$

$x-6+6-6y$

$(x-6)-6(y-1)=\sqrt{\cancel{xy-6y}}$

$a-6b=\sqrt{ab}$ $\qquad a^2+36b^2-12ab=ab$

$a^2+2b^2=18$ $\qquad a^2+36b^2-12ab=ab$

$\times\frac{36}{144}$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=13b^2-36b^2\cdot4=$

$\frac{EA}{CA}=\frac{CA}{4BA}$ $\quad 169b^2-144b^2=25b^2$

$$\left| \frac{6EA}{\sin A}=\frac{EA}{\sin(120-E)} \right.$$

$4BA=\frac{CA^2}{EA}$ $\quad a=\frac{13b\pm5b}{2}=$ $\qquad a=9b$ $\quad a=4b$

$16a^2+2b^2=18$

$\frac{EA}{4(C)DA}=\frac{DA}{BA}$ $\quad b^2=1$

$b=\pm1$ $\quad a=\pm4$ $\quad \boxed{y=0,\ -2;\quad y=-10}$

$81b^2+2b^2=18$

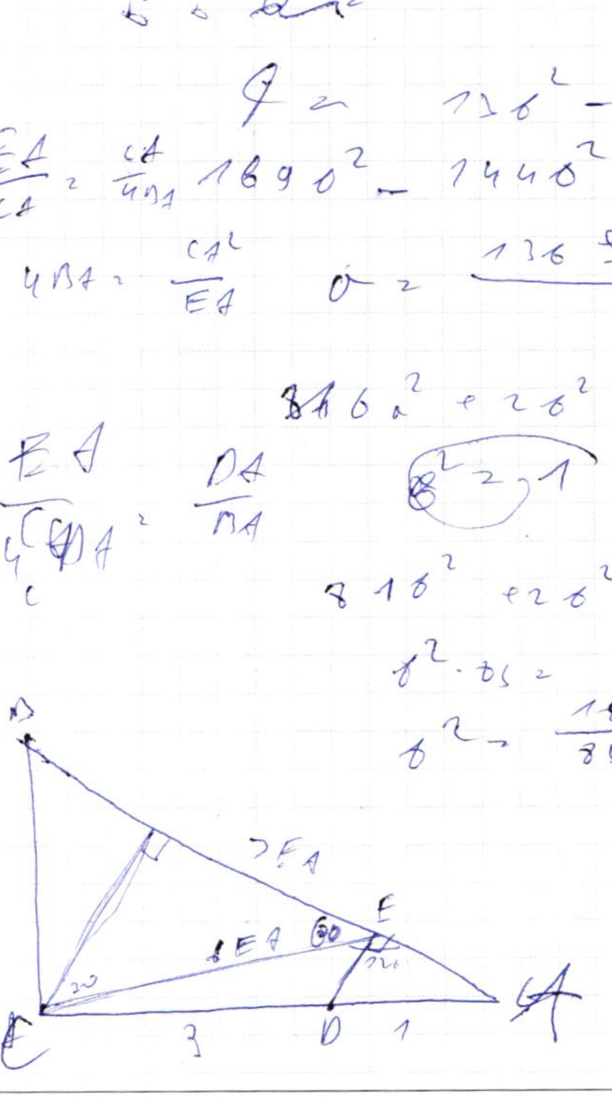
$b^2\cdot83=18$

$b^2=\frac{18}{83}$

$$\boxed{b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}=\pm3\sqrt{\frac{2}{83}} \qquad a=\pm\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}}$$

$\pm3\sqrt{\frac{2}{83}}-1$

$\pm27\sqrt{\frac{2}{83}}-6$



$4y2$

$\frac{EA}{CA}=\frac{DA}{BA}$ $\quad 4DA=BA$

$\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b \leq 1$

$4 \leq \frac{a}{2} + b$

$b \leq 3$

$-8 + 6 + 7$

$-2 + 3 + 7$

2

$0 + b \leq 0$

$-\frac{a}{2} + b \leq 0$

$-\frac{7}{4} - \frac{6}{2} + 7$

$-8a^2 +$

$-8x^2 + 6x + 7 = 0$

$8x^2 - 6x - 7 = 0$

$D = 36 + 8 \cdot 7 \cdot 4 = 4(9 + 8 \cdot 7) = 4(9 + 56) = 4 \cdot 65 = 2\sqrt{65}$

$\frac{6 \pm 2\sqrt{65}}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{8}$

$-2 + 6 + 7$

$-8\left(\frac{3 + \sqrt{65}}{8}\right)^2 + 6\left(\frac{3 + \sqrt{65}}{8}\right)$

$-8\left(\frac{3 + \sqrt{65}}{8}\right)^2 + 6\left(\frac{3 + \sqrt{65}}{8}\right)$

$-8\left(\frac{3 + \sqrt{65}}{8} - \frac{3 - \sqrt{65}}{8}\right)\left(\frac{3 + \sqrt{65}}{8} + \frac{3 - \sqrt{65}}{8}\right) \quad 6\left(\frac{3 - \sqrt{65}}{8} - \frac{3 + \sqrt{65}}{8}\right)$

$-8\left(\frac{6}{8}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{65}}{4}\right) \quad 6\left(-\frac{\sqrt{65}}{4}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$8 \le 5$

$6 \le 26 \cdot 0$

$2 \le$

$4 \le \frac{0}{2} + 6$

$-4 - 12 \le \frac{0}{2} + 6$

$\frac{27}{8}$

$2 \le 0$

$26 \le -\frac{216}{x^2} + 24$

$6 \le -\frac{8}{x^2} + 14$

$x \le 8 + 6 \le \frac{65}{8}$

$20 + 3 \le -8x^2 + 6x + 7$

$\le -8x^2 + 4x + 4$

$0 \le -2x^2 + x + 1$

$x^2 - x - 1 \ge 0$

$x^2 - x$

$\le 6 \le -8x^2 + x(6-0) + 7$

$x(8-0) - 6(2x-1) \le 6 \le -8x^2 + x(6-0) + 7$

$x \le \frac{65}{8} - 5$

$-\frac{8}{8} + \frac{92}{8} + 7$

$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$\frac{4}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$

$\frac{65}{8}$

$26 \le \frac{65}{8} = \frac{29}{8}$

$2 \le 0 + 6$

$6 \le \frac{34}{18}$

$-4 - 12 \le -\frac{0}{2} + 8$

$-16 \le -\frac{8}{2} + 8$

$\frac{88}{8}$

$-\frac{4}{8} - \frac{18}{8} + 7$

$\frac{27}{8} + 7$

$-3\frac{3}{8} + 7$

$4 - \frac{3}{8} = \frac{29}{8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x - 6|2x-1| \le ax+b$ $\quad [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2};1]$

$8x - 6|1-2x| \le ax+b$

$8x - 6 + 12x \le ax+b$

$20x - 6 \le ax+b$ $\quad 8x - 12x + 6 \le ax+b$

$x(20-a) \le 6+b$ $\quad -4x+6 \le ax+b$

$6-b \le x(a+4)$

$(6-b)(20-a) \le (6+b)(a+4)$

$120 - 6a - 20b + ab \le 6a + 20b + ab + 24$

$120 - 24 \le 12a + 40b$

$60 - 12 \le 6a + 20b$

$\boxed{48 \le 6a + 20b}$

$a = \frac{1}{6}$ $\quad f(1)$ $\quad 20\,9\,8$

$f(1) = 0$

$1709 \ge (a-x)x$ $\quad f(2) = 1$

$f(2b) = 1 + f(b)$ $\quad x > y$

$979 \ge xa - x^2$

$a = f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x})$

$a = \frac{x}{y}$ $\quad b = y$

$f(\frac{x}{y}) = -f(\frac{y}{x})$

$f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$ $\quad f(\frac{p}{q}) = [\frac{p}{2}]$

$8 - 9$

$y = x \cdot k$ $\quad k$ — ...

$\frac{y}{x} = k$

$98 - 18$

$[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}; 1]$

$x|2a-a| \le 6a6$ $6-6 \le x|a+4|$

$10a \frac{a}{2} \ge 6a6$ $6-6 \le \frac{a}{2}+2$

$\boxed{4 \le 6-\frac{a}{2}}$ $\boxed{8 \le \frac{a}{2}+6}$

$6 \le 8$

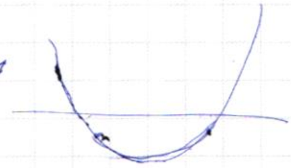
$+8x^2 - 6x - 7 + ax + 6 \le 0$

$8x^2 - x(6-a) - 7 + 6 \le 0$ $8x^2 - 6x - 7 \ge 0$

$36 + 7 \cdot 4 \cdot 8$

$8x - a2x + 6 \le -8x^2 + 6x + 7$

$0 \ge -8x^2 + 10x + 1$ $x = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$



$\frac{8}{4} + 3 - 7$

$a + 6 \le -9$

$\frac{a}{2} + 6 \le -2$ $2 \quad 16 \quad -3 \quad 1 \quad -5$

$-\frac{1}{2}$ -2

$x \ge \frac{1}{2}$

4 $6 \le -9 - a$

8

4 $6 \le -2 + \frac{a}{2}$

12 $a \le 1$

16

20 $8 \le \frac{a}{2}$ $16 \le a$

$-8x^2 + x(6-a) + 7$

$100 - 8 \cdot 4$

$\frac{3}{2}$

67 $(-9+7)^2$ $\frac{1}{2}$

$\frac{-10+257}{28}$ $ax + 6 \le$ $29 + 2 - 2057$ $\frac{1}{2}$

$\frac{-9+57}{8}$ $6 \le -7x^2 + 6x + 7 - ax$

-4 $-\frac{8}{4}$ $-\frac{8}{4} - \frac{6}{2}$ $32 - 205$ $+1$ 2

☑ черновик ☐ чистовик -2 -2 $+7$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Так как a, b, c и x (корень уравнения) являются членами геометрической прогрессии, а именно первым, вторым, третьим и четвертым соответственно тогда ~~на~~ обозначим: $a = a$; $b = aq$; $c = aq^2$; $x = aq^3$

1) Тогда уравнение $ax^2 - 2bx + c = 0$ будет иметь вид:

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0 \;|:a$ так как $a \neq 0$

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0$

$x = q$;

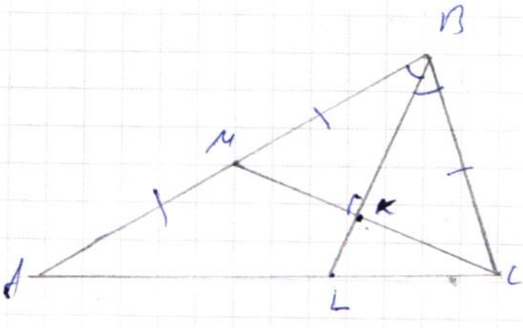
Так как $x = aq^3$ то $q = aq^3 \Rightarrow aq^2 = 1$

$aq^2 = 0$ (если $q = 0$)

2) Так как третий член прогрессии $c = aq^2$ то $c = 1$ или $c = 0$

Ответ: $c = 1$; $c = 0$

№2



$\triangle ABC$; BL - биссектриса, CM - медиана; $BL \perp MC$, $P_{ABC} = 900$

Пусть BL и MC пересекаются в точке K, тогда для $\triangle MBC$ BK и биссектриса и высота а значит $\triangle MBC$ - равнобедренный и $BC = MB$; Так как MC - медиана то $AM = MB$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Пусть $BC = a$; $AC = b$ тогда $AB = 2a$;

Тогда $P_{ABC} = 3a + b = 900$;

Так как для всех точек треугольников должно выполнить неравенство треугольника то

$\cancel{AC + AB > BC}$ $AB + BC > AC$;

$\cancel{a + 2a > b}$ $3a > b$; и

$AC + BC > AB$

$a + b > 2a$

$b > a$

Тогда превратим условие $3a + b = 900$ в два неравенства; то есть в первом случае заменим b на a, а во втором случае b на $3a$:

$3a + a < 900$ $\quad$ $3a + 3a > 900$

$a < 225$ $\quad$ $a > 150$

$a \in (150; 225)$

Так как стороны целочисленные то $a \in [151; 224]$

а значит количество всевозможных значений a как и количество треугольников ABC будет равно $= 224 - 151 + 1 = 74$

Ответ: 74

№3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0; \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x-6)-6y+6=\sqrt{x(y-1)-6(y-1)}, \\ (x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)+20-36-2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)}, \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0; \end{cases}$$

Введём замену: $x-6=a$; $y-1=b$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab}, \\ a^2+2b^2=18; \end{cases}$$

Возведём первое уравнение в квадрат и решим квадратное уравнение:

$(a-6b)^2=ab$

$a^2+36b^2-12ab=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$a_1=4b$; $a_2=9b$

Подставим во второе уравнение и найдём a и b.

1) $a=4b$

$16b^2+2b^2=18$

$b^2=1$

$b=\pm1$

$a=\pm4$

2) $a=9b$

$81b^2+2b^2=18$

$b^2=\frac{18}{83}$

$b=\pm3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}$

$a=\pm27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}$

Возвращаясь к замене получим.

1) $x-6=4$ $\qquad$ $y-1=1$

$x=10$ $\qquad$ $y=2$

2) $x-6=-4$ $\qquad$ $y-1=-1$

$x=2$ $\qquad$ $y=0$

3) $x-6=27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}$ $\qquad$ $y-1=3\sqrt{\frac{2}{83}}$

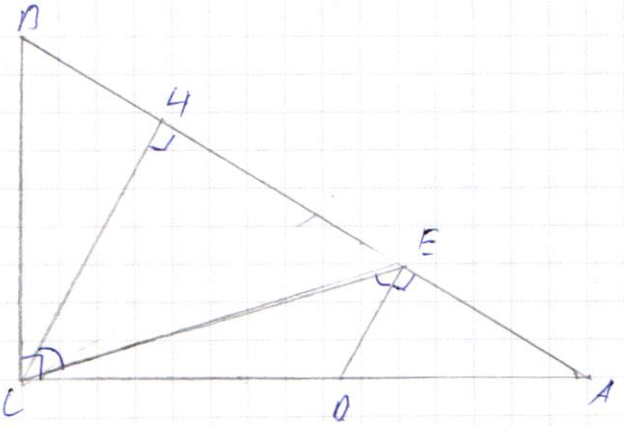
$x=27\sqrt{\frac{2}{83}}+6$ $\qquad$ $y=3\sqrt{\frac{2}{83}}+1$

4) $x-6=-27\sqrt{\frac{2}{83}}$ $\qquad$ $y-1=-3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$x=-27\sqrt{\frac{2}{83}}+6$ $\qquad$ $y=-3\sqrt{\frac{2}{83}}+1$

Ответ: $(10;2)$; $(2;0)$; $\left(27\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$; $\left(-27\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ -3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$

№4



$\triangle ABC$; $\frac{DA}{CA}=\frac{1}{3}$

$DE\perp AB$, $\angle CED=30^\circ$

$AC=57$

$tg\angle BAC$ – ?

S_{CED} – ?

CH – высота $\triangle CBA$

Тогда по теореме Фалеса $\frac{DA}{AC}=\frac{EA}{AH}=\frac{1}{3}\Rightarrow EA=\frac{1}{3}AH$

$\Rightarrow HE=2EA$. Так как $ED\perp AB$ и $CH\perp AB$ то

$ED\parallel CH$ и $\angle CED=\angle HCE=30^\circ$ тогда

$CE=2HE$ ~~тогд~~. ~~Тогд~~ Пусть $\angle BAC=\alpha$; тогда

$\angle ECA=180-\alpha-90-\angle CED=90-\alpha-30=60-\alpha$

Тогда по теореме синусов для $\triangle CEA$ получим

$\frac{EA}{\sin(60-\alpha)}=\frac{CE}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{EA}{\sin(60-\alpha)}=\frac{4EA}{\sin(\alpha)}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha = 4\sin(60-\alpha)$

$\sin\alpha = 4\sin 60\cdot\cos\alpha - 4\cos 60\cdot\sin\alpha$

$\sin\alpha = 4\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot\cos\alpha - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha$

$3\sin\alpha = 2\sqrt3\cos\alpha$

$3\,tg\,\alpha = 2\sqrt3$

$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt3}{3}$; $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt3}{3}$

Тогда Если $AC = \sqrt7$ то $DA = \frac{\sqrt7}{3}$; $DE = EA\cdot tg\,\alpha =$
$= EA\cdot\frac{2\sqrt3}{3}$

По теореме Пифагора $DA^2 = EA^2 + DE^2 = EA^2 + (tg^2\alpha + 1) =$

$= EA^2\cdot\left(\frac{4}{3}+1\right) = EA^2\cdot\frac{7}{3}$

$EA^2 = \frac{3\cdot7}{7\cdot9} = \frac{1}{3}$

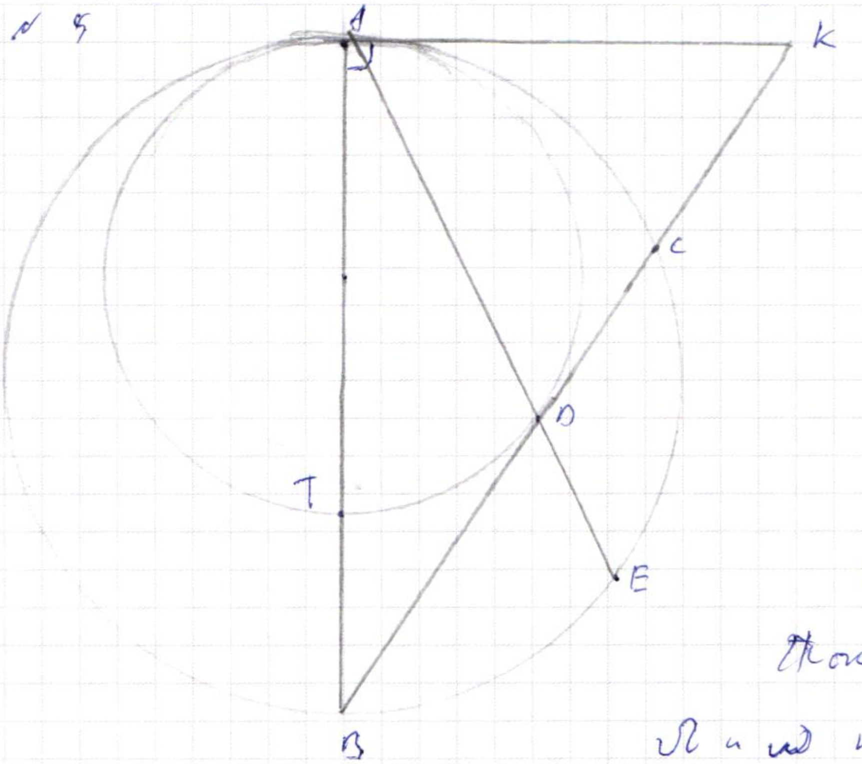
$EA = \frac{\sqrt3}{3}$

$S_{CED} = \frac{1}{2}\cdot\sin\angle CED\cdot DE\cdot CE = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot EA\cdot tg\,\alpha\cdot$
$\cdot 4EA = EA^2\,tg\,\alpha = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt3}{3} = \frac{2\sqrt3}{9}$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt3}{3}$; $S_{CED} = \frac{2\sqrt3}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 9



Окружности Ω и ω

A точка их касания;

BD – касательная к ω; AB – диаметр Ω;

$BD = 3$; $CD = 2$

Найти d_1; d_2 $S_{\triangle AKC}$

Решение

Так как окружности Ω и ω касаются внутренним образом, то значит диаметры AT и AB лежат на одной прямой; $AT = d_2$; $AB = d_1$.

По свойству касательной и секущей проведённых из одной точки $BD^2 = BT \cdot BA = (d_1 - d_2) \cdot d_1$;

Проведём касательную к окружностям в точке A

Она пересечёт касательную BD в точке K

Следовательно $AK = DK$ тогда $AK^2 = CK \cdot BK =$

$= (DK - DC) \cdot (DK + BD)$

$AK^2 = (AK - 2)(3 + AK)$

$AK^2 = AK^2 + AK - 6$

$AK = 6$; $BK = 9$; Так как $AK \perp BA$ то по теореме пифагора $AB^2 = BK^2 - AK^2 = 9^2 - 6^2 =$

$= (9-6)(9+6) = 45$

$AB = d_1 = 3\sqrt{5}$; Тогда

$BD^2 = 3\sqrt{5} \cdot (3\sqrt{5} - d_2)$

$9 = 45 - 3\sqrt{5}\, d_2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3\sqrt{5}$ $d_2 = 36$

$d_2 = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$\sin\angle ABK = \cos\angle AKB = \frac{AK}{BK} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; тогда

$AD^2 = AK^2 + DK^2 - 2\cos AKD \cdot AK \cdot DK = 6^2 + 6^2 - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 6^2 =$

$= 2\cdot 6^2 - \frac{4}{3} 6^2 = \frac{2}{3} 6^2$

$AD = 6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{6}$;

Тогда по теореме синусов для $\triangle ADB$

$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{AD}{\sin\angle ABK}$; => $\frac{3\sqrt{5}}{\sin\angle ADB} = \frac{2\sqrt{6}}{\frac{2}{3}}$;

$\sin\angle ADB = \sqrt{\frac{5}{6}}$;

По свойству пересекающихся хорд $AD\cdot DE = BD\cdot DC$

$2\sqrt{6}\cdot DE = 3\cdot 2$; => $DE = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{8}\ \frac{\sqrt{6}}{2}$

тогда $S_{ABEC} = \frac{1}{2}\sin ADB\cdot(BD+DC)\cdot(AD+DE) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{6} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $d_1 = 3\sqrt{5}$; $d_2 = \frac{12\sqrt{5}}{5}$; $S_{ABEC} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

№ 7 $f(ab) = f(a) + f(b)$ > $f(p) = [\frac{p}{2}]$

Пусть $a = 1$ тогда;

$f(b) = f(1) + f(b)$

$f(1) = 0$

тогда пусть $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{x}$;

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$f(1) = f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x})$

$f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x}) = 0$

$f(\frac{x}{y}) = -f(\frac{y}{x})$

Это значит что одно из значений $f(\frac{x}{y})$ и

$f(\frac{y}{x})$ будет меньше 0;

Теперь посмотрим условие $f(p) = [\frac{p}{2}]$

Так как все простые числа положительные, значит $[\frac{p}{2}] \geq 0 \Rightarrow f(p) > 0$

Тогда чтобы $f(\frac{x}{y}) < 0$ то $f(\frac{y}{x}) > 0$

а значит $f(\frac{y}{x}) = f(p)$; $\frac{y}{x} = p$; $y = xp$

Теперь найдем все возможные пары x и y.

Заметим что y не может быть простым числом так как $x \geq 2$;

Тогда если y имеет два различных простых множителя отличных от 1 и y, то для такого y будет 2 возможных ~~x~~ пары $(x;y)$

Это будет выполняться если y будет равно 6, 10, 14, 15, 18, 21, 22. Если y является квадратом простого числа то для такого y будет только одна пара. Это будет ~~во~~ если y будет равен 4 и 9

Теперь посмотрим пары для оставшихся y имеем 8, 12, 16, 20

1) $y = 8$

~~x~~ $(4;8)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $y = 12$

$(4; 12)$; $(6; 12)$

3) $y = 16$

$(8; 16)$

4) $y = 20$

$(4; 20)$; $(10; 20)$

Тогда ~~для~~ для ~~каждого y от 2~~ $y \in [2; 22]$ мы имеем 9 значений y для которых будет 2 пары и 4 значения y для которых будет 1 пара.

Тогда всё количество пар будет ровно $= 9 \cdot 2 + 4 =$ $= 22$ пары

Ответ: 22

№6 $8x - 6(2x-1) \leq ax + 6 \leq -8x^2 + 6x + 7$

Заметим что значение выражения $-8x^2 + 6x + 7$ ~~по~~ при $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ всегда положительное

Возьмём неравенство $ax + 6 \leq -8x^2 + 6x + 7$

Подставим в него значение $x = -x$:

$-ax + 6 \leq -8x^2 \cancel{+} 6x + 7$

Теперь сложим эти неравенства

$2b \le -16x^2 + 14$

$b \le -8x^2 + 7$

Тогда максимум b будет достигаться

при максимальном значении $|x|$

Так как $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ что $|x|_{max} = \frac{1}{2}$

Тогда

$b \le 5$

Аналогично проделаем тоже самое

с неравенством $8x - 6|2x-1| \le ax + b$

Из этого мы получим что $b \ge 4$

А значит $b = 5$

~~Максимальное~~ Минимальное значение $-8x^2 + 6x + 7$ равно $\frac{65}{8}$ 2

тогда $a x \le -1$